احصاء اور تحلیلی جیومیٹری

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ xi

1 ابتدائی معلومات 1
1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط 1
1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری 14
1.3 تفاعل 30
1.4 ترسیم کی منتقلی 52
1.5 تکونیاتی تفاعل 72

2 حدود اور استمرار 93
2.1 تبدیلی کی شرح اور حد 93
2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد 110
2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی با ضابطہ تعریف 123
2.4 تصور حد کی توسیع 143
2.5 استمرار 163
2.6 مماسی خط 181

3 تفرق 195
3.1 تفاعل کا تفرق 195
3.2 قواعد تفرق 217
3.3 تبدیلی کی شرح 236
3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق 253
3.5 زنجیری قاعدہ 274
3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما 291
3.7 دیگر شرح تبدیلی 308

4 تفرق کا استعمال 323
4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں 323
4.2 مسئلہ اوسط قیمت 337
4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ 353
4.3.1 پرکھ 353
4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم 365
4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء 388
4.6 بہترین بنانا 415
4.7 خط بندی اور تفرقات 439
4.8 ترکیب نیوٹن 460

5 تکمل 471
5.1 غیر قطعی تکملات 471
5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی 483
5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق 499
5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ 511
5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات 527
5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ 555
5.7 بنیادی مسئلہ 571
5.8 قطعی تکمل میں بدل 592
5.9 اعدادی تکمل 598
5.10 قاعدہ ذوزنقہ 598

6 تکمل کا استعمال 617
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ 617
6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد 621
6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش 632
6.3 اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا 639
6.4 نلکی چھلے 654
6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں 667
6.6 سطح طواف کا رقبہ 677
6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت 689
6.7.1 وسطانی مرکز 701
6.8 کام 706
6.9 فشار سیال اور قوت سیال 720
6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال 730

7 ماورائی تفاعل 743
7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات 744

7.2 قدرتی لوگارتھم . . . 762
7.3 قوت نمائی تفاعل . . . 779
7.4 a^x اور $\log_a x$ . . . 794
7.5 افزائش اور تنزل . . . 805
7.6 قاعدہ لھوپیٹال . . . 819
7.7 اضافی شرح نمو . . . 835
7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش . . . 840
7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل . . . 846
7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل . . . 862
7.10 ہذلولی تفاعل . . . 879
7.11 یک رتبی تفرقی مساوات . . . 900
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان . . . 918

8 تکمل کے طریقے 929
8.1 تکمل کے بنیادی کلیات . . . 929
8.2 تکمل بالحصص . . . 945
8.2.1 بار بار استعمال . . . 950
8.3 جزوی کسر . . . 959
8.4 تکونیاتی بدل . . . 974
8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر . . . 986
8.6 غیر مناسب تکمل . . . 1003

9 لامتناہی تسلسل 1029
9.1 اعداد کی ترتیب کی حد . . . 1029
9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے . . . 1048
9.3 لامتناہی تسلسل . . . 1064
9.4 غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ . . . 1083
9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ . . . 1093
9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ . . . 1103
9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز . . . 1115
9.8 طاقتی تسلسل . . . 1129
9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل . . . 1145
9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے . . . 1156
9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال . . . 1175

10 مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد 1195
10.1 مخروطی حصے اور دو درجی مساواتیں . . . 1195
10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی . . . 1220

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا 1230
10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول 1244
10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات 1260
10.6 قطبی محدد 1274
10.7 قطبی محدد میں ترسیم 1286
10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات 1300
10.8.1 دائرے 1301
10.9 قطبی محدد میں تکمل 1315

11 سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری 1329
11.1 مستوی میں سمتیات 1329
11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات 1345
11.2.1 کرہ 1353
11.3 ضرب نقطہ 1363
11.3.1 حساب 1364
11.4 صلیبی ضرب 1378
11.5 فضا میں خطوط اور مستویات 1393
11.6 نلکی اور مربع سطحیں 1408
11.7 نلکی اور کروی محدد 1426

12 سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت 1437
12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات 1437
12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی 1460
12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ 1469
12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ 1478
12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت 1499

13 کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات 1515
13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل 1515
13.2 حد اور استمرار 1530
13.3 جزوی تفرقات 1545
13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات 1562
13.5 زنجیری قاعدہ 1579
13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات 1594
13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں 1601
13.8 انتہائی قیمتیں اور نقاط زین 1622
13.8.1 نتیجہ 1631
13.9 لیگرینج ضاربین 1640
13.10 کلیہ ٹیلر 1657

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

Calculus and Analytic Geometry
George B. Thomas, Jr
Ross L. Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

30 مارچ 2020

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

ابتدائی معلومات

اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جا سکتا ہے۔

1.1 حقیقی اعداد اور حقیقی خط

اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

حقیقی اعداد اور حقیقی خط

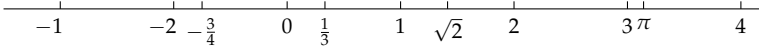
احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ **حقیقی اعداد**[1] وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{4} &= -0.75000\cdots \\
\frac{1}{3} &= 0.33333\cdots \\
\sqrt{2} &= 1.4142\cdots
\end{aligned}
$$

ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں $\cdots$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس لکیر کو **حقیقی خط**[2] کہتے ہیں۔

---

[1] real numbers
[2] real line

$\Re$ کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں: الجبرائی خواص، رتبی خواص، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتی ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جا سکتے ہیں۔آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے ہیں۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b اور c حقیقی اعداد ہوں، تب:

1. $a < b \implies a + c < b + c$

2. $a < b \implies a - c < b - c$

3. $c > 0$ اور $a < b \implies ac < bc$

4. $c < 0$ اور $a < b \implies bc < ac$ خصوصی صورت: $a < b \implies -b < -a$

5. $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$

6. اگر a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب $a < b \implies \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

درج بالا میں $a < b \implies a + c < b + c$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہو گی۔دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی "سوراخ" یا "درز" نہیں پایا جاتا ہے۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دارومدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\Re$ کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی **سلسلوں**[3] کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

1. **قدرتی اعداد**[4]، یعنی 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، $\cdots$

2. **عدد صحیح**، یعنی 0 ، ∓ 1 ، ∓ 2 ، ∓ 3 ، $\cdots$

3. **ناطق اعداد**[5]، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عددی صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔اس کی مثال درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔

(الف) مختتم (جو لا متناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000\cdots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909\cdots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کی الجبرائی خواص اور رتبی خواص رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے ہیں، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا ہے جس کا مربع 2 ہو۔یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سوراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں **غیر ناطق اعداد**[6] کہلاتے ہیں۔غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نا مختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں **وقفہ**[7] کہلاتا ہے۔ مثال کے طور تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ ہے۔اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد وقفہ نہیں ہیں چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں ہے لہٰذا -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد سلسلہ کا حصہ نہیں ہیں۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر قطع یا شعاع یا پورے حقیقی خط کو سلسلہ ظاہر کرتا ہے۔خطی قطع **متناہی وقفہ**[8] جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط **لا متناہی**

---

[3] sets
[4] natural numbers
[5] rational numbers
[6] irrational numbers
[7] interval
[8] finite interval

جدول 1.1: وقفوں کی قسمیں

	علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	(a,b)	$\{x\|a<x<b\}$	
	$[a,b]$	$\{x\|a\leq x\leq b\}$	
	$[a,b)$	$\{x\|a\leq x<b\}$	
	$(a,b]$	$\{x\|a<x\leq b\}$	
لا متناہی	(a,∞)	$\{x\|x>a\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x\|x\geq a\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x\|x<b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x\|x\leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

وقفہ[9] کہلاتے ہیں۔

اگر متناہی وقفہ کے دونوں سر بھی وقفہ کا حصہ ہوں تب یہ **بند**[10] کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفہ کا حصہ ہو تب یہ **نصف کھلا**[11] کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفہ کا حصہ نہ ہوں تب یہ **کھلا**[12] کہلاتا ہے۔وقفے کے سروں کو **سرحدی نقطے**[13] بھی کہتے ہیں۔یہ وقفہ کی **سرحد**[14] ہیں۔ وقفہ کے باقی نقطوں کو **اندرونی نقطے**[15] کہتے ہیں۔تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کی **اندرون**[16] کہتے ہیں۔

وقفوں کی قسموں کو جدول 1.1 میں دکھایا گیا ہے۔

عدم مساوات کا حل

x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

مثال 1.1:

[9] infinite interval
[10] closed
[11] half-open
[12] open
[13] boundary points
[14] boundary
[15] interior points
[16] interior

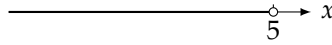
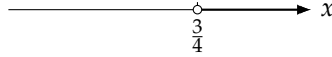
1) $2x-4<x+1$ 2) $-\frac{x}{3}<x-1$ 3) $\frac{2}{x-1}\geq 4$

حل:

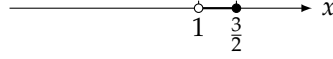
(1

$$
\begin{aligned}
2x-4 &< x+1 \\
2x &< x+5 && \text{دونوں ہاتھ 4 جمع کریں} \\
x &< 5 && \text{دونوں ہاتھ سے } x \text{ منفی کریں}
\end{aligned}
$$

حل سلسلہ وقفہ $(-\infty,5)$ ہے۔

(2

$$
\begin{aligned}
-\frac{x}{3} &< x-1 \\
-x &< 3x-3 && \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں} \\
0 &< 4x-3 && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ } x \text{ جمع کریں} \\
3 &< 4x && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں} \\
\frac{3}{4} &< x && \text{دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں}
\end{aligned}
$$

وقفہ $(\frac{3}{4},\infty)$ حل سلسلہ ہے۔

3) عدم مساوات $\frac{2}{x-1}\geq 4$ صرف $x>1$ کی صورت میں درست ہو گا چونکہ $x<1$ کی صورت میں بایاں ہاتھ منفی ہو گا اور $x=1$ پر بایاں ہاتھ غیر متعین ہے۔عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x-1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x-1} &\geq 4 \\
2 &\geq 4x-4 && \text{دونوں ہاتھ کو } x-1 \text{ سے ضرب دیں} \\
6 &\geq 4x && \text{دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں} \\
\frac{3}{2} &\geq x && \text{دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں}
\end{aligned}
$$

حل سلسلہ نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$ ہے۔

□

مطلق قیمت

عدد x کی **مطلق قیمت**[17] جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کہ تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال 1.2: $\left|-|a|\right| = |a| \quad |-13| = -(-13) = 13, \quad |0| = 0, \quad |0.88| = 0.88,$ □

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq$ ہو گی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہو گا۔چونکہ a کی غیر منفی جذر کو $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $|a| = \sqrt{a^2}$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔زیادہ عمومی طور پر (شکل 1.1)

$$x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ } = |x - y|$$

ہو گا۔ مطلق قیمت کے درج ذیل خواص پائے جاتے ہیں۔

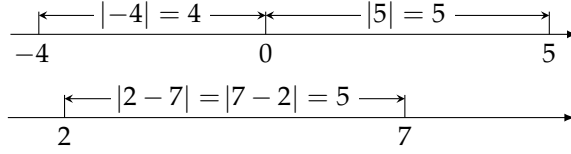
مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

1. $|-a| = |a|$ کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔

2. $|ab| = |a||b|$ حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔

---

[17] absolute value

$$|-4| = 4 \qquad |5| = 5$$
$$-4 \qquad 0 \qquad 5$$
$$|2-7| = |7-2| = 5$$
$$2 \qquad 7$$

شکل 1.1: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔

4. $|a+b| \le |a| + |b|$ دو اعداد کے مجموعہ کی مطلق قیمت دونوں کے مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔اس کو **تکونی عدم مساوات** کہتے ہیں۔

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a+b|$ کی قیمت $|a| + |b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔اس کے علاوہ ہر صورت $|a+b| = |a| + |b|$ ہو گا۔

مثال 1.3:

$$\begin{aligned}
|-2+6| &= |4| = 4 < |-2| + |6| = 8 \\
|2+6| &= |8| = |2| + |6| \\
|-2-6| &= |-8| = 8 = |-2| + |-6|
\end{aligned}$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 1.4: مساوات $|2x-1| = 11$ کو حل کریں۔

حل: اس مساوات کے تحت $2x - 1 = \mp 11$ ہو سکتا ہے لہٰذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کی جاتی ہیں۔

$$\begin{aligned}
2x - 1 &= 11 & 2x - 1 &= -11 \\
2x &= 12 & 2x &= -10 \\
x &= 6 & x &= -5
\end{aligned}$$

یوں $|2x-1| = 11$ کا درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔ □

مطلق قیمت والے عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

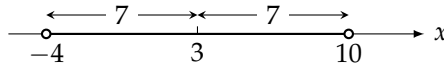
مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب

$$|a| < D \iff -D < a < D \tag{1.1}$$
$$|a| \le D \iff -D \le a \le D \tag{1.2}$$

مثال 1.5: عدم مساوات $|x-3| < 7$ کو حل کریں اور حل سلسلہ کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔
حل:

$$|x-3| < 7$$
$$-7 < x-3 < 7 \qquad \text{مساوات } 1.1$$
$$-7+3 < x < 7+3 \qquad \text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں}$$
$$-4 < x < 10$$

حل سلسلہ کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔

□

مثال 1.6: عدم مساوات $\left|3-\frac{2}{x}\right| < 1$ کو حل کریں۔
حل:

$$\left|3-\frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 3-\frac{2}{x} < 1 \qquad \text{مساوات } 1.1$$
$$-4 < -\frac{2}{x} < -2 \qquad \text{3 منفی کریں}$$
$$2 > \frac{1}{x} > 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \text{ سے ضرب دیں}$$
$$\frac{1}{2} < x < 1 \qquad \text{معکوس لیں}$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب معکوس لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔حل سلسلہ کھلا وقفہ $(\frac{1}{2}, 1)$ ہے۔ □

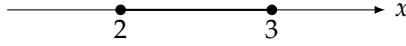
مثال 1.7: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

(الف) $|2x-5| \le 1$ (ب) $|2x-5| \ge 1$

حل: (الف)

$$\begin{aligned} |2x-5| &\le 1 \\ -1 \le 2x-5 &\le 1 && \text{مساوات } 1.2 \\ 4 \le 2x &\le 6 && \text{جمع } 5 \\ 2 \le x &\le 3 && \text{تقسیم } 2 \end{aligned}$$

حل سلسلہ بند وقفہ $[2, 3]$ ہے۔

(ب)

$$|2x-5| \ge 1$$

$$\begin{array}{c|c} 2x-5 \ge 1 & -(2x-5) \ge 1 \\ 2x \ge 6 & 2x-5 \le -1 \\ x \ge 3 & 2x \le 4 \\ & x \le 2 \end{array}$$

حل سلسلہ $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ ہے۔

□

درج بالا مثال کے دوسرے حل سلسلہ میں وقفوں کی **اشتراک**[18] کی علامت $\cup$ استعمال کی گئی ہے۔دو سلسلوں کی اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔اسی طرح ہم **تقاطع**[19] کی علامت $\cap$ بھی استعمال کرتے ہیں۔دو سلسلوں کی تقاطع میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔مثال کے طور پر $[1, 3) \cap [2, 4] = [2, 3)$ ہو گا۔

---

[18] union
[19] intersection

سوالات

اعشاری روپ

سوال 1.1: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کی روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔
جواب: $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}$

سوال 1.2: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

عدم مساوات

سوال 1.3: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $0 < x < 4$
ب $0 < x - 2 < 4$
ج $1 < \frac{x}{2} < 3$
د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$
ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$
و $|x - 4| < 2$
ز $-6 < -x < 2$
ح $-6 < -x < -2$

سوال 1.4: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لئے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$
ب $-6 < y < -4$
ج $y > 4$
د $y < 6$
ہ $0 < y - 4 < 2$
و $2 < \frac{y}{2} < 3$
ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$
ح $|y - 5| < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال 1.5: $-2x > 4$
جواب: $x < -2$

سوال 1.6: $8 - 3x \geq 5$

سوال 1.7: $5x - 3 \leq 7 - 3x$
جواب: $x \leq \frac{5}{4}$

سوال 1.8: $3(2-x) > 2(3+x)$

سوال 1.9: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$
جواب: $x \leq -\frac{1}{3}$

سوال 1.10: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

سوال 1.11: $\frac{4}{5}(x-2) < \frac{1}{3}(x-6)$
جواب: $x < -\frac{6}{7}$

سوال 1.12: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$

مطلق قیمت

سوال 1.13 تا سوال 1.18 میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال 1.13: $\left|y\right| = 3$
جواب: ∓ 3

سوال 1.14: $\left|y-3\right| = 7$

سوال 1.15: $|2t+5| = 4$
جواب: $-\frac{1}{2}, \quad -\frac{9}{2}$

سوال 1.16: $|1-t| = 1$

سوال 1.17: $|8-3s| = \frac{9}{2}$
جواب: $\frac{7}{6}, \quad \frac{25}{6}$

سوال 1.18: $\left|\frac{s}{2} - 1\right| = 1$

سوال 1.19 تا سوال 1.34 میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ حل سلسلہ کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ حل سلسلہ کو ترسیم کریں

سوال 1.19: $|x| < 2$
جواب: $-2 < x < 2$

سوال 1.20: $|x| \leq 2$

سوال 1.21: $|t-1| \leq 3$
جواب: $-2 \leq t \leq 4$

سوال 1.22: $|t+2|<1$

سوال 1.23: $|3y-7|<4$
جواب: $1<y<\frac{11}{3}$

سوال 1.24: $|2y+5|<1$

سوال 1.25: $\left|\frac{z}{5}-1\right|\le 1$
جواب: $0\le z\le 10$

سوال 1.26: $\left|\frac{3}{2}z-1\right|\le 2$

سوال 1.27: $\left|3-\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{2}$
جواب: $\frac{10}{35}<x<\frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7}<y<\frac{11}{3}$

سوال 1.28: $\left|\frac{2}{x}-4\right|<3$

سوال 1.29: $|2s|\ge 4$
جواب: $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

سوال 1.30: $|s+3|\ge\frac{1}{2}$

سوال 1.31: $|1-x|>1$
جواب: $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$

سوال 1.32: $|2-3x|>5$

سوال 1.33: $\left|\frac{r+1}{2}\right|\ge 1$
جواب: $(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$

سوال 1.34: $\left|\frac{3}{5}r-1\right|>\frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال 1.35 تا سوال 1.42 میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے حل سلسلہ کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کی اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2}=|a|$ کا استعمال کریں۔

سوال 1.35: $x^2 < 2$
جواب $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 1.36: $4 \leq x^2$

سوال 1.37: $4 < x^2 < 9$
جواب $(-3, -2) \cup (2, 3)$

سوال 1.38: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال 1.39: $(x-1)^2 < 4$
جواب $(-1, 3)$

سوال 1.40: $(x+3)^2 < 2$

سوال 1.41: $x^2 - x < 0$
جواب $(0, 1)$

سوال 1.42: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.43: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہے۔ کس حقیقی عدد a کے لئے ایسا درست ہے اور کس کے لئے یہ درست نہیں ہے۔
جواب: تمام منفی حقیقی اعداد کے لئے یہ غلط ہے جبکہ $a \geq 0$ کے لئے درست ہے۔

سوال 1.44: مساوات $|x-1| = 1 - x$ کو حل کریں۔

سوال 1.45: تکونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے تکونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a+b| &\leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

سوال 1.46: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لئے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال 1.47: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟
جواب: $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

سوال 1.48: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

سوال 1.49: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔
جواب: $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

سوال 1.50: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔
(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔

1.2 محدد، خطوط اور بڑھوتری

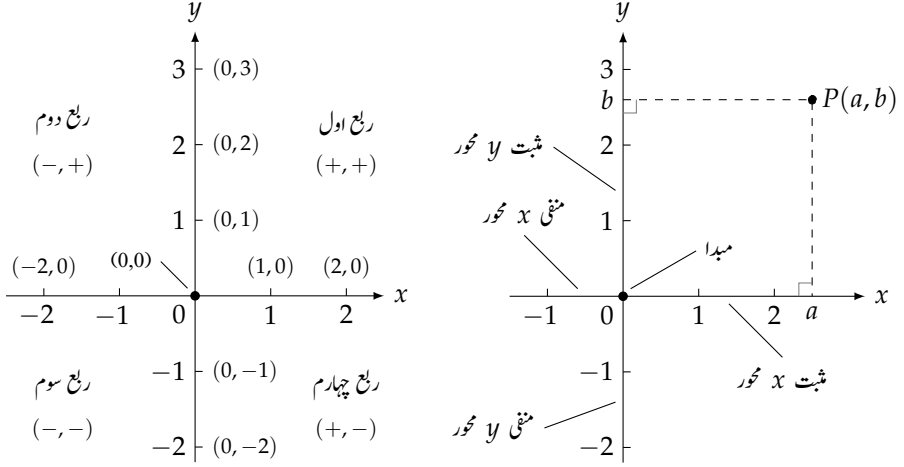
اس حصہ میں محدد اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدد

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل 1.2 میں دکھائی گئی ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتی ہیں۔ان خطوط کو مستوی میں **محددی محور**[20] کہتے ہیں۔افقی x محور پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔انتصابی y محور پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ بڑھتے ہیں۔وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محددی نظام کا **مبدا**[21] کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔اگر P سے x محور پر قائمہ خط x محور کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x **محدد**[22] a ہو گا۔اسی طرح اگر P سے y محور پر قائمہ خط y محور کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y **محدد**[23] b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a, b) کو نقطے کی **محددی جوڑی**[24] کہتے ہیں۔ x محور پر ہر محددی جوڑی کا y محدد 0 ہو گا جبکہ y محور پر ہر محددی جوڑی کا x محدد 0 ہو گا۔محددی نظام کا مبدا نقطہ $(0, 0)$ ہے۔

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔مبدا کے دائیں جانب **مثبت** x **محور**[25] اور مبدا کے بائیں جانب **منفی** x **محور**[26] پایا جاتا

coordinate axis[20]
origin[21]
x-coordinate[22]
y-coordinate[23]
coordinate pair[24]
positive x-axis[25]
negative x-axis[26]

شکل 1.2: کارتیسی محدد

ہے۔ اسی طرح مبدا y محور کو بھی **مثبت** y **محور** اور **منفی** y **محور** میں تقسیم کرتا ہے۔ محدد مستوی کو چار **ربعات**[27] میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں (گھڑی کی الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہتے ہیں (شکل 1.2)۔

پیما

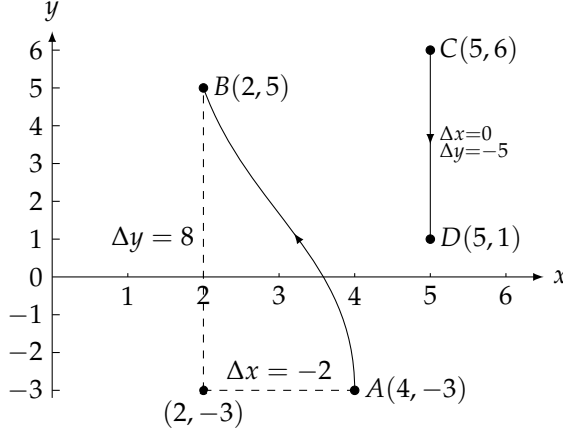
ایسا ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر اکائی متغیر کو ایک جیسا رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں ہوتی ہے۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کی محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کو ظاہر کر سکتی ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسے ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کی **تناسب پہلو**[28] ایک جیسے رکھتے ہیں لہٰذا دونوں محور پر پیمانہ ایک جیسا ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطہ سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدد میں کل تبدیلی کو **بڑھوتری**[29] کہتے ہیں۔ اختتامی محدد سے ابتدائی محدد منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

---

[27] quadrants
[28] aspect ratio
[29] increments

شکل 1.3: محددی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

مثال 1.8: نقطہ $A(4,-3)$ سے نقطہ $B(2,5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل 1.3)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

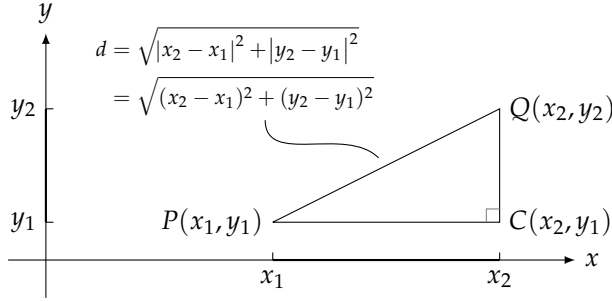
□

مثال 1.9: شکل 1.3 میں ابتدائی نقطہ $C(5,6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5,1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

حل: $\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$ □

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ نقطہ $P(x_1,y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2,y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل 1.4)۔

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

شکل 1.4: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)

مثال 1.10: (الف) $P(-1,2)$ اور $Q(3,4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3-(-1))^2+(4-2)^2} = \sqrt{(4)^2+(2)^2}\sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

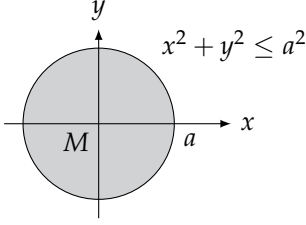
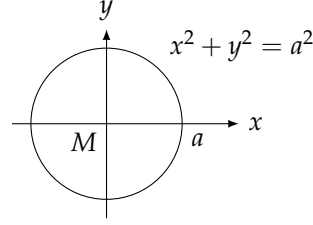
□

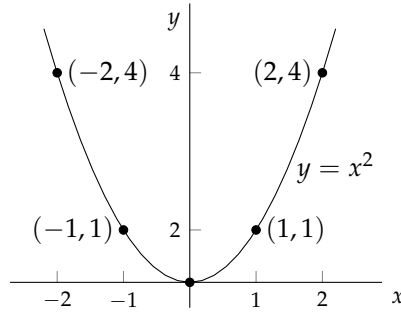
ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

مثال 1.11: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو
(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2+y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصل a $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔یہ دائرہ مساوات $x^2+y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل 1.5)۔
(ب) عدم مساوات $x^2+y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصل $\leq a$ ہے۔یوں مبدا کو مرکز بناتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کی اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہو گی (شکل 1.5)۔ □

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو **اکائی دائرہ**[30] کہتے ہیں۔

[30] unit circle

(ب) عدم مساوات کی ترسیم

(ا) مساوات کی ترسیم

شکل 1.5: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال 1.11)

شکل 1.6: قطع مکافی (مثال 1.12)

مثال 1.12: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(2, 4)$ اور $(-2, 4)$ ایسی چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو **قطع مکافی**[31] کہتے ہیں (شکل 1.6)۔

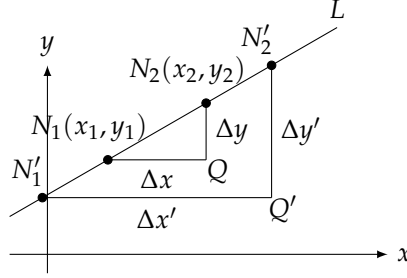
□

سیدھے خطوط

مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لئے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

[31] parabola

شکل 1.7: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ تشابہ مثلثات ہیں لٰہذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

کی قیمت ایک جیسی ہو گی (شکل 1.7)۔

تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

غیر انتصابی خط N_1N_2 کی **ڈھلوان**[32] کہلاتی ہے۔

□

ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتی ہے۔مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے اترائی نظر آئے گی۔ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔انتصابی خط کی ڈھلوان کے لئے $\Delta x = 0$ ہو گا لٰہذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ غیر معین ہو گا[33]۔یوں انتصابی خط کی ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کی ڈھلوان 0 ہے۔

مثال 1.13: شکل 1.8 میں L_1 کی ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

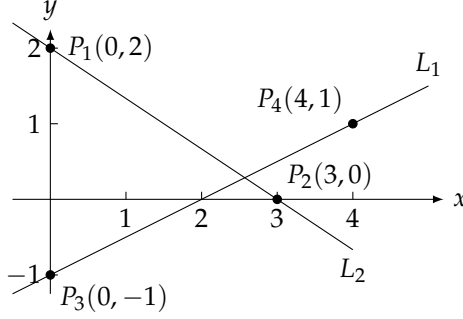
ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔اسی طرح L_2 کی ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ ہے۔یوں دائیں رخ چلتے ہوئے □

---

[32] slope

[33] چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں ہے۔

شکل 1.8: چڑھائی اور اترائی (مثال 1.13)

شکل 1.9: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے

خط کی چڑھائی یا اترائی کو **زاویہ میلان**[34] سے بھی ناپا جاتا ہے۔ x محور سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے (شکل 1.9)۔افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا جائے تب $0 \le \phi \le 180^\circ$ ہو گا۔

خط کی ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل 1.10)۔

$$m = \tan \phi$$

متوازی اور قائمہ خطوط

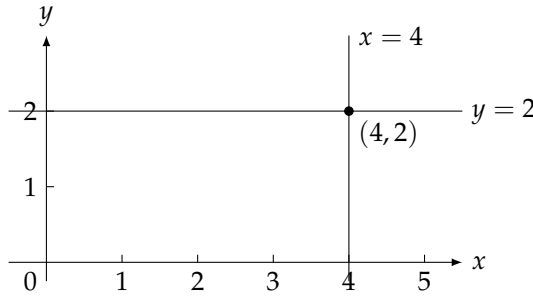
متوازی خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا ان کی ڈھلوان بھی ایک جیسی ہو گی۔اسی طرح ایک جیسی ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک جیسا ہو گا لہٰذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کی ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔یوں ایک خط کی ڈھلوان کا منفی معکوس دوسرے خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا، یعنی:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

[34] angle of inclination

شکل 1.10: غیر انتصابی خط کی ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجنٹ ہوتا ہے

شکل 1.11: قائمہ خطوط کی ڈھلوان کا تعلق

شکل 1.12: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال 1.14)

شکل 1.11 میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan\phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan\phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔یوں $m_1 m_2 = (\frac{a}{h})(-\frac{h}{a}) = -1$ ہو گا۔

خطوط کے مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ x محور کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔اسی طرح y محور کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال 1.14: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کے مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل 1.12)۔ □

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط L کی ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \implies y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جا سکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کی ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی جس کو خط کی **نقطہ-ڈھلوان مساوات**[35] ہے۔

□

مثال 1.15: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔
حل:

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \implies y = -\frac{2}{3}x + 4$$

□

مثال 1.16: نقطہ $(-2, -1)$ اور $(3, 4)$ سے گزرتا خط کی مساوات تلاش کریں۔
حل: اس خط کی ڈھلوان

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ہے۔ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1, y_1) = (3, 4)$ لیتے ہیں	نقطہ $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ لیتے ہیں
$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$	$y = -1 + 1 \cdot (x - x(-2))$
$y = 4 + x - 3$	$y = -1 + x + 2$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک جیسی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل 1.13)۔ □

[35] point-slope equation

شکل 1.13: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال 1.16)

شکل 1.14: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات

غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y **قطع**[36] کہتے ہیں۔اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر x محور کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا x **قطع**[37] کہتے ہیں (شکل 1.14)۔

غیر انتصابی خط جو y محور کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

ہو گی۔

تعریف : درج ذیل مساوات

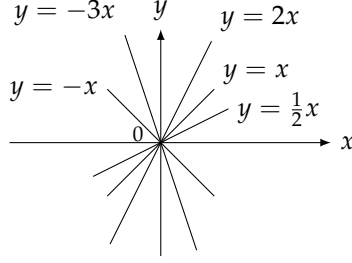
$$y = b + m(x - 0) \quad \implies \quad y = mx + b$$

کو خط کی **ڈھلوان۔قطع مساوات**[38] کہتے ہیں۔اس خط کی ڈھلوان m ہے اور یہ y محور کو b پر قطع کرتا ہے۔

□

مثال 1.17: خط $y = 3x - 7$ کی ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ y محور کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ □

---

y-intercept[36]
x-intercept[37]
slope-intercept equation[38]

شکل 1.15: مبدا سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کی ڈھلوان ہے

درج ذیل مساوات کو **عمومی خطی مساوات**[39] کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) کو عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 1.18: خط $8x + 5y = 20$ کی y قطع تلاش کریں۔
حل: ہم مساوات کو ڈھلوان۔قطع روپ میں لکھ کر y قطع کو مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

یوں خط کی ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور y قطع 4 ہے۔ □

مثال 1.19: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔
چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہٰذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل 1.15 میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ □

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔اسی طرح ساکن جسم کشش ثقل کی بنا سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں **خطی مساوات**[40] کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کی طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

---

[39] general linear equation
[40] linear equations

بہت سارے اہم مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔یہ جانتے ہوئے کہ دو مقدار آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی معلوم ہوتی ہے یا مقداروں کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔اسی بنا احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال 1.20: برقی دور میں برقی دباو V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔اس مساوات کی ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ □

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال 1.51 تا سوال 1.54 میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 1.51: $A(-3,2),\ B(-1,-2)$
جواب: $2, -4; 2\sqrt{5}$

سوال 1.52: $A(-1,-2),\ B(-3,2)$

سوال 1.53: $A(-3.2,-2),\ B(-8.1,-2)$
جواب: $-4.9, 0; 4.9$

سوال 1.54: $A(\sqrt{2},4),\ B(0,1.5)$

سوال 1.55 تا سوال 1.58 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.55: $x^2+y^2=1$
جواب: اکائی دائرہ

سوال 1.56: $x^2+y^2=2$

سوال 1.57: $x^2+y^2\le 3$
جواب: رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کی اندرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 1.58: $x^2+y^2=0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال 1.59 تا سوال 1.62 دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کی ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کی

قائمہ خطوط کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 1.59: $A(-1,2),\ B(-2,-1)$
جواب: $m_{\perp}=-\frac{1}{3}$

سوال 1.60: $A(-2,1),\ B(2,-2)$

سوال 1.61: $A(2,3),\ B(-1,3)$
جواب: $m_{\perp}$ غیر معین ہے۔

سوال 1.62: $A(-2,0),\ B(-2,-2)$

سوال 1.63 تا سوال 1.66 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتا (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 1.63: $(-1,\frac{4}{3})$
جواب: (الف) $x=-1$ (ب) $y=\frac{4}{3}$

سوال 1.64: $(\sqrt{2},-1.3)$

سوال 1.65: $(0,-\sqrt{2})$
جواب: (الف) $x=0$ $y=-\sqrt{2}$

سوال 1.66: $(-\pi,0)$

سوال 1.67 تا سوال 1.80 میں خط کی مساوات تلاش کریں۔خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال 1.67: نقطہ $(-1,1)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان -1 ہو۔
جواب: $y=-x$

سوال 1.68: نقطہ $(2,-3)$ سے گزرتا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال 1.69: نقطہ $(3,4)$ اور $(-2,5)$ سے گزرتا خط۔
جواب: $y=-\frac{x}{5}+\frac{23}{5}$

سوال 1.70: نقطہ $(-8,0)$ اور $(-1,3)$ سے گزرتا خط۔

سوال 1.71: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔
جواب: $y = -\frac{5}{4}x + 6$

سوال 1.72: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال 1.73: نقطہ $(-12, -9)$ سے گزرتا جس کی ڈھلوان 0 ہو۔
جواب: $y = -9$

سوال 1.74: نقطہ $(\frac{1}{3}, 2)$ سے گزرتا جس کی کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال 1.75: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔
جواب: $y = 4x + 4$

سوال 1.76: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال 1.77: جو نقطہ $(5, -1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x + 5y = 15$ کے متوازی ہو۔
جواب: $y = -\frac{2}{5}x + 1$

سوال 1.78: جو نقطہ $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x + 5y = \sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال 1.79: نقطہ $4, 10$ سے گزرتا اور خط $6x - 3y = 13$ کا قائمہ ہو۔
جواب: $y = -\frac{x}{2} + 12$

سوال 1.80: نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتا اور خط $8x - 13y = 13$ کا قائمہ۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال 1.81 تا سوال 1.84)

سوال 1.81: $3x + 4y = 12$
جواب: قطع $x = 4$ ، قطع $y = 3$

سوال 1.82: $x + 2y = -4$

سوال 1.83: $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
جواب: قطع $x = \sqrt{3}$ ، قطع $y = -\sqrt{2}$

سوال 1.84: $1.5x - y = -3$

سوال 1.85: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Bx - Ay = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔
جواب: جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کی ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی معکوس ہیں۔

سوال 1.86: کیا $Ax + By = C_1$ اور $Ax + By = C_2$ (جہاں $A \neq 0$ اور $B \neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال 1.87: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(-2, 3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ ، $\Delta y = -6$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔
جواب: $(3, -3)$

سوال 1.88: ایک ذرہ کا ابتدائی مقام $A(6, 0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتری $\Delta x = -6$ ، $\Delta y = 0$ ہیں۔ ذرہ کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال 1.89: ایک ذرہ $A(x, y)$ سے $B(3, -3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری $\Delta x = 5$ اور $\Delta y = 6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔
جواب: $(-2, -9)$

سوال 1.90: ایک ذرہ $A(1, 0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1, 0)$ کو واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال 1.91: پانی میں دباو پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباو محسوس کرے گا جہاں $p = kd + 1$ ہے جہاں k مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر یہ 1 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر دباو کیا ہو گا؟
جواب: 5.97 کرہ ہوائی دباو

سوال 1.92: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع x محور سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال 1.93: **سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ** سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسی درجہ حرارت پائی جاتی ہے جس پر

دونوں پیمانے ایک جیسی اعدادی جواب دیں؟
جواب: جی ہاں۔ $C = F = -40^\circ$

نظریہ اور مثالیں

سوال 1.94: ایک مثلث کے راس $A(1,2)$ ، $B(5,5)$ اور $C(4,-2)$ پر پائے جاتے ہیں۔مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال 1.95: ایک مثلث کے راس $A(0,0)$ ، $B(1,\sqrt{3})$ اور $C(2,0)$ ہیں۔دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

سوال 1.96: دکھائیں کہ $A(2,-1)$ ، $B(1,3)$ اور $C(-3,2)$ چکور کی راسیں ہیں۔چوتھی راس تلاش کریں۔

سوال 1.97: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1,1)$ ، $(2,0)$ اور $(2,3)$ ہیں۔تینوں کی چوتھی راس تلاش کریں۔
جواب: $(-1,4), (-1,-2), (5,2)$

سوال 1.98: مبدا کے گرد گھڑی مخالف 90° گھمانے سے نقطہ $(2,0)$ اور $(0,3)$ بالترتیب $(0,2)$ اور $(-3,0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل 1.16)۔درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

ا) $(4,1)$
ب) $(-2,-3)$
ج) $(2,-5)$
د) $(x,0)$
ھ) $(0,y)$
و) (x,y)
ز) کونسا نقطہ $(10,3)$ پر منتقل ہو گا؟

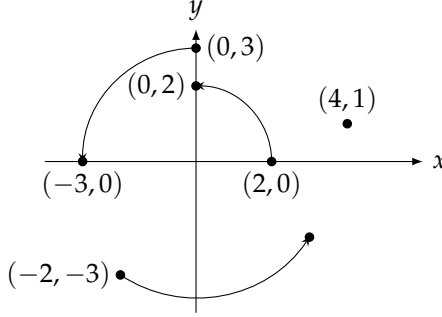
سوال 1.99: k کی کس قیمت کے لئے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لئے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟
جواب: $k = -8, \quad k = \frac{1}{2}$

سوال 1.100: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x + 2y = 3$ اور $2x - 3y = -1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال 1.101: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطع کا وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو گا۔

سوال 1.102: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L : Ax + By = C$ تک فاصل درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

- L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔
- خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔
- N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصل تلاش کریں۔

شکل 1.16: گھڑی مخالف °90 گھومنا (سوال 1.98)

ا) $N(2,1), L: y = x + 2$

ب) $N(4,6), L: 4x + 3y = 12$

ج) $N(a,b), L: x = -1$

د) $N(x_0, y_0), L: Ax + By = C$

1.3 تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

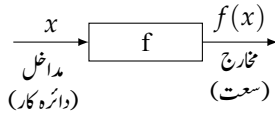
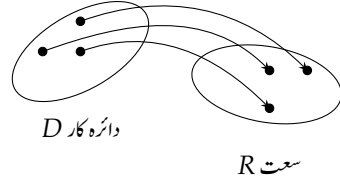
تفاعل

سطح سمندر سے بلندی پر پانی ابلنے کا درجہ حرارت منحصر ہے۔زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔چونکہ y کی قیمت **مکمل** طور پر x تعین کرتا ہے لہٰذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلہ کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا رقبہ A تفاعل ہے۔مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لئے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔

رداس کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **دائرہ کار**[41] کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **سعت**[42] کہتے ہیں۔چونکہ رداس کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

---

[41] domain
[42] range

شکل 1.17: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔

شکل 1.18: تفاعل کی ڈبہ صورت

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کا سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عموماً کلی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا ہے۔ہم

$$y = f(x) \qquad (y \text{ برابر ہے } x \text{ کا } f)$$

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ داخلی قیمت x **غیر تابع متغیر**[43] ہے اور خارجی قیمت y **تابع متغیر**[44] ہیں۔ x کی قیمت تفاعل کی دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

□

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کا سعت R کا حصہ ہے (شکل 1.17)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل 1.18)۔اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

1. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

---

43 independent variable
44 dependent variable

2. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f، نا کہ $f(x)$، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کی غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر عموماً تفاعل کو $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً **حقیقی متغیرات**[45] کے **حقیقی قیمت تفاعل**[46] پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ہم تفاعل کی دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 1.21: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$3\,\mathrm{m}$ رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\,\mathrm{m}^2$$

□

مثال 1.22: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لئے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t-1)+3$$

اس تفاعل کی قیمت 0، 2، $x+2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
F(0) &= 2(0-1)+3 = -2+3 = 1\\
F(2) &= 2(2-1)+3 = 2+3 = 5\\
F(x+2) &= 2(x+2-1)+3 = 2x+5\\
F(F(2)) &= F(5) = 2(5-1)+3 = 11
\end{aligned}$$

□

[45] real variables
[46] real valued function

روایتِ دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لئے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔اس کو تفاعل کا **قدرتی دائرہ کار**[47] کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم " $y = x^2, x \geq 2$ " لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنا سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گا۔تفاعل $y = x^2$ کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کا سعت $[4, \infty)$ ہو گا جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال 1.23:

تفاعل	دائرہ کار(x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لئے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے جس کو $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 0$ ، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لئے حقیقی y دیتا ہے۔تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا سعت، تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے سلسلے کا معکوس ہو گا جس از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

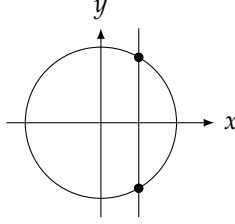
کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔اس کا سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لئے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونا لازمی ہے۔یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔تفاعل کا سعت $[0, \infty)$ ہو گا۔ □

---

[47] natural domain

شکل 1.19: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔

تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی تقسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدد تفاعل f کی داخلی، خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لئے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہٰذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہٰذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل 1.19)۔ جیسا آپ شکل 1.19 سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔اگر تفاعل f کی دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

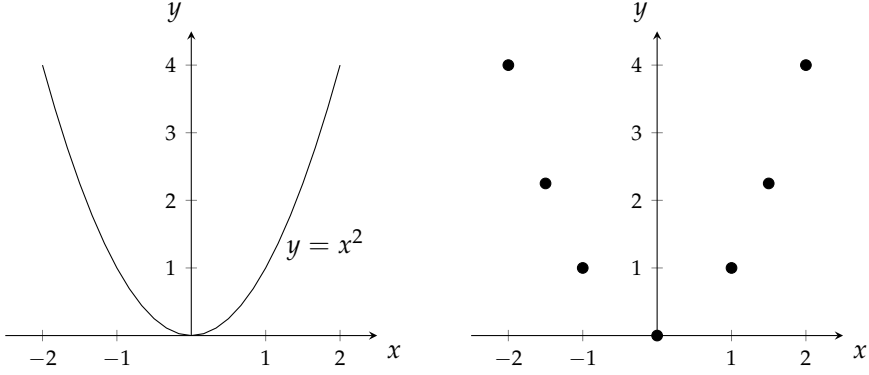
مثال 1.24: وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔
حل: **پہلا قدم:** پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

دوسرا قدم: جدول میں دیے نقطوں کو xy مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 1.20)۔
تیسرا قدم: ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچیں۔ منحنی پر سرخی لکھیں۔ □

احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل 1.21 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لئے جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو کے لئے تفاعل $f + g$ ، $f - g$ اور fg

شکل 1.20: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال 1.24)

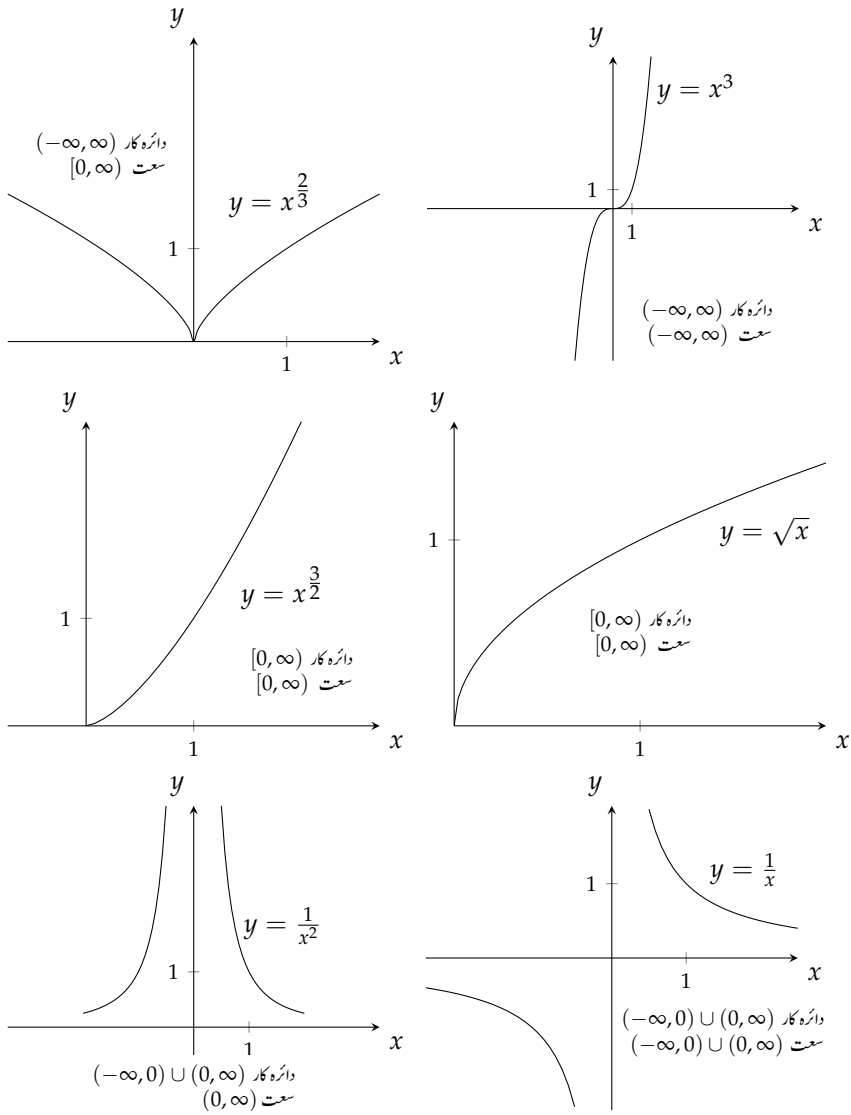
کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

f اور g کی دائرہ کار کے اشتراک $D(f) \cap D(g)$ جہاں $g(x) \neq 0$ ہو ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہو گی۔

$$(cf)(x) = cf(x)$$

شکل 1.21: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مثال 1.25:

تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x)=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
g	$g(x)=\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$3g$	$3g(x)=3\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ ($x=1$ ماسوائے)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ ($x=0$ ماسوائے)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو **مرکب تفاعل**[48] $f\circ g$ کہتے ہیں۔

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f\circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

$f\circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

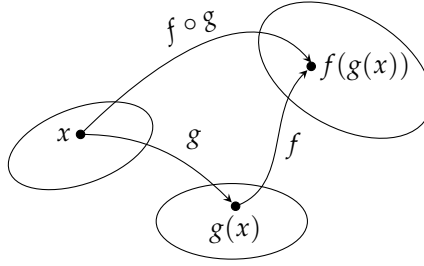
□

تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جا سکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کی دائرہ کار میں پایا جاتا ہو۔ $f\circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل 1.22)۔

معین $g\circ f$ حاصل کرنے کے لئے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g\circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کی دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f\circ g$ اور $g\circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

مثال 1.26: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ اور $g(x)=x+1$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

[48] composite function

شکل 1.22: مرکب تفاعل

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل:

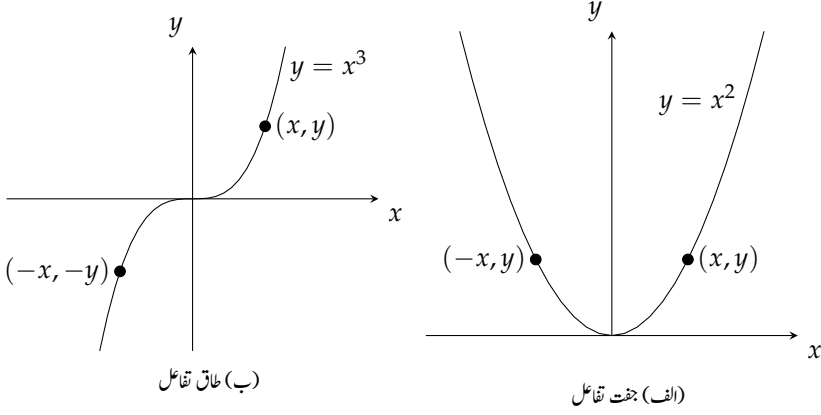
مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لئے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x + 1$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $0 \geq x + 1$ یعنی $-1 \geq x$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ جفت[49] کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم y محور کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-الف)۔ y محور کے ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جا سکتی ہے۔

[49] even

شکل 1.23: جفت اور طاق تفاعل

f کی دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **طاق**[50] کہلاتا ہے۔دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل 1.23-ب)۔چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔یہاں بھی y محور کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جا سکتی ہے۔

ٹکڑوں میں معین تفاعل

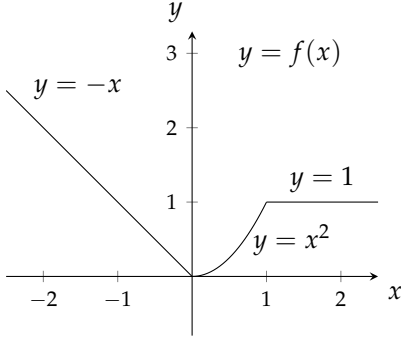
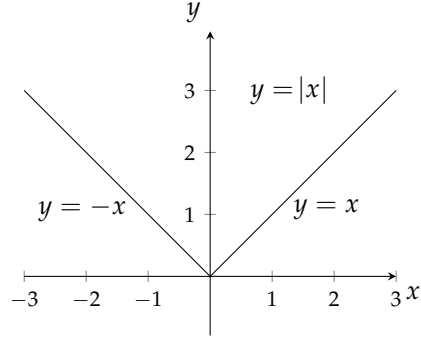
بعض اوقات ایک تفاعل کو اس کے دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات ظاہر کرتی ہیں۔اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل 1.24)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

---

[50] odd

شکل 1.24: مطلق قیمت تفاعل

شکل 1.25: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال 1.27

مثال 1.27: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن اس کی قیمت مختلف وقفوں پر مختلف کلیات دیتے ہیں (شکل 1.25)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

مثال 1.28: بڑا ترین عدد تفاعل
ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو **بڑا ترین عدد صحیح تفاعل**[51] یا **عدد صحیح زمین تفاعل**[52] کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} &\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \\ &\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{aligned}$$

□

مثال 1.29: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو **کم ترین عدد صحیح تفاعل**[53] یا **عدد صحیح چھت تفاعل**[54] کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 1.26)۔ اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا ہے جو فی

greatest integer function[51]
integer floor function[52]
least integer function[53]
integer ceiling function[54]

شکل 1.26: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال 1.28)

شکل 1.27: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال 1.29)

کلومیٹر واجب الادا ہوتا ہے۔اضافی نامکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔یوں 17.2 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہو گا۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} &\lceil 3.2\rceil = 4, \quad &&\lceil 2.9\rceil = 3, \quad &&\lceil 0\rceil = 0, \quad &&\lceil 2\rceil = 2,\\ &\lceil -5\rceil = -5, \quad &&\lceil -5.6\rceil = -5, \quad &&\lceil -0.9\rceil = 0, \quad &&\lceil -7.2\rceil = -7 \end{aligned}$$

□

سوالات

سوال 1.103 تا سوال 1.108 میں تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

سوال 1.103: $f(x) = 1 + x^2$

جواب: دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

سوال 1.104: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

سوال 1.105: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

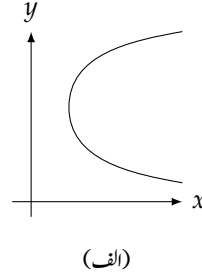
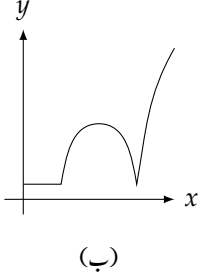
جواب: دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

سوال 1.106: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

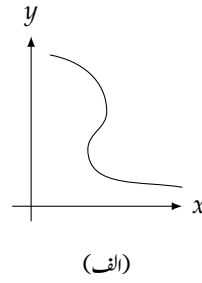
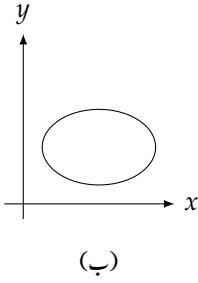
سوال 1.107: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

جواب: دائرہ کار $[-2, 2]$ ، سعت $[0, 2]$

(الف)

(ب)

شکل 1.28: اشکال برائے سوال 1.109

(الف)

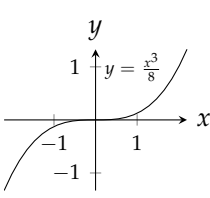
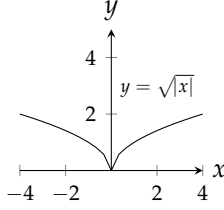
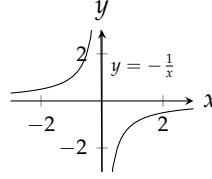
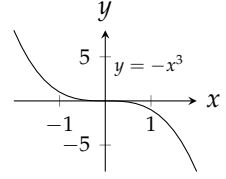
(ب)

شکل 1.29: اشکال برائے سوال 1.110

سوال 1.108: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

سوال 1.109: شکل 1.28 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا x کا تفاعل نہیں ہے۔
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہٰذا x کا تفاعل ہے۔

سوال 1.110: شکل 1.29 میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

شکل 1.33 شکل 1.32 شکل 1.31 شکل 1.30

سوال 1.111: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔
جواب: $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p = 3x$

سوال 1.112: چکور کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں چکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔اب چکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال 1.113: مکعب کی ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتر کی لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔
$x = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

سوال 1.114: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدد کو مبدا سے N تک خط کی ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

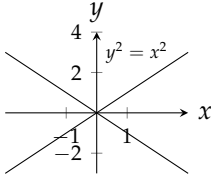
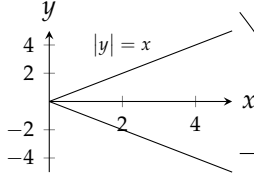
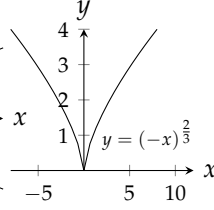
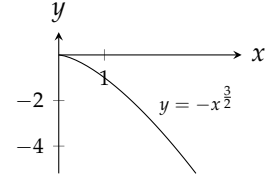
تفاعل اور ترسیم

سوال 1.115 تا سوال 1.126 میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ان میں کونسی تشاکل پائی جاتی ہے (اگر پائی جاتی ہو تب)۔اشکال 1.21 میں دی ترسیم کا سہارا لیا جا سکتا ہے۔

سوال 1.115: $y = -x^3$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.30

سوال 1.116: $y = -\frac{1}{x^2}$

سوال 1.117: $y = -\frac{1}{x}$
جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔شکل 1.31

سوال 1.118: $y = \frac{1}{|x|}$

شکل 1.37 شکل 1.36 شکل 1.35 شکل 1.34

سوال 1.119: $y = \sqrt{|x|}$

جواب: y محدد کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.32

سوال 1.120: $y = \sqrt{-x}$

سوال 1.121: $y = \frac{x^3}{8}$

جواب: مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔ شکل 1.33

سوال 1.122: $y = -4\sqrt{x}$

سوال 1.123: $y = -x^{\frac{3}{2}}$

جواب: کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔ شکل 1.34

سوال 1.124: $y = (-x)^{\frac{3}{2}}$

سوال 1.125: $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$

جواب: y محور کے لحاظ سے تشاکل۔ شکل 1.35

سوال 1.126: $y = -x^{\frac{2}{3}}$

سوال 1.127: (الف) $|y| = x$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔ یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.36

(ب) ہر $x \neq 0$ کے لئے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ شکل 1.37

سوال 1.128: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتے ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال 1.129 تا سوال 1.140 میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ جفت ہیں؟

سوال 1.129: $f(x)=3$
جواب: جفت

سوال 1.130: $f(x)=x^{-5}$

سوال 1.131: $f(x)=x^2+1$
جواب: جفت

سوال 1.132: $f(x)=x^2+x$

سوال 1.133: $g(x)=x^3+x$
جواب: طاق

سوال 1.134: $g(x)=x^4+3x^2-1$

سوال 1.135: $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$
جواب: جفت

سوال 1.136: $g(x)=\frac{x}{x^2-1}$

سوال 1.137: $h(t)=\frac{1}{t-1}$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 1.138: $h(t)=\left|t^3\right|$

سوال 1.139: $h(t)=2t+1$
جواب: نا جفت اور نا طاق

سوال 1.140: $h(t)=2|t|+1$

مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

سوال 1.141 تا سوال 1.142 میں f ، g ، $f+g$ اور $f \cdot g$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.141: $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

جوابات: $D_f : -\infty < x < \infty,, D_g : x \geq 1,, R_f : -\infty < y < \infty,, R_g : y \geq 0,$
$D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_g,, R_{f+g} : y \geq 1,, R_{f\cdot g} : y \geq 0$

سوال 1.142: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

سوال 1.143 تا سوال 1.144 میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.143: $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

جواب: $D_f : -\infty < x < \infty,\ D_g : -\infty < x < \infty,\ R_f : y = 2,\ R_g : y \geq 1,$
$D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2,\ D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty,\ R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$

سوال 1.144: $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تفاعل کے مرکب

سوال 1.145: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $f(g(0))$ ج. $f(g(x))$ ھ. $f(f(-5))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(0))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

جواب:

ا. 2 ج. $x^2 + 2$ ھ. 5 ز. $g + 10$

ب. 22 د. $x^2 + 10x + 22$ و. -2 ح. $x^4 - 6x^2 + 6$

سوال 1.146: اگر $f(x) = x - 1$ اور $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ج. $f(g(x))$ ھ. $f(f(2))$ ز. $f(f(x))$

ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ د. $g(f(x))$ و. $g(g(2))$ ح. $g(g(x))$

سوال 1.147: اگر $u(x)=4x-5$ ، $v(x)=x^2$ اور $f(x)=\frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $u(v(f(x)))$ ج. $v(u(f(x)))$ ھ. $f(u(v(x)))$

ب. $u(f(v(x)))$ د. $v(f(u(x)))$ و. $f(v(u(x)))$

جواب:

ا. $\frac{4}{x^2}-5$ ج. $(\frac{4}{x}-5)^2$ ھ. $\frac{1}{4x^2-5}$

ب. $\frac{4}{x^2}-5$ د. $(\frac{1}{4x-5})^2$ و. $\frac{1}{(4x-5)^2}$

سوال 1.148: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\frac{x}{4}$ اور $h(x)=4x-8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $h(g(f(x)))$ ج. $g(h(f(x)))$ ھ. $f(g(h(x)))$

ب. $h(f(g(x)))$ د. $g(f(h(x)))$ و. $f(h(g(x)))$

سوال 1.149 اور سوال 1.149 میں $f(x)=x-3$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، $h(x)=x^3$ اور $j(x)=2x$ لیں۔سوال کے ہر جزو کو تفاعل کا مرکب لکھیں۔مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

سوال 1.149:

ا. $y=\sqrt{x}-3$ ج. $y=x^{\frac{1}{4}}$ ھ. $y=\sqrt{(x-3)^3}$

ب. $y=2\sqrt{x}$ د. $y=4x$ و. $y=(2x-6)^3$

جواب:

ا. $f(g(x))$ ج. $g(g(x))$ ہ. $g(h(f(x)))$

ب. $j(g(x))$ د. $j(j(x))$ و. $h(j(f(x)))$

سوال 1.150:

ا. $y = 2x - 3$ ج. $y = x^9$ ہ. $y = 2\sqrt{x-3}$

ب. $y = x^{\frac{3}{2}}$ د. $y = x - 6$ و. $y = \sqrt{x^3 - 3}$

سوال 1.151: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

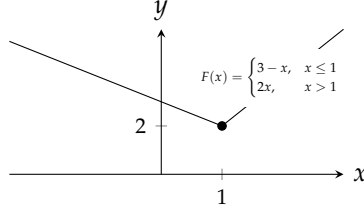
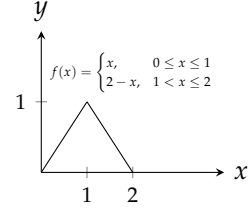
	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

جواب:

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x + 2$	$3x$	$3x + 6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

سوال 1.152: کوئی عدد x لیں۔اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔ نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔ جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال 1.153 تا سوال 1.156 میں تفاعل ترسیم کریں۔

شکل 1.39

شکل 1.38

سوال 1.153:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.38

سوال 1.154:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

سوال 1.155:

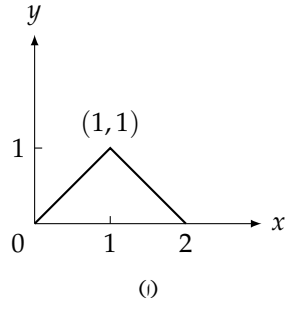
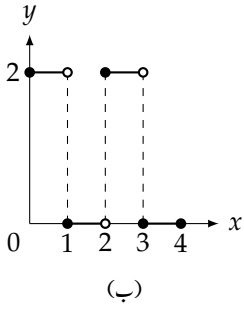
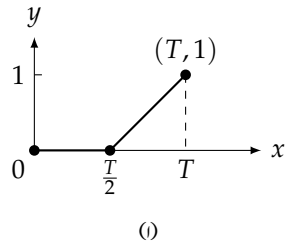
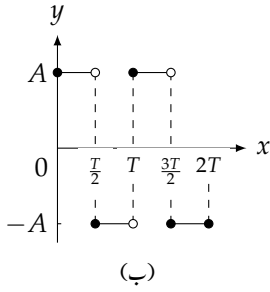
$$F(x) = \begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

جواب: شکل 1.39

سوال 1.156:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$

سوال 1.157: شکل 1.40 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

جواب: (الف) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ (ب) $y = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < 1 \text{ یا } 2 \leq x < 3 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \text{ یا } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$

شکل 1.40: اشکال برائے سوال 1.157

شکل 1.41: اشکال برائے سوال 1.158

سوال 1.158: شکل 1.41 میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھت اور زمین تفاعل

سوال 1.159: x کی کن قیمتوں کے لئے (الف) $\lfloor x \rfloor = 0$ ہو گا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہو گا؟
جواب: الف $0 \le x < 1$ (ب) $-1 < x \le 0$

سوال 1.160: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال 1.161: کیا تمام x کے لئے $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 1.162: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \left|\lfloor x \rfloor\right|, x \ge 0 \\ \left|\lceil x \rceil\right|, \qquad\quad x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال 1.163: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط $\Re$ پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

ا. fg
ب. $\frac{f}{g}$
ج. $\frac{g}{f}$
د. $f^2 = ff$
ھ. $g^2 = gg$
و. $f \circ g$
ز. $g \circ f$
ح. $f \circ f$
ط. $g \circ g$

جواب:

ا. طاق
ب. طاق
ج. طاق
د. جفت
ھ. جفت
و. جفت
ز. جفت
ح. جفت
ط. طاق

سوال 1.164: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال 1.165: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم کو بھی ترسیم کریں۔

سوال 1.166: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ کو بھی ترسیم کریں۔

1.4 ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ایسا کرنے سے نئی مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کا ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتا ہے۔ہم دائرہ اور قطع مکافی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر دیگر منحنیات پر بھی قابل لاگو ہے۔

ترسیم کو کیسے منتقل کیا جاتا ہے

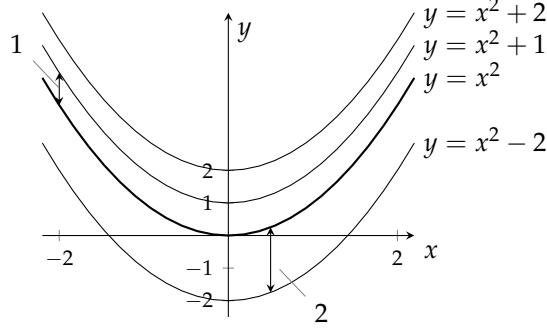
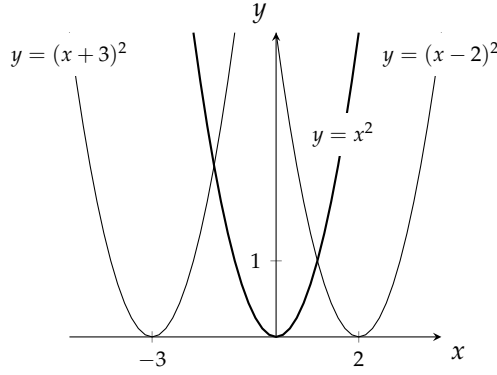
تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔

مثال 1.30: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.31: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل 1.42)۔ □

مثال 1.32: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل 1.43)۔ □

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لئے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال 1.33: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل 1.43)۔ □

شکل 1.42: تفاعل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال 1.30 اور مثال 1.31)۔

شکل 1.43: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔دائیں منتقلی کی خطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال 1.32 اور مثال 1.33)

منتقلی کے کلیات

انتصابی منتقلی $y = f(x) + k$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

افقی منتقلی $y = f(x - h)$

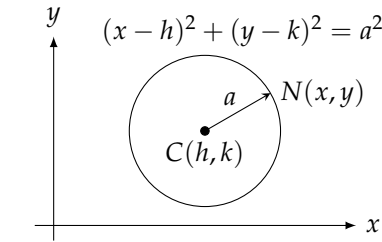
$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال 1.34: $y = (x-2)^2 + 3$ تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □

مساوات دائرہ

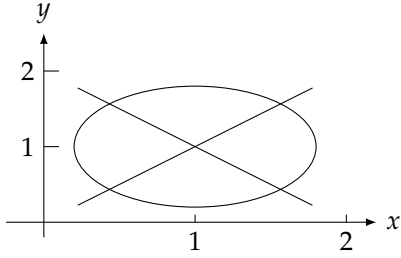
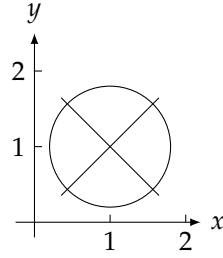
ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو **دائرہ**[55] کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[56] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو **رداس**[57] کہتے ہیں۔ (شکل 1.44)۔ ہم نے مثال 1.11 میں دیکھا کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔ مرکز کو (h, k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h, k) ہو، کی معیاری مساوات

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \tag{1.3}$$

شکل 1.44: xy مستوی میں h, k کے گرد رداس a کا دائرہ

---

circle[55]
center[56]
radius[57]

(ا) چکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے

(ب) غیر چکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے

شکل 1.45: چکور اور غیر چکور نقش

مثال 1.35: دائرہ $x^2+y^2=25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2,3)$ ہو گا۔ □

مثال 1.36: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز $3,4$ پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

□

مثال 1.37: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x-1)^2+(y+5)^2=3$$

حل: اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a=\sqrt{3}$ اور مرکز $(h,k)=(1,-5)$ لکھے جا سکتے ہیں۔ □

کمپیوٹر چکور نقش

چکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انتصابی محدد کی پیمائش ایک جیسی ہو۔ چکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدد کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جا سکتا ہے کہ وہ چکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل 1.45 میں چکور اور غیر چکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائری کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 1.38: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 &= 0 \\ x^2 + 4x + y^2 - 6y &= 3 \\ x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 &= 3 \\ (x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 &= 3 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 16 = 4^2 \end{aligned}$$

یوں رداس $a = 4$ اور مرکز $(h,k) = (-2,3)$ ہیں۔ □

اندرون اور بیرون

دائرہ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔یہ نقطے درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 < a^2$$

اس خطہ کو دائرے کی **اندرون**[58] کہتے ہیں (شکل 1.46)۔

دائرے کی **بیرون**[59] ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ایسے نقطے درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

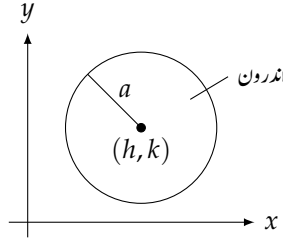
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 > a^2$$

مثال 1.39:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کی اندرون	$x^2 + y^2 < 1$
اکائی دائرہ اور اس کی اندرون	$x^2 + y^2 \leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2 + y^2 > 1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2 + y^2 \geq 1$

□

---

[58] interior
[59] exterior

شکل 1.46: دائرے کی اندرون

قطع مکافی ترسیم

مساوات $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

کی ترسیم کو **قطع مکافی**[60] کہتے ہیں جس کی **محور**[61] تشاکل y محور ہے۔اس قطع مکافی کی **راس**[62] (جہاں قطع مکافی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا پر پائی جاتی ہے۔مثبت a $(a > 0)$ کی صورت میں یہ قطع مکافی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a $a < 0$ کی صورت میں یہ قطع مکافی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکافی اتنا تنگ ہو گا (شکل 1.47)۔

کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y کو آپس میں ادل بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ ملتا ہے۔

$$x = ay^2$$

اس قطع مکافی کی ترسیم کا محور، x محور ہو گا اور اس کی راس مبدا پر پائی جائے گی (شکل 1.48)۔

مثال 1.40: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاعل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاعل نہیں دیتا ہے۔ y کے لئے حل کرتے ہوئے $y = \mp\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لئے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاعل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لئے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکافی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکافی کا نچلا حصہ دیتے ہیں (شکل 1.49)۔

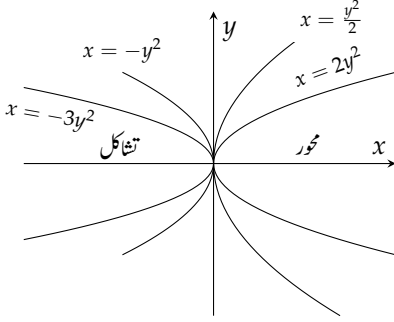
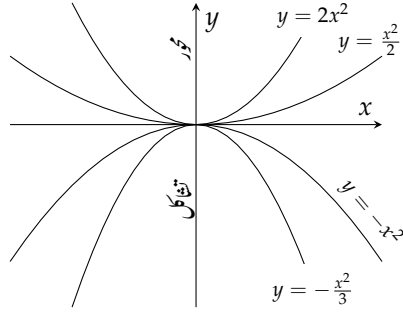
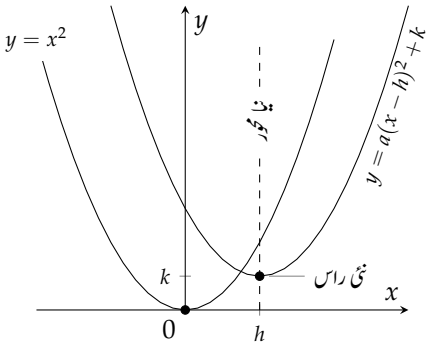
□

---

[60] parabola
[61] axis
[62] vertex

شکل 1.47: قطع مکافی $y = ax^2$

شکل 1.48: قطع مکافی $x = ay^2$

شکل 1.49: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیم مبدا پر ملتے ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتے ہیں (مثال 1.40)

شکل 1.50: قطع مکافی $y = ax^2,\ a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

قطع مکافی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y = a(x-h)^2 \tag{1.4}$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y - k = a(x-h)^2 \tag{1.5}$$

لکھتے ہیں۔دونوں منتقلی سے قطع مکافی کی راس (h, k) کو منتقل ہوتی ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہو گا (شکل 1.50)۔

مساوات 1.5 کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.6}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہو گی جس کو کہیں اور منتقل کیا گیا ہے۔کیوں؟ اس لئے کہ جس طرح مساوات 1.5 سے مساوات 1.6 حاصل کی گئی اسی طرح واپس مساوات 1.6 سے مساوات 1.5 بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورت اور سمت بندی ایک جیسی ہیں۔

قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا۔اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی ترسیم مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکافی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتا ہے۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

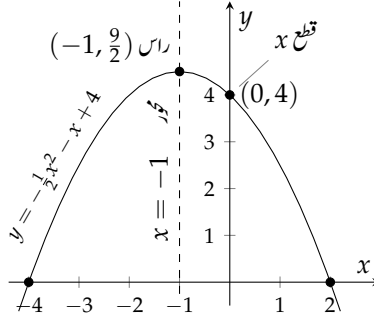
$$x = -\frac{b}{2a} \tag{1.7}$$

اس کی راس اس نقطے پر ہو گی جہاں قطع مکافی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔راس کا x محدد $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا جس کو قطع مکافی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 1.41: ترسیم قطع مکافی

مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔

حل: **پہلا قدم:** مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

شکل 1.51: ترسیم قطع مکافی (مثال 1.41)

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہٰذا قطع مکافی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکافی کی محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔اس کی محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$

یوں راس کا x محدد -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہو گی۔

چوتھا قدم: قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0 \qquad \text{قطع مکافی کی مساوات میں } y = 0 \text{ پر کریں}$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \qquad \text{دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں} \quad (x-2)(x+4) = 0$$

$$x = 2, \quad x = -4$$

پانچواں قدم: $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کر کے منتقلی کے بعد کے xy محور کھینچیں (شکل 1.51)۔ □

سوالات

ترسیم کی منتقلی

شکل 1.52: اشکال برائے سوال 1.167

شکل 1.53: اشکال برائے سوال 1.168

شکل 1.54: اشکال برائے سوال 1.169

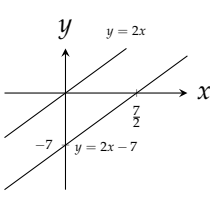
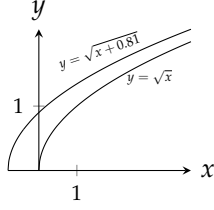
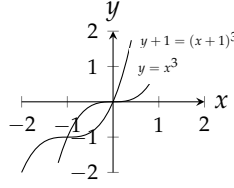
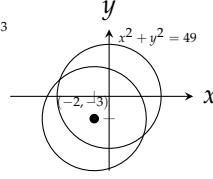
شکل 1.55: اشکال برائے سوال 1.170

سوال 1.167: شکل 1.52 میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

جواب: (الف) $y = -(x+7)^2$ (ب) $y = -(x-4)^2$

سوال 1.168: شکل 1.53 میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائے گئے ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال 1.169: شکل 1.54 میں دکھائے گئے ترسیم کی مساوات درج ذیل میں سے منتخب کریں۔

$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$

شکل 1.59 شکل 1.58 شکل 1.57 شکل 1.56

جواب: (الف) $y = (x - 2)^2 + 2$ (ب) $y = (x + 2)^2 + 2$ (پ) $y = (x + 3)^2 - 2$ (ت) $y = (x - 1)^2 - 4$

سوال 1.170: شکل 1.55 میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال 1.171 تا سوال 1.182 میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔اصل اور منتقل شدہ ترسیم کھینچیں۔

سوال 1.171: $x^2 + y^2 = 49$ کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$ ، شکل 1.56

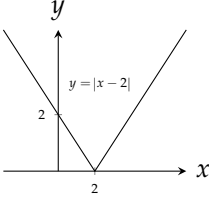
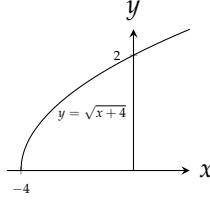
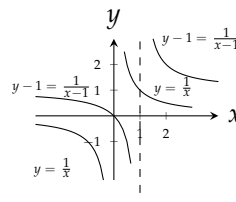
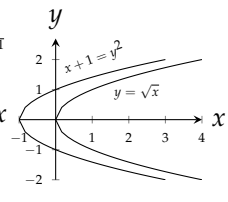
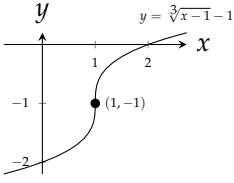
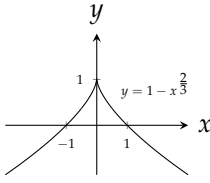
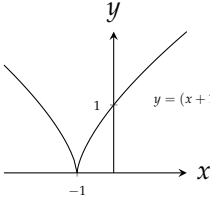
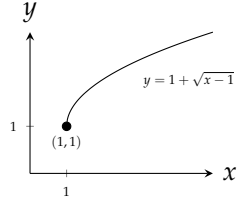
سوال 1.172: $x^2 + y^2 = 25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال 1.173: $y = x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y + 1 = (x + 1)^3$ ، شکل 1.57

سوال 1.174: $y = x^{\frac{2}{3}}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.175: $y = \sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $y = \sqrt{x + 0.81}$ ، شکل 1.58

سوال 1.176: $y = -\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.177: $y = 2x - 7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔
جواب: $y = 2x$ ، شکل 1.59

شکل 1.60

شکل 1.61

شکل 1.62

شکل 1.63

شکل 1.64

شکل 1.65

شکل 1.66

شکل 1.67

سوال 1.178: $y=\frac{1}{2}(x+1)+5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.179: $y=x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔
جواب: $x+1=y^2$، شکل 1.60

سوال 1.180: $x=-3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال 1.181: $y=\frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔
جواب: $y-1=\frac{1}{x-1}$، شکل 1.61

سوال 1.182: $y=\frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال 1.183 تا سوال 1.202 میں تفاعل ترسیم کریں۔ صفحہ 36 پر شکل 1.21 میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال 1.183: $y=\sqrt{x+4}$
جواب: شکل 1.62

سوال 1.184: $y=\sqrt{9-x}$

سوال 1.185: $y = |x-2|$
جواب: شکل 1.63

سوال 1.186: $y = |1-x| - 1$

سوال 1.187: $y = 1 + \sqrt{x-1}$
جواب: شکل 1.64

سوال 1.188: $y = 1 - \sqrt{x}$

سوال 1.189: $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.65

سوال 1.190: $y = (x-8)^{\frac{2}{3}}$

سوال 1.191: $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
جواب: شکل 1.66

سوال 1.192: $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

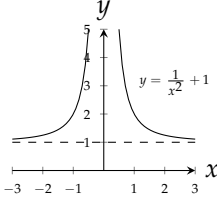
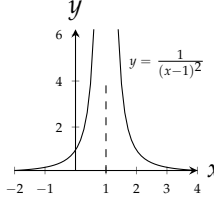
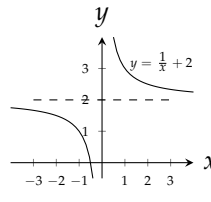
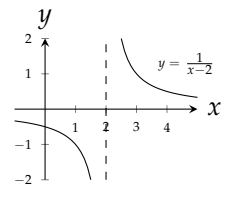
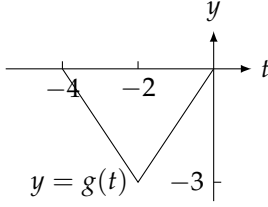
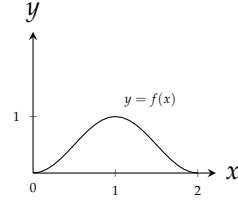
سوال 1.193: $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$
جواب: شکل 1.67

سوال 1.194: $y = (x+2)^{\frac{3}{2}} + 1$

سوال 1.195: $y = \frac{1}{x-2}$
جواب: شکل 1.68

سوال 1.196: $y = \frac{1}{x} - 2$

سوال 1.197: $y = \frac{1}{x} + 2$
جواب: شکل 1.69

سوال 1.198: $y = \frac{1}{x+2}$

شکل 1.71

شکل 1.70

شکل 1.69

شکل 1.68

شکل 1.73: تفاعل برائے سوال 1.204

شکل 1.72: تفاعل برائے سوال 1.203

سوال 1.199: $y=\frac{1}{(x-1)^2}$

جواب: شکل 1.70

سوال 1.200: $y=\frac{1}{x^2}-1$

سوال 1.201: $y=\frac{1}{x^2}+1$

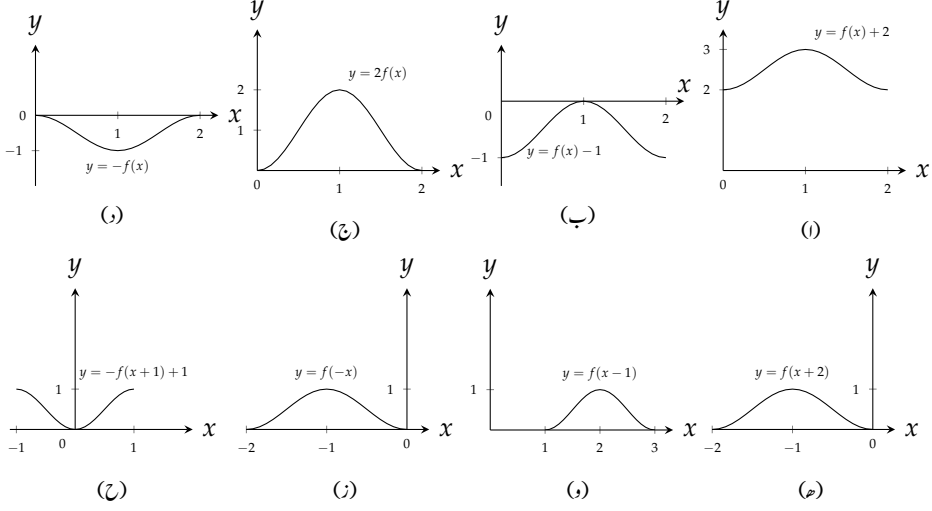
جواب: شکل 1.71

سوال 1.202: $y=\frac{1}{(x+1)^2}$

سوال 1.203: شکل 1.72 میں دکھائے گئے تفاعل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0,2]$ اور سعت $[0,1]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $f(x)+2$ ج. $2f(x)$ ھ. $f(x+2)$ ز. $f(-x)$

ب. $f(x)-1$ د. $-f(x)$ و. $f(x-1)$ ح. $-f(x+1)+1$

جوابات:اشکال کے لئے شکل 1.74 دیکھیں۔جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

شکل 1.74: اشکال برائے سوال 1.203 کے جوابات

ا. $D : [0,2], R : [2,3]$ د. $D : [0,2], R : [-1,0]$ ز. $D : [-2,0], R : [0,1]$

ب. $D : [0,2], R : [-1,0]$ ھ. $D : [-2,0], R : [0,1]$

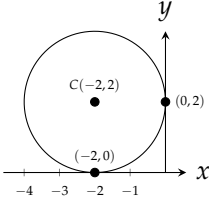
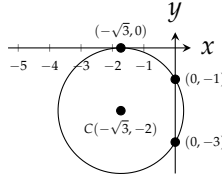
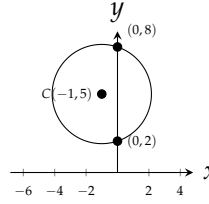
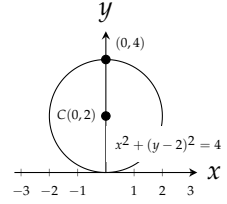
ج. $D : [0,2], R = [0,2]$ و. $D : [1,3], R : [0,1]$ ح. $D : [-1,1], R : [0,1]$

سوال 1.204: شکل 1.73 میں دکھائے گئے تفاعل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4,0]$ اور سعت $[-3,0]$ ہے۔درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(-t)$ ج. $g(t)+3$ ھ. $g(-t+2)$ ز. $g(1-t)$

ب. $-g(t)$ د. $1-g(t)$ و. $g(t-2)$ ح. $-g(t-4)$

دائرے

سوال 1.205 تا سوال 1.210 میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h,k)$ دیا گیا ہے۔دائرے کی مساوات لکھیں۔دائرہ اور دائرے کی مرکز کا xy مستوی میں خاکہ کھینچیں۔دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدد لکھیں۔

شکل 1.78 شکل 1.77 شکل 1.76 شکل 1.75

سوال 1.205: $C(0,2), \quad a=2$
جواب: $x^2+(y-2)^2=4$، شکل 1.75

سوال 1.206: $C(-3,0), \quad a=3$

سوال 1.207: $C(-1,5), \quad a=\sqrt{10}$
جواب: $(x+1)^2+(y-5)^2=10$، شکل 1.76

سوال 1.208: $C(1,1), \quad a=\sqrt{2}$

سوال 1.209: $C(-\sqrt{3},-2), \quad a=2$
جواب: $(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4$، شکل 1.77

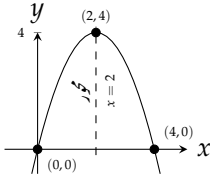
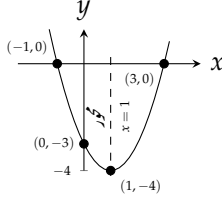
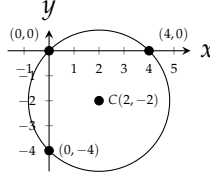
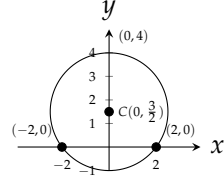
سوال 1.210: $C(3,\frac{1}{2}), \quad a=5$

سوال 1.211 تا سوال 1.216 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔دائرے کا مرکز اور قطع x ، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدد دکھائیں۔

سوال 1.211: $x^2+y^2+4x-4y+4=0$
جواب: $(x+2)^2+(y-2)^2=4$، شکل 1.78

سوال 1.212: $x^2+y^2-8x+4y+16=0$

سوال 1.213: $x^2+y^2-3y-4=0$
$x^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{25}{4}$، شکل 1.79

سوال 1.214: $x^2+y^2-4x-\frac{9}{4}=0$

شکل 1.82 شکل 1.81 شکل 1.80 شکل 1.79

سوال 1.215: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$
$(x-2)^2(y+2)^2 = 8$ ، شکل 1.80

سوال 1.216: $x^2 + y^2 + 2x = 3$

قطع مکافی

سوال 1.217 تا سوال 1.224 میں دیے گئے قطع مکافی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔

سوال 1.217: $y = x^2 - 2x - 3$
$y = x^2 - 2x - 3$ ، شکل 1.81

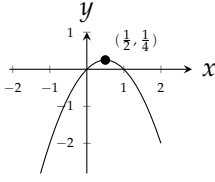
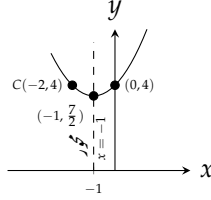
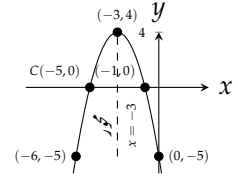
سوال 1.218: $y = x^2 + 4x + 3$

سوال 1.219: $y = -x^2 + 4x$
جواب: $y = -x^2 + 4x$ شکل 1.82

سوال 1.220: $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال 1.221: $y = -x^2 - 6x - 5$
جواب: شکل 1.83

سوال 1.222: $y = 2x^2 - x + 3$

سوال 1.223: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
جواب: شکل 1.84

شکل 1.85 شکل 1.84 شکل 1.83

سوال 1.224: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال 1.225: قطع مکافی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔
جواب: شکل 1.85

سوال 1.226: قطع مکافی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال 1.227 تا سوال 1.234 میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.227: $x^2 + y^2 > 7$
جواب: رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کی بیرون۔دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 1.228: $x^2 + y^2 < 5$

سوال 1.229: $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$
جواب: $(1,0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

سوال 1.230: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

سوال 1.231: $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$
جواب: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ جھلی۔(وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصل 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

سوال 1.232: $x^2+y^2\leq 4, \quad (x+2)^2+y^2\leq 4$

سوال 1.233: $x^2+y^2+6y<0, \quad y>-3$
جواب: خط $y=-3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کی اندرون۔دائرے کا مرکز $(0,-3)$ ہے۔

سوال 1.234: $x^2+y^2-4x+2y>4, \quad x>2$

سوال 1.235: ایسا عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔
جواب: $(x+2)^2+(y-1)^2<6$

سوال 1.236: رداس 4 اور مرکز $(-4,2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لئے عدم مساوات لکھیں۔

سوال 1.237: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1,0)$ سے گزرتا انتصابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔
جواب: $x^2+y^2\leq 2, \quad x\geq 1$

سوال 1.238: رداس 2 اور مرکز $(0,0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرا، جس کا مرکز $(1,3)$ ہو اور جو مبدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقل خطوط

سوال 1.239: خط $y=mx$ جو مبدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ (x_0,y_0) سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو نقطہ-ڈھلوان مساوات کہتے ہیں)۔
جواب: $y=y_0+m(x-x_0)$

سوال 1.240: خط $y=mx$ کو انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تا کہ یہ نقطہ $(0,b)$ سے گزرے۔نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع ہونا

سوال 1.241 تا سوال 1.248 میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال 1.241: $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$
جواب: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

سوال 1.242: $x + y = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

سوال 1.243: $y - x = 1, \quad y = x^2$
جواب: $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), \quad (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

سوال 1.244: $x + y = 0, \quad y = -(x-1)^2$

سوال 1.245: $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$
جواب: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

سوال 1.246: $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x-1)^2$

سوال 1.247: $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$
جواب: $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 1.248: $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

سوال 1.249 تا سوال 1.252 میں مساوات $y = f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y = f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = 2, 3, \cdots, 10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (مثبت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = -2, -3, \cdots, -10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

ج. $y = f(x)$ اور $y = f(ax)$ کو $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ کے لئے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a| < 1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

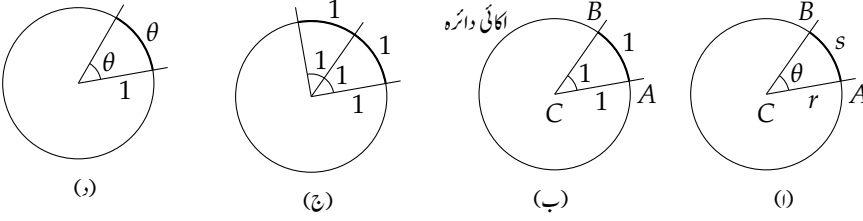
سوال 1.249: $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10]$

سوال 1.250: $f(x) = \frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2]$

سوال 1.251: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2]$

سوال 1.252: $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 10}{x^2+4}, \quad [-1, 4]$

شکل 1.86: ریڈیئن کی تعریف

1.5 تکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈیئن، تکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی تکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

ریڈیئن

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات کی صورت میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویہ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں $180°$ کو π ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن کی استعمال سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

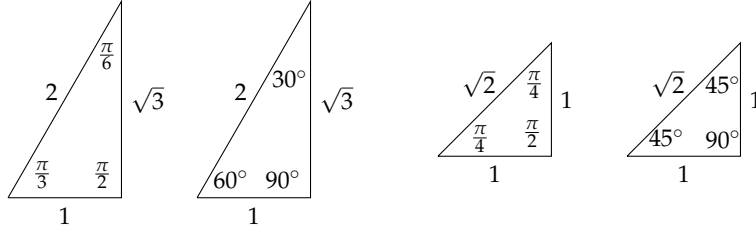
شکل 1.86-ا میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 ہو تب ہم اس دائرے کو **اکائی دائرہ**[63] کہتے ہیں۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کا قوس جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈیئن زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈیئن کی تعریف ہے)۔ شکل 1.86-ب میں ایک ریڈیئن کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل 1.86-ج میں اکائی لمبائی کے دو قوس ساتھ ساتھ رکھے گئے ہیں جو ایک ایک ریڈیئن کا وسطی زاویہ بناتے ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈیئن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈیئن میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہو گی۔ شکل 1.86-د میں اس حقیقت کو دکھایا گیا ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈیئن ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر $360°$ ہے لہٰذا درج ذیل تعلق لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boxed{\pi \text{ ریڈیئن} = 180°}$$

مثال 1.42: **درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی**
$45°$ کو ریڈیئن میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجہ میں لکھیں۔

---

[63] unit circle

شکل 1.87: اشکال برائے مثال 1.42

حل: شکل 1.87 دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

□

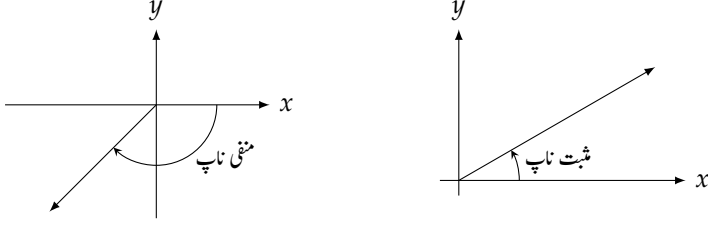
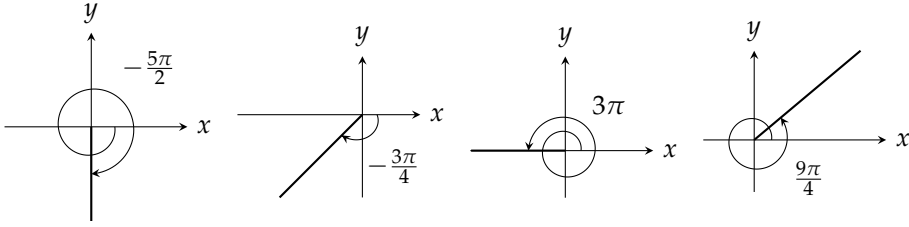
ریڈیئن اور درجہ

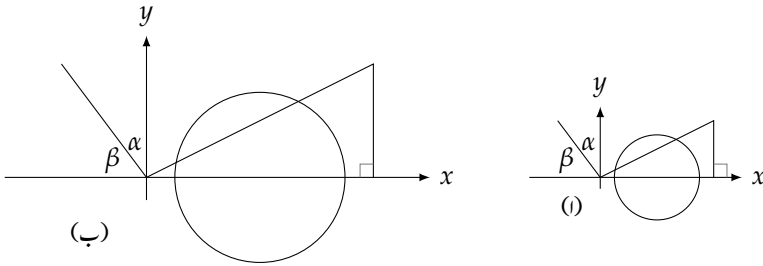
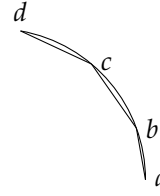
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$

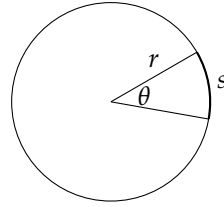
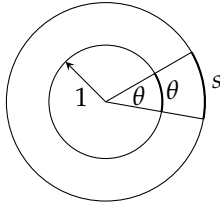
دھیان رہے کہ زاویے کی پیمائش درجات میں ہونے کو $\circ$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔یوں $\theta = 45^\circ$ سے مراد پینتالیس درجہ ہو گا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

xy مستوی میں شعاع کا راس مبدا پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت x محور پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو **معیاری مقام**[64] کہتے ہیں۔مثبت x محور سے گھڑی کی سوئی کے مخالف رخ زاویہ کی ناپ مثبت اور گھڑی کی سوئی کی رخ ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل 1.88)۔یوں مثبت x محور کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی x محور کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

گھڑی مخالف چکر بیان کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی 360° سے زیادہ ہو سکتی ہے۔اسی طرح گھڑی کی رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ کچھ بھی ممکن ہے (شکل 1.89)۔

[64] standard position

شکل 1.88: زاویے کی ناپ

شکل 1.89: مثبت اور منفی ریڈیئن

شکل 1.90-ا میں چند اشکال کو لچکدار xy مستوی پر دکھایا گیا ہے۔اس xy مستوی کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل 1.90-ب حاصل ہوتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔یوں اگر بائیں شکل کے تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گی۔دائیں شکل میں تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہٰذا اس کا وتر $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2}=k\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترچھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔چونکہ ہر ترچھے خط کو کسی تکون کا وتر تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترچھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی۔کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہو گی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔

شکل 1.90: شکل بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل 1.91: قوس کی لمبائی

شکل 1.92: محیط دائرہ

شکل 1.93: قوس، رداس اور زاویے کا تعلق۔

شکل 1.91 میں قوس کی لمبائی جاننے کی خطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی لہٰذا ان کی مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہو گی۔(ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل 1.93-ا میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل 1.93-ب؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا)۔ (جیسا شکل 1.93-ب میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔شکل 1.93-ب میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک جیسا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta}=\frac{r}{1}$ جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

قوس، رداس اور زاویے کا تعلق

$$s = r\theta$$

زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا نا کہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔

$\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$، سائن $\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$ کوسیکنٹ

$\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$، کوسائن $\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$ سیکنٹ

$\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$، ٹینجنٹ $\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$ کوٹینجنٹ

وتر، عمود، قاعدہ، θ

شکل 1.94: قائمہ مثلث اور تکونیاتی تفاعل

شکل 1.95: تکونیاتی تفاعل

مثال 1.43: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کا قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتا ہے۔ (ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتا ہو۔

حل:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(الف)} \qquad s = r\theta = 8\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6\pi \quad \text{(ب)}$$

□

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل

آپ زاویہ حادہ کے تکونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل 1.94)۔ ہم انہیں تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرجہ اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب ان تکونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x, y)$ کے محدد کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتا ہوا شعاع دائرے کو $N(x, y)$ پر قطع کرتا ہے۔

شکل 1.95-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

چھ تکونیاتی تفاعل

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \text{سائن} \qquad \csc\theta = \frac{r}{y} \quad \text{کوسیکنٹ}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{کوسائن} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \text{سیکنٹ}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{ٹینجنٹ} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \text{کوٹینجنٹ}$$

آپ شکل 1.95-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادہ کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ تکونی تعریف ایک جیسے ہیں۔

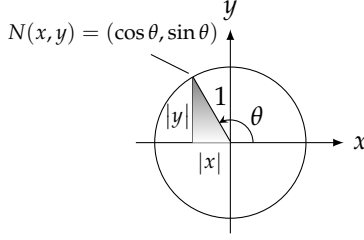
جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x = 0$ کی صورت میں $\tan\theta$ اور $\sec\theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔یوں یہ $\theta = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ کے لئے غیر معین ہیں۔اسی طرح $y = 0$ یعنی $\theta = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \cdots$ کے لئے $\cot\theta$ اور $\csc\theta$ غیر معین ہیں۔

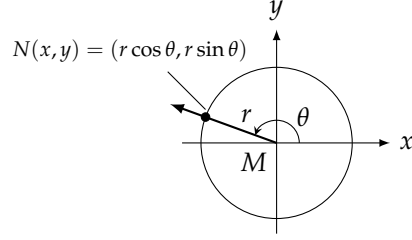
اسی طرح درج ذیل تعریف بھی لکھے جا سکتے ہیں۔

تکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

مستوی میں نقطہ $N(x, y)$ کو مبدا سے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے (شکل 1.96)۔چونکہ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin\theta = \frac{y}{r}$ ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

شکل 1.96: مستوی میں کارتیسی محدد کا r اور θ میں اظہار۔

شکل 1.97: زاویہ θ کے لئے زاویہ حادہ تکون

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

شکل 1.95 کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos\theta = x, \quad \sin\theta = y$$

یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x,y)$ کی x اور y محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔نقطہ N سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون سے بھی انہیں حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 1.97)۔ہم x اور y کی قیمتیں تکون کی اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں تکون پایا جاتا ہو۔

مثال 1.44: $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

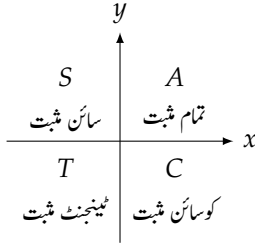
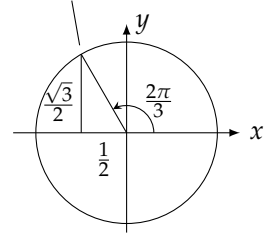
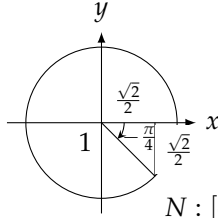
حل: **پہلا قدم** زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.98)۔

دوسرا قدم جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

$$\cos\frac{2\pi}{3} = N \text{ کا محدد } x = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = N \text{ کا محدد } y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تکونیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لئے شکل 1.99 میں دکھایا گیا $CAST$ کا قاعدہ یاد رکھیں۔ □

مثال 1.45: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل 1.100)۔

شکل 1.99: قاعدہ $CAST$

شکل 1.98: تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں (مثال 1.44)

شکل 1.100: شکل برائے مثال 1.45

دوسرا قدم: نقطہ N کے محدد تلاش کریں۔

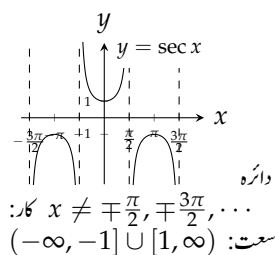
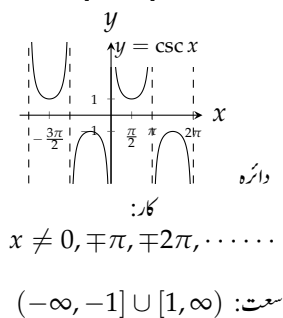
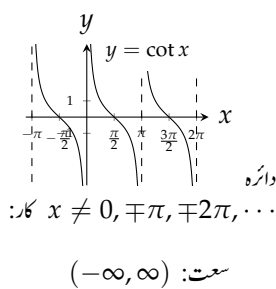
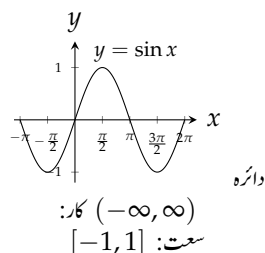
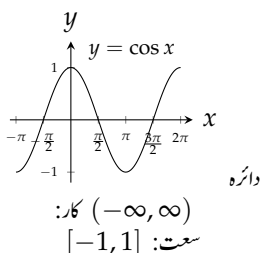
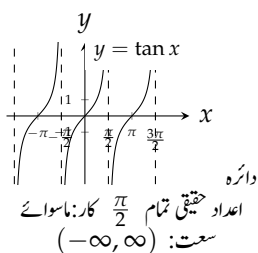
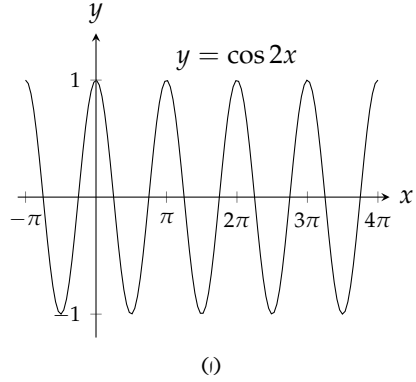
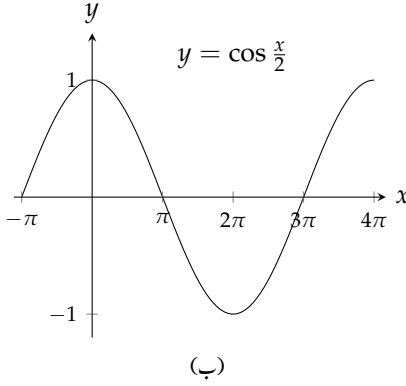
$$\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = x \text{ محدد } N \text{ کا} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(-\tfrac{\pi}{4}) = y \text{ محدد } N \text{ کا} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

ترسیم

تکونیاتی تفاعل کو کارتیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 1.101)۔

درجہ	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
ریڈیئن	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0

شکل 1.101: چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کے ترسیم۔ان تفاعل کی دوریت صاف ظاہر ہے۔

شکل 1.102: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos \frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x + 2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔یوں ان دونوں زاویوں کے تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔مثال کے طور پر $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ہو گا۔ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہراتی ہو **دوری**[65] کہلاتا ہے۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لئے تمام x پر $f(x + p) = f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ **دوری** کہلاتا ہے۔ p کی ایسی کم سے کم قیمت کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[66] کہتے ہیں۔

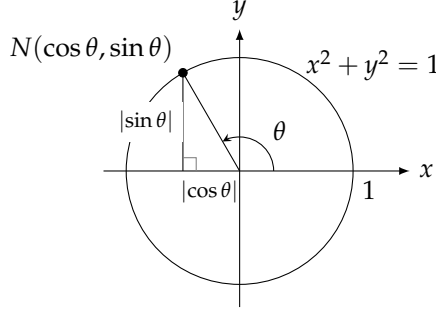
□

ہم شکل 1.101 سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ تفاعل کا دوری عرصہ $p = \pi$ ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل 1.102 میں $y = \cos 2x$ اور $y = \cos \frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔تکونیاتی تفاعل میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی بنا ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔اسی طرح خرد امواج تندور میں برقناطیسی میدان جو خوراک کو گرم کرتی ہیں دوری ہوتی ہیں۔موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً $90\,000$ تا $100\,000$ سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

---

[65] periodic
[66] period

شکل 1.103: عمومی زاویہ θ کے لئے حوالہ تکون۔

اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکونیاتی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلیٰ احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکیں گے۔

جفت بالمقابل طاق

شکل 1.101 سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سیکنٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں:

جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

مماثل

اکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos\theta, \sin\theta)$ سے x محور پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے (شکل 1.103)۔

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \tag{1.8}$$

یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکونیاتی مماثل ہے۔

مساوات 1.8 کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2\theta$ اور ایک بار $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B \\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B \end{aligned} \tag{1.9}$$ مجموعہ زاویہ کلیات

اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات 1.8 اور مساوات 1.9 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔مساوات 1.9 A اور B کی ہر قیمت کے لئے درست ہیں۔ $\cos(A-B)$ اور $\sin(A-B)$ کے لئے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال 1.287 اور سوال 1.288)۔

مجموعہ زاویہ کلیات میں A اور B دونوں کے لئے θ پر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{1.10}$$ دوہرا زاویہ کلیات

درج ذیل کلیات

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

کو آپس میں جمع کرنے سے $2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$ اور تفریق کرنے سے $2\sin^2\theta = 1-\cos 2\theta$ حاصل ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{1.11}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{1.12}$$

درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے **نصف زاویہ کلیات**[67] حاصل ہوتے ہیں۔

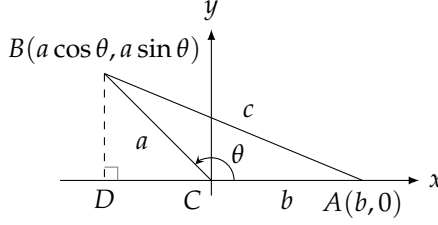
قاعدہ کوسائن

اگر تکون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہو گا (شکل 1.104)۔

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{1.13}$$

اس مساوات کو **قاعدہ کوسائن**[68] کہتے ہیں۔

اس کلیہ کو حاصل کرنے کی خاطر تکون کو کارتیسی محدد پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع x محور پر ہو (شکل 1.104)۔ راس B سے x محور پر قائمہ گرائیں۔یوں حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک

[67] half angle formulae
[68] law of cosines

شکل 1.104: قاعدہ کوسائن

فاصلہ $b - a\cos\theta$ لکھا جائے گا (مثلاً $b = 3$ اور $a\cos\theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہو گا اور $a\cos\theta = 1$ کی صورت میں $AD = 3 - 1 = 2$ ہو گا)۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

قاعدہ کوسائن مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا قاعدہ کوسائن سے $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

سوالات

ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس

سوال 1.253: رداس $10\,\text{cm}$ کے دائرے پر کتنی لمبائی کا قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) 110° کا وسطی زاویہ بنائے گا؟
جواب: (الف) 8π سنٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

سوال 1.254: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کا قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتا ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 1.255: **کیلکولیٹر** 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ $30\,\text{cm}$ قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی $1\,\text{mm}$ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: $20.9\,\text{cm}$

سوال 1.256: **کیلکولیٹر** ایک میٹر قطر کے پہیا کو ہموار زمین پر $30\,\text{cm}$ چلایا جاتا ہے۔پہیا کتنا زاویہ گھوما ہو گا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دسواں حصہ اور (ب) درجہ کے ایک حصہ درستگی تک تلاش کریں۔

تکونیاتی تفاعل کی قدرپیمائی

سوال 1.257: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

سوال 1.258: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں ہے۔

سوال 1.259 تا سوال 1.264 میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

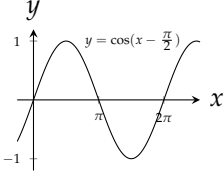
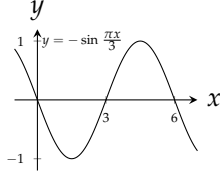
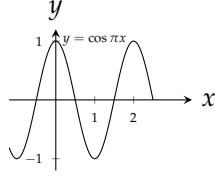
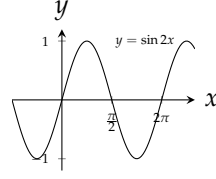
سوال 1.259: دائرہ کار:$[\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\quad \sin x = \frac{3}{5},$
جواب: $\cos x = -\frac{4}{5}, \quad \tan x = -\frac{3}{4}$

سوال 1.260: دائرہ کار:$[0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \tan x = 2,$

سوال 1.261: دائرہ کار:$[-\frac{\pi}{2}, 0]$ $\quad \cos x = \frac{1}{3},$
جواب: $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \tan x = -\sqrt{8}$

سوال 1.262: دائرہ کار:$[\frac{\pi}{2}, \pi]$ $\quad \cos x = -\frac{5}{13},$

سوال 1.263: دائرہ کار:$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\quad \tan x = \frac{1}{2},$
جواب: $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 1.264: دائرہ کار:$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ $\quad \sin x = -\frac{1}{2},$

شکل 1.108 شکل 1.107 شکل 1.106 شکل 1.105

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم

سوال 1.265 تا سوال 1.274 میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال 1.265: $\sin 2x$
جواب: دوری عرصہ π ہے۔شکل 1.105

سوال 1.266: $\sin \frac{x}{2}$

سوال 1.267: $\cos \pi x$
جواب: دائرہ کار: 2 ، شکل 1.106

سوال 1.268: $\cos \frac{\pi x}{2}$

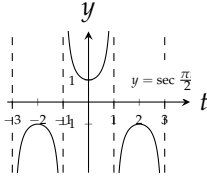
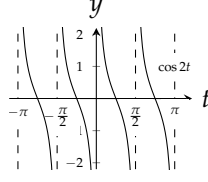
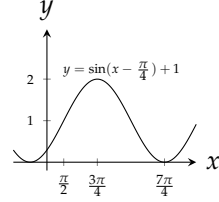
سوال 1.269: $-\sin \frac{\pi x}{3}$
جواب: دائرہ کار: 6 ، شکل 1.107

سوال 1.270: $-\cos 2\pi x$

سوال 1.271: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.108

سوال 1.272: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

سوال 1.273: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$
جواب: دائرہ کار: 2π ، شکل 1.109

سوال 1.274: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

شکل 1.111

شکل 1.110

شکل 1.109

سوال 1.275 تا سوال 1.278 میں دیے تفاعل کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہو۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ اور تشاکل تلاش کریں۔

سوال 1.275: $s = \cot 2t$
جواب: دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ، شکل 1.110

سوال 1.276: $s = -\tan \pi t$

سوال 1.277: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$
جواب: دائرہ کار: 4 ، شکل 1.111

سوال 1.278: $s = \csc \frac{t}{2}$

سوال 1.279: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے
(الف) $y = \cos x$ اور $y = \sec x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔
(ب) $-pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \sin x$ اور $y = \csc x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال 1.280: $-7 \leq x7$ کے لئے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال 1.281: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال 1.282: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی تکونیاتی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 1.283 تا سوال 1.288 میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

سوال 1.283: $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$

سوال 1.284: $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$

سوال 1.285: $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

سوال 1.286: $\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos x$

سوال 1.287: $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

سوال 1.288: $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

سوال 1.289: اگر سوال 1.287 میں $A = B$ پر کیا جائے تب کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

سوال 1.290: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال

سوال 1.291 تا سوال 1.294 میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 1.291: $\cos(\pi + x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 1.292: $\sin(2\pi - x)$

سوال 1.293: $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$
جواب: $-\cos x$

سوال 1.294: $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

سوال 1.295: $\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin\frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

سوال 1.296: $\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos\frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 1.297: $\cos\frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔
جواب: $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

سوال 1.298: $\sin\frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال

سوال 1.299 تا سوال 1.302 میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 1.299: $\cos^2\frac{\pi}{8}$
جواب: $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

سوال 1.300: $\cos^2\frac{\pi}{12}$

سوال 1.301: $\sin^2\frac{\pi}{12}$
جواب: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

سوال 1.302: $\sin^2\frac{\pi}{8}$

نظریہ اور مثالیں

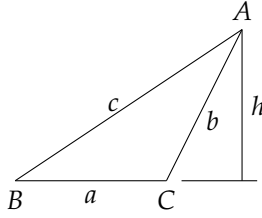
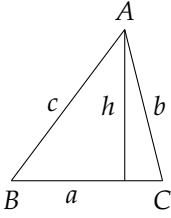
سوال 1.303: ٹینجنٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ہے۔اس کلیہ کو اخذ کریں۔

سوال 1.304: $\tan(A-B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 1.305: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A-B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال 1.306: قاعدہ کوسائن کو شکل 1.112 کی طرز کے شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A+B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال 1.307: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔
جواب: $c=\sqrt{7}\approx 2.646$

شکل 1.112: شکل برائے سوال 1.305

شکل 1.113: اشکال برائے سوال 1.309

سوال 1.308: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 40°$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

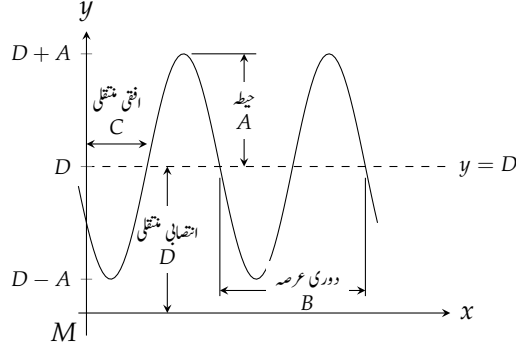
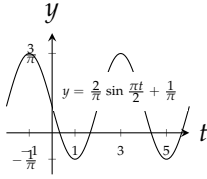
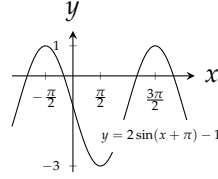
سوال 1.309: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال 1.113 اور مماثل $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

سوال 1.310: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a = 2$ ، $b = 3$ اور زاویہ $C = 60°$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

سوال 1.311: کیلکولیٹر ایک مثلث کا ضلع $c = 2$ اور زاویے $A = \frac{\pi}{4}$ اور $B = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a اور تلاش کریں۔
جواب: $a = 1.464$

سوال 1.312: تخمین $\sin x \approx x$ x کی چھوٹی قیمتوں کے لئے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ حصہ 4.7 میں بتلائی جائے گی۔ $|x| < 0.1$ کے لئے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔
(الف) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(ب) کمپیوٹر پر $y = x$ اور $y = \sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لئے ترسیم کریں جہاں x کی پیمائش درجات میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟
(پ) کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے $x = 0.1$ کے لئے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کا کیلکولیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلکولیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔

شکل 1.114: عمومی سائن تفاعل

شکل 1.115

شکل 1.116

عمومی سائن ترسیم

شکل 1.114 میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ حیطہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔سوال 1.313 تا سوال 1.316 میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{B}(x - C)\right) + D$$

سوال 1.313: $y = 2\sin(x + \pi) - 1$

جواب: $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛ شکل 1.115

سوال 1.314: $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال 1.315: $y = -\frac{2}{\pi}\sin(-\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{\pi}$

جواب: $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛ شکل 1.116

سوال 1.316: $y = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال 1.317 تا سوال 1.317 میں عمومی سائن تفاعل $f(x) = A \sin(\frac{2\pi}{B}(x - C)) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لئے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال 1.317: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال 1.318: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لئے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہو گی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 1.319: انتصابی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لئے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لئے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال 1.320: حیطہ $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لئے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لئے ترسیم کیسی ہو گی؟

باب 2

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکونیات سے علیحدہ کرتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں با ضابطہ وضع کرتے ہیں۔ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا ہوتی ہے۔دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی بنا تفاعل کی تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔تفاعل کی تفرق، جس پر باب 3 میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی کو تعین کرتا ہے۔

2.1 تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال 2.1: ایک پتھر $100\,\mathrm{m}$ اونچائی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلی دو سیکنڈ میں (ب) پہلی سے دوسری سیکنڈ کے دارانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلی t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔یوں پہلی t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لئے ہم فاصلہ میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

(الف) پہلی دو سیکنڈ میں اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{4.9(2)^2-4.9(0)^2}{2-0}=9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔

(ب) پہلی اور دوسری سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{4.9(2)^2-4.9(1)^2}{2-1}=14.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ □

مثال 2.2: پتھر کی رفتار $t=1\,\mathrm{s}$ اور $t=2\,\mathrm{s}$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم وقتی وقفہ $[t_0,t_0+h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{4.9(t_0+h)^2-4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا درج بالا کلیہ میں $h=0$ پر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جا سکتی ہے۔البتہ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لئے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔یوں $t_0=1$ اور $t_0=2$ کے لئے $h=0.1,0.01,\cdots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

h	$t_0=1$ پر اوسط رفتار	$t_0=2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

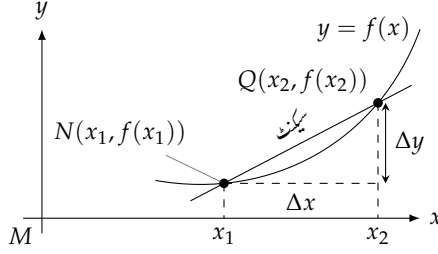
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0=1$ کے لئے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے قریب تر ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0=1$ پر پتھر کی رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔اسی طرح $t_0=2$ پر پتھر کی رفتار $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ نظر آئے گی۔ □

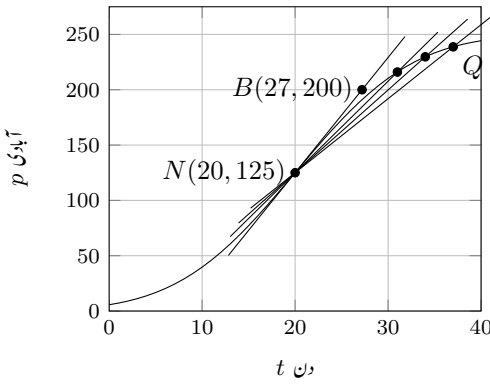
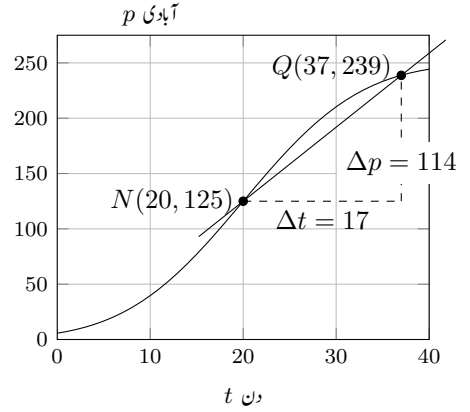
اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1,x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x=x_2-x_1=h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1,x_2]$ پر $y=f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

□

شکل 2.1: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

شکل 2.3: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی

شکل 2.2: مکھی کی نمو آبادی

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرتے ہوئے خط کی ڈھلوان کے برابر ہے (شکل 2.1)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گرتے ہوئے خط کو ترسیم کا **سیکنٹ خط**[1] کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کے برابر ہے۔

مثال 2.3: نمو آبادی کی اوسط شرح
ایک تجربہ میں قابو ماحول میں مکھیوں کی تعداد کو 40 دن کے عرصہ پر روزانہ گنا گیا۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل 2.2)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

حل: 20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $37 - 20 = 17$ دنوں میں آبادی میں

---

[1] secant

$239 - 125 = 114$ تبدیل رونما ہوئی۔یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{(مکھیاں فی دن)}$$

جو شکل 2.2 میں سیکنٹ NQ کی ڈھلوان ہے۔ □

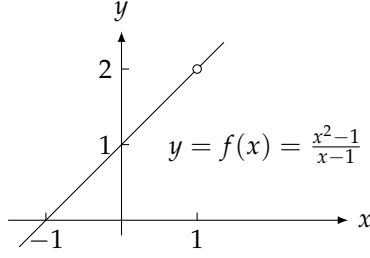
درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی ہے۔اس کے لئے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال 2.4: مثال 2.3 میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟
حل: ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل 2.3)۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
$(37, 239)$	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
$(35, 230)$	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
$(32, 216)$	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
$(27, 200)$	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q کو بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی کی الٹ رخ گھومتا ہے۔ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔اس خط کو دیے گئے منحنی کا **مماس**[2] کہتے ہیں۔اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 مکھیاں فی دن ہو گی۔ □

لمحہ $t = 1$ اور لمحہ $t = 2$ پر گرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو **لمحاتی شرح تبدیلی**[3] کہتے ہیں۔جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لمحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔لمحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم **حد**[4] کہتے ہیں۔

---
[2] tangent
[3] instantaneous rates of change
[4] limits

شکل 2.4: شکل برائے مثال 2.5

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

تحدیدی قیمت کی تعریف سے پہلی ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 2.5: تفاعل $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟

حل: چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا ماسوائے $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لئے f تعین کرتا ہے۔کسی بھی $x \neq 1$ کے لئے ہم اس کلیہ کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad (x \neq 1)$$

یوں خط $y = x + 1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1,2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔اس نقطہ کو شکل 2.4 میں بطور سوراخ دکھایا گیا ہے۔اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت 2 کے جتنی قریب چاہیں کر سکتے ہیں۔

$x(\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1,\ (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 تک پہنچنے سے $f(x)$ کی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا x ایک تک پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا حد 2 تک پہنچتی ہے، جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

x کی قیمت x_0 تک پہنچنے کو $x \to x_0$ لکھا جاتا ہے۔ □

تعریف: **حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لئے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 تک پہنچنے سے f کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

□

اس تعریف کو غیر رسمی اس لئے کہا گیا ہے کہ "کافی قریب" کی طرز کے فقرے بہت ٹھیک نہیں ہیں۔ خراد پر کام کرنے والے ماہر کے لئے کافی قریب سے مراد $10\,\mu\mathrm{m}$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لئے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف حصہ 2.3 میں پیش کریں گے۔

مثال 2.6: $x \to x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں ہے۔ شکل 2.5 میں f کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کا $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کا $x \to 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں یعنی $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$۔ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہونے کی یہ مساوات مخصوص صورت ہے جس پر حصہ 2.5 میں دوبارہ بات کی جائے گی۔ □

بعض اوقات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہو۔ (اس پر مزید بات حصہ 2.2 اور حصہ 2.5 میں کی جائے گی۔)

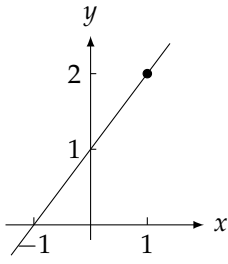
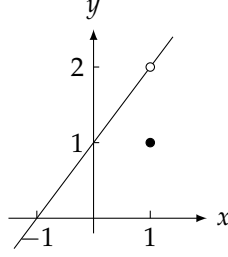
مثال 2.7:

ا. $\lim_{x \to 2} (4) = 4$

ب. $\lim_{x \to 13} (4) = 4$

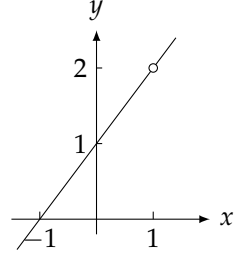
ج. $\lim_{x \to 3} x = 3$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

(ا)

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(ب)

$h(x) = x + 1$

(ج)

شکل 2.5: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$

د. $\lim_{x\to 2}(5x-3) = 10 - 3 = 7$

ھ. $\lim_{x\to -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

□

مثال 2.8:

ا. اگر f مماثلی تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ا)۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

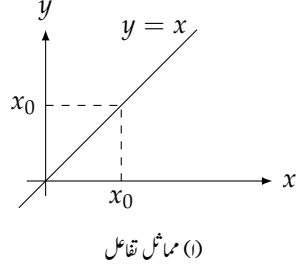
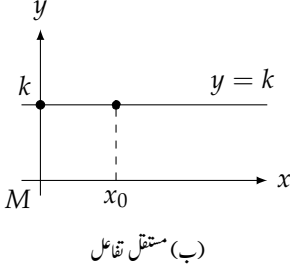
ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کے کسی بھی قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 2.6-ب)۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k$$

□

مثال 2.9: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کا حد نہ پایا جاتا ہو۔
درج ذیل تفاعل کا $x \to 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

(ا) مماثل تفاعل

(ب) مستقل تفاعل

شکل 2.6: اشکال برائے مثال 2.7

ا. $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ب. $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ج. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

حل:

ا. اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ کا $x \to 0$ پر کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے چونکہ اس نقطہ پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لئے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لئے U کی قیمت 1 ہے۔یوں 0 کے قریب پہنچنے سے U کی منفرد قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 2.7-ا)۔

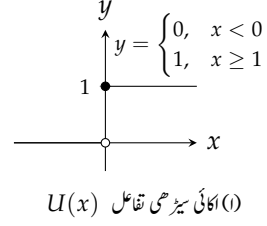
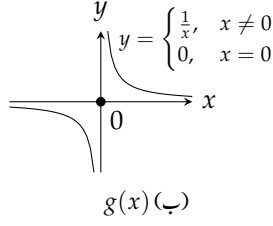
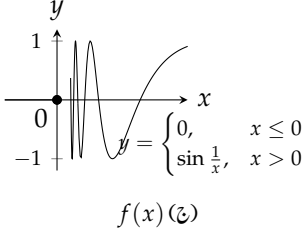
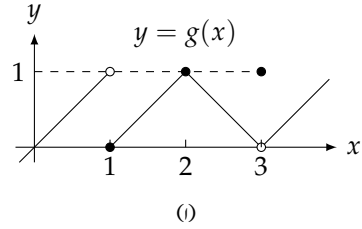
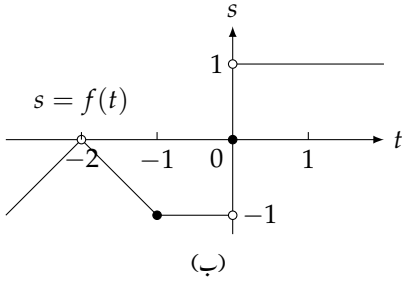
ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ب)۔

ج. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی ہے (شکل 2.7-ج)۔

□

2.1 سوالات

ترسیم سے حد

سوال 2.1: شکل 2.8-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

شکل 2.7: اشکال برائے مثال 2.9

شکل 2.8: اشکال برائے سوال 2.1 اور سوال 2.2

ا. $\lim_{x\to1} g(x)$ ب. $\lim_{x\to2} g(x)$ ج. $\lim_{x\to3} g(x)$

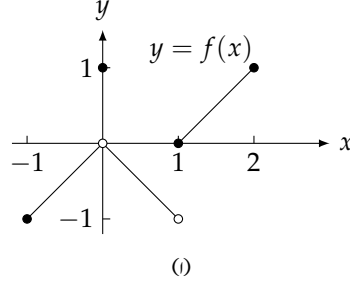
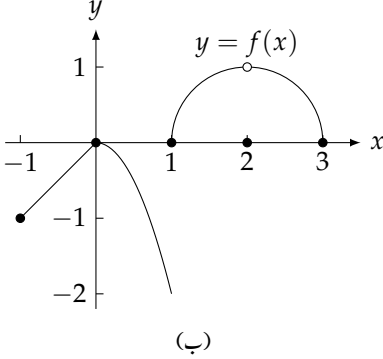
جواب: (ا) موجود نہیں ہے۔ جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔ یوں x کی قیمت 1 کے نزدیک تر ہونے سے L کی یکتا قیمت کے نزدیک تر $g(x)$ نہیں پہنچتا ہے۔ (ب) 1 (ج) 0

سوال 2.2: شکل 2.8-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نا ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{t\to-2} f(t)$ ب. $\lim_{t\to-1} f(t)$ ج. $\lim_{t\to0} f(t)$

سوال 2.3: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 2.3-ا) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

(ب)

(ا)

شکل 2.9: اشکال برائے سوال 2.3 اور سوال 2.4

ا. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے

ب. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ہ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

و. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے

جواب: (ا) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ہ) غلط (و) درست

سوال 2.4: تفاعل $y = f(x)$ (شکل 2.3-ب) کے لئے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود نہیں ہے

ب. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

ج. $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے

د. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1, 1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

ہ. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(1, 3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال 2.5 اور سوال 2.6 میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال 2.5: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

جواب: جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔جب x دائیں

سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے ویسے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 کے نزدیک تر ہوتی ہے۔یوں x کا 1 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتی ہے۔

سوال 2.6: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

سوال 2.7: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی وجودیت کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 2.8: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1,1]$ میں تمام x کے لئے معین ہے۔کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 2.9: اگر $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال 2.10: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ لازماً موجود ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ لازماً ہو گا؟ کیا ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.11: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \cdots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔اس جدول سے $\lim_{x\to -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \cdots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \to -3$ کے لئے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

جواب: (ا)

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(ج) $\lim_{x\to -3} f(x) = -6$

سوال 2.12: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ پر تفاعل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ $x \to \sqrt{2}$ کے لئے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کی جواب کا تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 2.13: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \cdots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x\to -6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \cdots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \to -6$ کے لئے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-5.9	-5.99	-5.999	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984	-0.124998	-0.124999	-0.124999

(ج) $\lim_{x\to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125$

سوال 2.14: $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to 3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \to 3$ کے لئے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to 3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 2.15: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to -1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -1$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا)

x	-1.1	-1.01	-1.001	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001

x	-0.9	-0.99	-0.999	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999

(ج) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$

سوال 2.16: $F(x) = \frac{x^2+3x+2}{2-|x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = -2$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to -2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -2$ کے لئے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 2.17: $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب:(ا)

θ	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999	0.999999	0.999999	0.999999

(ج) $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

سوال 2.18: $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $t_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{t\to 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال 2.19: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 1$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔کیا x کی قیمت $x \to 1$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

جواب: (ا)

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695	0.367861	0.367877	0.367879

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063	0.367897	0.367881	0.367878

(ج) $\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0.36788$

سوال 2.20: $f(x) = \frac{3^x-1}{x}$ لیں۔

ا. x کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لئے بنائیں جو $x_0 = 0$ تک نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت $x \to 0$ تک پہنچنے سے f کا تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہے؟ اگر تحدیدی نقطہ پایا جاتا ہو، اس کا تلاش کریں۔ اگر نہیں پایا جاتا ہو تب وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

متغیر کی تحدیدی قیمت پر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال 2.21 تا سوال 2.28 میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال 2.21: $\lim_{x\to 2} 2x$
جواب: 4

سوال 2.22: $\lim_{x\to 0} 2x$

سوال 2.23: $\lim_{x\to \frac{1}{3}} (3x-1)$
جواب: 0

سوال 2.24: $\lim_{x\to 1} -\frac{1}{3x-1}$

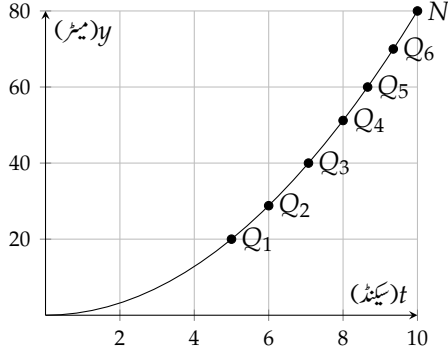
سوال 2.25: $\lim_{x\to -1} 3x(2x-1)$
جواب: 9

سوال 2.26: $\lim_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال 2.27: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 2.28: $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال 2.29 تا سوال 2.34 میں دیے وقفہ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

شکل 2.10: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم

سوال 2.29: $f(x) = x^3 + 1$؛ (الف) $[2, 3]$، (ب) $[-1, 1]$
جواب: (ا) 19 (ب) 1

سوال 2.30: $g(x) = x^2$؛ (الف) $[-1, 1]$، (ب) $[-2, 0]$

سوال 2.31: $h(t) = \cos t$؛ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
جواب: (ا) $-\frac{4}{\pi}$ (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

سوال 2.32: $g(t) = 2 + \cos t$؛ (الف) $[0, \pi]$، (ب) $[-\pi, \pi]$

سوال 2.33: $R(\theta) = \sqrt{4\theta + 1}$ ؛ $[0, 2]$
جواب: 1

سوال 2.34: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1, 2]$

سوال 2.35: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت ترسیم شکل 2.10 میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، $\cdots$ ، NQ_6 کی اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10\,\mathrm{s}$ پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال 2.36: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔(الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔ (ب) 1992 اور 1994 کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔ (پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے

1992 کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

جواب: (ب) 5600000 $\approx$ سالانہ (پ) 4200000 $\approx$ سالانہ

سوال 2.37: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$، $\frac{11}{10}$، $\frac{101}{100}$، $\frac{1001}{1000}$، $\frac{10001}{10000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔(الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $1 \neq x$ کے لئے وقفہ $[1, x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔(ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال 2.38: $x \geq 0$ کے لئے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1, 2]$، $[1, 1.5]$ اور $[1, 1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لئے x کے لحاظ سے وقفہ $[1, 1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \to 0$ کے لئے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

جواب: (ا) $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, 0.414213, 0.449489 (ب)

$1+h$	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998	1.0000499	1.000005	1.000005
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.4880	0.4987	0.4998	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

سوال 2.39: $t \neq 0$ کے لئے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 تک پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ ، $T = 2.00001$ اور $T = 2.000001$ ، کے لئے وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \to 2$ کے لئے تلاش کریں۔($T = 2$ پر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال 2.40 تا سوال 2.45 کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔(الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال 2.40: $\lim_{x \to 2} \frac{x^4-16}{x-2}$

سوال 2.41: $\lim_{x \to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$

سوال 2.42: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

سوال 2.43: $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

سوال 2.44: $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$

سوال 2.45: $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x}$

2.2 حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔پہلے تین مسئلے مثال 2.8 کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کے حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔چوتھا مسئلہ بعد میں استعمال ہونے والی حساب کے لئے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کے حد

مسئلہ 2.1: **حد کے خواص**
اگر $\lim_{x \to c} f(x) = L$ اور $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] = L - M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x \to c} kf(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $M \neq 0$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x \to c}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

1. دو تفاعل کے مجموعے کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گا۔
2. دو تفاعل کے فرق کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گا۔
3. دو تفاعل کے حاصل ضرب کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گا۔
4. ایک تفاعل ضرب مستقل کا حد اس تفاعل کے حد ضرب مستقل ہو گا۔
5. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کا حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گا بشرطیکہ نسب نما تفاعل کا حد غیر صفر ہو۔
6. تفاعل کے ناطق طاقت کا حد اس تفاعل کے حد کا ناطق طاقت ہو گا بشرطیکہ حد کا ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ 2.3 میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ب میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال 2.10: $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$ تلاش کریں۔

حل: مثال 2.8 کے نتائج $\lim_{x\to c} x = c$ اور $\lim_{x\to c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ 2.1 کے مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. $\lim_{x\to c} x^2 = (\lim_{x\to c} x)(\lim_{x\to c} x) = c \cdot c = c^2$ حاصل ضرب یا طاقت

ب. $\lim_{x\to c}(x^2+5) = \lim_{x\to c} x^2 + \lim_{x\to c} 5 = c^2+5$ مجموعہ اور (ا)

ج. $\lim_{x\to c} 4x^2 = 4\lim_{x\to c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (ا)

د. $\lim_{x\to c}(4x^2-3) = \lim_{x\to c} 4x^2 - \lim_{x\to c} 3 = 4c^2-3$ فرق اور (ج)

ھ. $\lim_{x\to c} x^3 = (\lim_{x\to c} x^2)(\lim_{x\to c} x) = c^2 \cdot c = c^3$ حاصل ضرب اور (ا) یا طاقت

و. $\lim_{x\to c}(x^3+4x-3) = \lim_{x\to c} x^3 + \lim_{x\to c}(4x^2-3) = c^3+4c^2-3$ مجموعہ، (ج) اور (د)

ز. $\lim_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^3+4x^2-3)}{\lim_{x\to c}(x^2+5)} = \frac{c^3+4c^2-3}{c^2+5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال 2.11: $\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{4(-2)^2-3} \qquad \text{مثال 2.10-د اور } n=\tfrac{1}{2} \text{ کے ساتھ قاعدہ طاقت}$$

$$= \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$$

□

مسئلہ 2.1 کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \to c$ کے لئے کثیر رکنی کا حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں۔ ناطق تفاعل کا حد $x \to c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ 2.2: **کثیر رکنی کا حد متغیر میں مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا**
اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

مسئلہ 2.3: **غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کا حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پر کرنے سے حاصل ہو گا**
فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال 2.12:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4(-1)^2 - 3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0$$

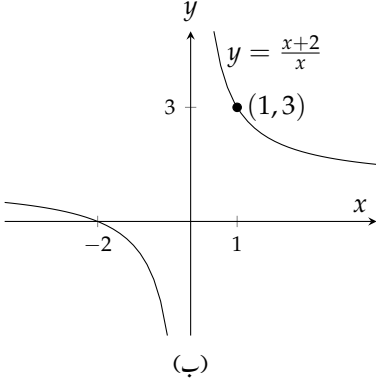
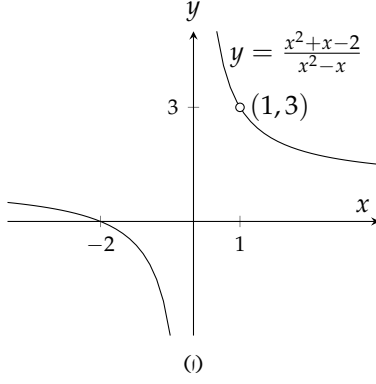
یہ ایک ہی قدم میں مثال 2.10 کا حل ہے۔ □

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

مسئلہ 2.3 ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پر کرنے سے حد حاصل کیا جا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x - 1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جا سکتا ہے۔

مثال 2.13: یکساں جزو کی منسوخی
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $x = 1$ پر نہیں کر سکتے ہیں چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہو گا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x + 2}{x}$$

شکل 2.11: ماسوائے نقطہ $(1,3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

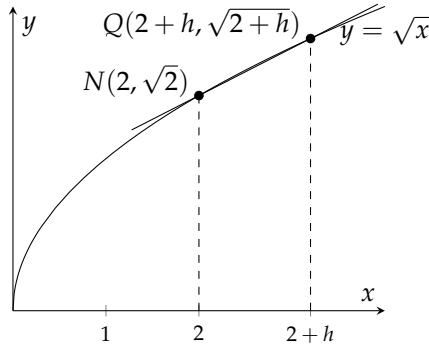
اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

شکل 2.11 میں $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y = \frac{x+2}{x}$ کے ترسیم دکھائے گئے ہیں۔یہ ترسیم صرف نقطہ $(1,3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔البتہ اس نقطہ پر دونوں تفاعل کا حد ایک جیسا ہے۔ □

مثال 2.14: **ایک جیسے اجزاء پیدا کرتے ہوئے انہیں آپس میں منسوخ کرنا**
$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $h = 0$ پر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے ہیں اور نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی نہیں پائے جاتے ہیں۔البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق[5] $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔نسب نما

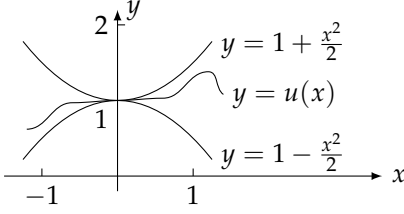
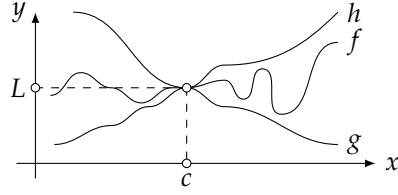
conjugate expression[5]

شکل 2.12: $N \to Q$ کرنے سے سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے

میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} && \text{جس کو ہم کاٹتے ہیں}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} && \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y=\sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2,\sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h,\sqrt{2+h})$ کے بیچ سیکنٹ کی ڈھلوان ہے اور $h \to 0$ کرنے سے مراد $N \to Q$ ہے۔ نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □

شکل 2.13: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔

شکل 2.14: شکل برائے مثال 2.15

مسئلہ بیچ

درج ذیل مسئلہ ہمیں بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کے حد حاصل کرنے میں مدد دیگا۔اس کو **مسئلہ بیچ**[6] اس لئے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے ہوئے تفاعل کی قیمت L ہو گی (شکل 2.13)۔اس کا ثبوت ضمیمہ ب میں دیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.4: **مسئلہ بیچ**
فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو، میں (ممکن ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر تمام x کے لئے

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

ہے۔مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

ہے۔تب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ہو گا۔

مثال 2.15: اگر تمام $x \neq 0$ کے لئے $1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} u(x)$ تلاش کریں۔

حل: چونکہ

$$\lim_{x\to 0}(1 - \frac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0}(1 + \frac{x^2}{2}) = 1$$

ہیں لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل 2.14)۔ □

مثال 2.16: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x\to c}\left|f(x)\right| = 0$ ہو تب $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: چونکہ $-\left|f(x)\right| \le f(x) \le \left|f(x)\right|$ ہے، اور $-\left|f(x)\right|$ اور $\left|f(x)\right|$ کا حد 0 ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کا حد بھی 0 ہو گا۔ □

[6] sandwich theorem

سوالات 2.2

حد کا حساب

سوال 2.46 تا سوال 2.61 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.46: $\lim_{x\to -7}(2x+5)$
جواب: -9

سوال 2.47: $\lim_{x\to 12}(10-3x)$

سوال 2.48: $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$
جواب: 4

سوال 2.49: $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

سوال 2.50: $\lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$
جواب: -8

سوال 2.51: $\lim_{s\to \frac{2}{3}} 3s(2s-1)$

سوال 2.52: $\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+6}$
جواب: $\frac{5}{8}$

سوال 2.53: $\lim_{x\to 5} \frac{4}{x-7}$

سوال 2.54: $\lim_{y\to -5} \frac{y^2}{5-y}$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 2.55: $\lim_{y\to 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال 2.56: $\lim_{x\to -1} 3(2x-1)^2$
جواب: 27

سوال 2.57: $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

سوال 2.58: $\lim_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$

جواب: 16

سوال 2.59: $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

سوال 2.60: $\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 2.61: $\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال 2.62 تا سوال 2.75 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.62: $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

جواب: $\frac{1}{10}$

سوال 2.63: $\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال 2.64: $\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}$

جواب: -7

سوال 2.65: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال 2.66: $\lim_{t\to 1}\frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 2.67: $\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال 2.68: $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 2.69: $\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال 2.70: $\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$

جواب: $\frac{4}{3}$

سوال 2.71: $\lim_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال 2.72: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

جواب: $\frac{1}{6}$

سوال 2.73: $\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

سوال 2.74: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

جواب: 4

سوال 2.75: $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال 2.76: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} \qquad \text{(الف)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{\frac{2}{3}}} \qquad \text{(ب)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7)^{\frac{2}{3}}} \qquad \text{(پ)}$$

$$= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4}$$

جواب: (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

سوال 2.77: فرض کریں کہ $\lim_{x\to1} h(x) = 5$ ، $\lim_{x\to1} p(x) = 1$ اور $\lim_{x\to1} r(x) = 2$ ہیں۔ مسئلہ 2.1 کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to1}(p(x)(4-r(x)))} \qquad \text{(الف)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to1} 5h(x)}}{(\lim_{x\to1} p(x))(\lim_{x\to1}(4-r(x)))} \qquad \text{(ب)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to1} h(x)}}{(\lim_{x\to1} p(x))(\lim_{x\to1} 4-\lim_{x\to1} r(x))} \qquad \text{(پ)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

سوال 2.78: $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ اور $\lim_{x\to c} g(x) = -2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

ب. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

ج. $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$

د. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

جواب: (ا) -10 (ب) -20 (ج) -1 (د) $\frac{5}{7}$

سوال 2.79: $\lim_{x\to4} f(x) = 0$ اور $\lim_{x\to4} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to4}(g(x)+3)$

ب. $\lim_{x\to4} xf(x)$

ج. $\lim_{x\to4}(g(x))^2$

د. $\lim_{x\to4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

سوال 2.80: $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ اور $\lim_{x\to b} g(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$

ب. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

ج. $\lim_{x\to b} 4g(x)$

د. $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}$

جواب: (ا) 4 (ب) -21 (ج) -12 (د) $-\frac{7}{3}$

سوال 2.81: $\lim_{x\to -2} p(x)=4$ ، $\lim_{x\to -2} r(x)=0$ اور $\lim_{x\to -2} s(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$

ب. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

ج. $\lim_{x\to -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)}$

اوسط تبدیلی شرح کے حد

درج ذیل صورت کے حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لمحاتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی بنا یہ احصاء میں عموماً در پیش ہوتا ہے۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

سوال 2.82 تا سوال 2.87 میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال 2.82: $f(x)=x^2,\quad x=1$
جواب: 2

سوال 2.83: $f(x)=x^2,\quad x=-2$

سوال 2.84: $f(x)=3x-4,\quad x=2$
جواب: 3

سوال 2.85: $f(x)=\frac{1}{x},\quad x=-2$

سوال 2.86: $f(x)=\sqrt{x},\quad x=7$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

سوال 2.87: $f(x)=\sqrt{3x+1},\quad x=0$

مسئلہ بیچ کا استعمال

سوال 2.88: اگر $-1 \le x \le 1$ کے لئے $\sqrt{5-2x} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sqrt{5}$

سوال 2.89: اگر تمام x کے لئے $2-x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ہو تب $\lim_{x\to 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال 2.90: (الف) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لئے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتا ہے۔

$$1-\frac{x^2}{6} < \frac{x\sin x}{2-2\cos x} < 1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

(ب) $-2 \le x \le 2$ کے لئے $y = 1-\frac{x^2}{6}$ ، $y=\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$ اور $y=1$ ترسیم کریں۔ $x\to 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) حد 1 ہے۔

سوال 2.91: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لئے مطمئن ہوتی ہے (سوال 9.539)۔

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24} < \frac{1-\cos x}{x^2} < \frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(ب) $-2 \le x \le 2$ کے لئے $y=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ ، $y=\frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y=\frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ $x\to 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.92: اگر $[-1,1]$ میں x کے لئے $x^4 \le f(x) \le x^2$ اور $x<-1$ اور $x>1$ کے لئے $x^2 \le f(x) \le x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x\to c} f(x)$ خود بخود معلوم ہو گا؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گا؟

سوال 2.93: فرض کریں کہ تمام $x \neq 2$ کے لئے $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$ ہے۔کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x\to 2} f(2) = 0$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہات پیش کریں۔

سوال 2.94: اگر $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1$ ہو تب $\lim_{x\to 4} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: 7

سوال 2.95: اگر $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (ب) $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال 2.96: (الف) اگر $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
(ب) اگر $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 4$ ہو تب $\lim_{x\to 2} f(x)$ کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 5 (ب) 5

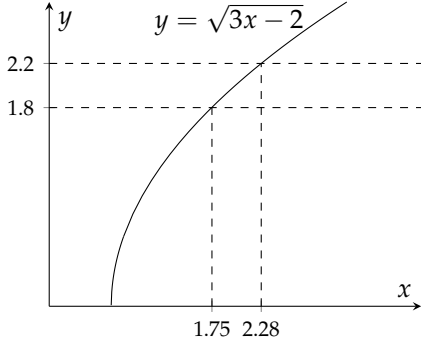
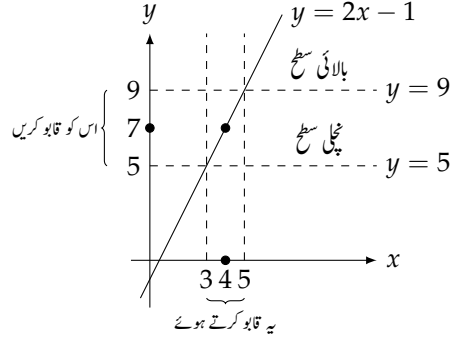
سوال 2.97: اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گے؟

کمپیوٹر

سوال 2.98: (الف) $\lim_{x\to 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔
(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال 2.99: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x\to 0} h(x)$ تلاش کریں۔
(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

2.3 مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔یہ تعریف کسی بھی مثال کے لئے قابل استعمال ہو گی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کے داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

شکل 2.16: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہو گا۔

شکل 2.15: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال 2.17)

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کی سلنڈر کا قطر $50\ \mu m$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

مثال 2.17: خطی تفاعل قابو کرنا
تفاعل $y = 2x - 1$ کے خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟

حل: ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لئے $|y - 7| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $|y - 7|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$

یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $|2x - 8| < 2$ کو مطمئن کرتے ہوں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |2x - 8| &< 2 \\ -2 < 2x - 8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x - 4 &< 1 \end{aligned}$$

x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل 2.15)۔ □

فنیات

مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جا سکتے ہیں۔درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر کریں۔ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔یوں مطلوبہ وقفہ میں تفاعل کا رویہ دیکھا جا سکتا ہے۔ (سوال 2.106 تا سوال 2.113 اور سوال 2.160 تا سوال 2.163)

مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x-2}$ کے ترسیم پر y محور کے مطلوبہ وقفہ $(1.8, 2.2)$ پر غور کریں۔یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل 2.16)۔اسی طرح مطلوبہ وقفہ $(1.98, 2.02)$ اور $(1.9998, 2.0002)$ پر بھی تفاعل کا رویہ دیکھیں۔

مثال 2.18: $6\,\mathrm{cm}$ اندرونی قطر کے ایک لڑ پیمائشی پیالے پر $1\,\mathrm{mm}$ وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہو گا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ایک لٹر $(1000\,\mathrm{cm}^3)$ پانی ناپنے کی خاطر h کتنا ہو گا؟ ناپ میں خلل $1\,\%$ سے کم ہونا چاہیے۔
حل: ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \le 10$$

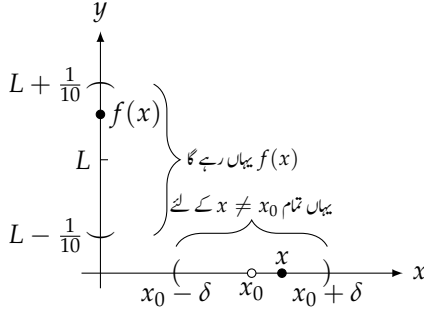
یوں ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہو گی۔

$$\begin{aligned}
|36\pi h - 1000| &\le 10 \\
-10 \le 36\pi h - 1000 &\le 10 \\
990 \le 36\pi h &\le 1010 \\
\tfrac{990}{36\pi} \le h &\le \tfrac{1010}{36\pi} \\
8.8 \le h &\le 8.9
\end{aligned}$$

یوں $1\,\%$ درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1\,\mathrm{cm}$ یعنی $1\,\mathrm{mm}$ ہے۔پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مائع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لئے کافی درستگی ہے۔ □

حد کی باضابطہ تعریف

مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \to x_0$ کرنے سے $f(x)$ کا حد L حاصل ہوتا ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے ہیں)۔ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق

شکل 2.17: حد کی تعریف میں ایک قدم

L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل 2.17)۔البتہ اتنا جاننا کافی نہیں ہے چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کی بجائے تھر تھراتی ہو۔

ہمیں سے کہا جا سکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100{,}000}$ ہے۔ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جا سکتا ہے۔البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھر تھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L تک نہ پہنچتی ہو۔

شکل 2.18 میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

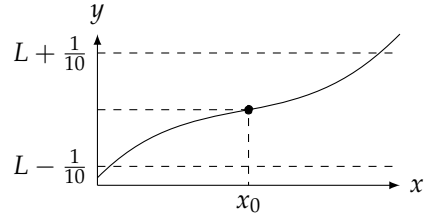
اس نا ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لئے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل 2.19)۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی قریب ہو گی۔

تعریف: حد کی با ضابطہ تعریف
فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوں

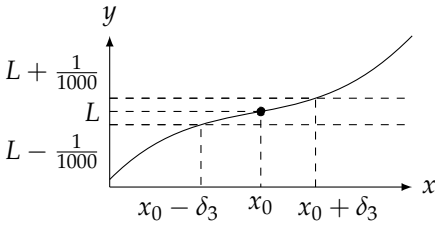
$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L تک پہنچتی ہے جس کو الجبرائی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

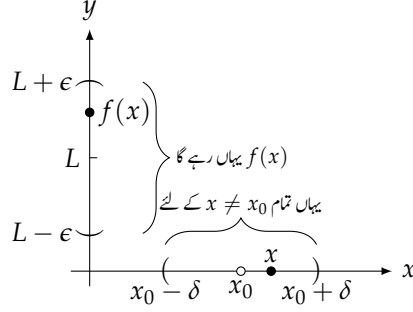
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں

(ب) پہلے جواب: $|x - x_0| < \delta_1$ رکھیں

(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

(د) دوسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_2$ رکھیں

(ہ) تیسرا مقابلہ: $|f(x) - L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

(و) تیسرا جواب: $|x - x_0| < \delta_3$ رکھیں

شکل 2.18: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ

شکل 2.19: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

□

مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔فرض کریں کہ آپ خراد کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج نہیں دیتی ہے لہٰذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L-\epsilon$ اور $L+\epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہو گا۔دھرا کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لئے x کو قابو میں رکھنا ضروری ہو گا لہٰذا x کو $x-\delta$ اور $x+\delta$ کے بیچ رکھنا ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے، آپ کو ویسے ویسے δ کو درست کرنا ہو گا۔

تعریف کو پرکھنے کی مثالیں

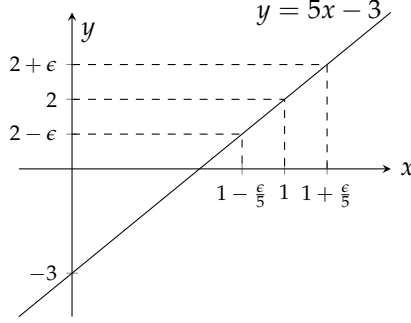
حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی ہے البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو استعمال کرتے ہوئے مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتی ہیں۔

مثال 2.19: دکھائیں کہ $\lim_{x\to1}(5x-3)=2$ ہے۔

حل: حد کی تعریف میں $x_0=1$ ، $f(x)=5x-3$ اور $L=2$ لیں۔کسی بھی دیے گئے $\epsilon>0$ کے لئے ہمیں موزوں $\delta>0$ تلاش کرنا ہو گا تاکہ اگر $x\neq1$ ہو اور $x_0=1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0<\lvert x-a\rvert<\delta$$

ہو تب $L=2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہو گا یعنی:

$$\lvert f(x)-2\rvert<\epsilon$$

شکل 2.20: تفاعل $f(x) = 5x - 3$ کے لئے $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $\left|f(x) - 2\right| < \epsilon$ ہو گا (مثال 2.19)۔

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|(5x-3)-2\right| &= |5x-5| < \epsilon\\ 5|x-1| &< \epsilon\\ |x-1| &< \frac{\epsilon}{5}\end{aligned}$$

یوں ہم $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل 2.20)۔ اب اگر $0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\left|(5x-3)-2\right| = |5x-5| = 5|x-1| < 5\left(\tfrac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$ ہے۔

$\delta = \frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں ہے جس کے لئے $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لئے بھی $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لیا جا سکتا ہے۔ حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی ہے بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتا ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال 2.20: دو اہم حد

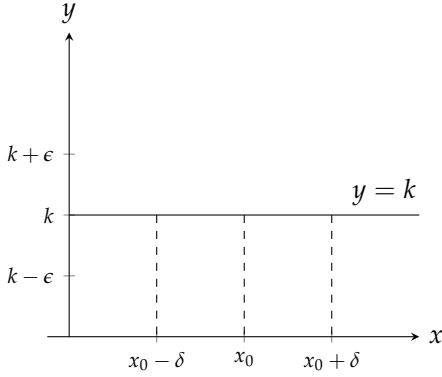
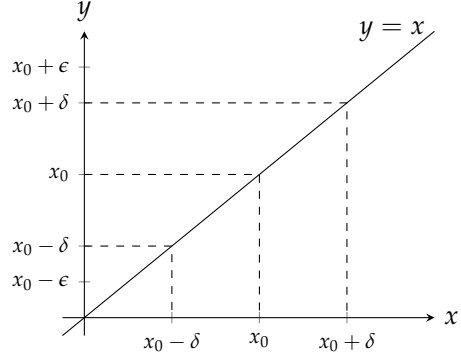
تصدیق کریں: (ا) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ (ب) $\lim_{x\to x_0} k = k$ جہاں k مستقل ہے۔

حل: (ا) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا $\delta > 0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |x - x_0| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل 2.21-ا)۔ یوں ثابت ہو کہ $\lim_{x\to x_0} = x_0$ ہے۔

(ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لئے

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |k - k| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

(ا) $0 < |x - x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لئے جب بھی $\delta \leq \epsilon$ ہو تب $|f(x) - x_0| < \epsilon$ ہو گا۔

(ب) تفاعل $f(x) = k$ کے لئے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x) - k| < \epsilon$ ہو گا۔

شکل 2.21: اشکال برائے مثال 2.20

چونکہ $k - k = 0$ ہے للذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جا سکتا ہے (شکل 2.21-ب)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x \to x_0} k = k$ ہے۔ $\square$

دیے گئے ϵ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

مثال 2.19 اور مثال 2.20 میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $|f(x) - L|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشاکلی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفہ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشاکل نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا ہے، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سر تک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

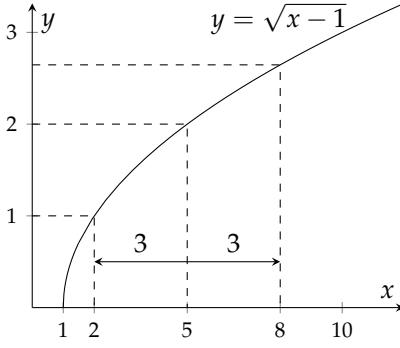
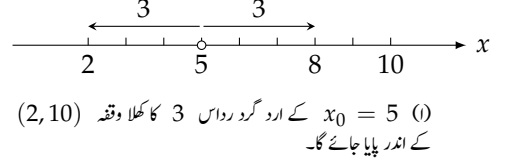
مثال 2.21: حد $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1} = 2$ کے لئے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $0 < |x - 5| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت $\Longrightarrow$ کو پڑھیں "سے مراد"۔)

$$0 < |x - 5| < \delta \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \left|\sqrt{x - 1} - 2\right| < 1$$

حل: اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلی قدم میں عدم مساوات $\left|\sqrt{x - 1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a, b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد $\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a, b) کے اندر پایا جاتا ہو۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|\sqrt{x - 1} - 2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں کہ اس

(ب) تفاعل اور وقفہ

(ا) $x_0 = 5$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔

شکل 2.22: اشکال برائے مثال 2.21

وقفے پر تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-1}-2\right| &< 1\\
-1 < \sqrt{x-1}-2 &< 1\\
1 < \sqrt{x-1} &< 3\\
1 < x-1 &< 9\\
2 < x &< 10
\end{aligned}$$

عدم مساوات کھلے وقفہ $(2, 10)$ پر تمام نقطوں کے لئے مطمئن ہوتی ہے لہٰذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لئے بھی مطمئن ہو گی۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5 - \delta < x < 5 + \delta$ کو وقفہ $(2, 10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2, 10)$ کے قریبی سر کا فاصلہ 3 ہے۔اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x-5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2, 10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $\left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x-5| < 3 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$$

□

دیے گئے f، L، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لئے δ کا الجبرائی حصول

ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

کو دو قدموں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a, b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلا وقفہ $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a, b) کے اندر رکھے۔اس δ وقفہ میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - L| < \epsilon$ مطمئن ہو گی۔

مثال 2.22: ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لئے $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

حل: ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x - 2| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - 4| < \epsilon$$

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لئے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔اب $x \neq x_0 = 2$ کے لئے $f(x) = x^2$ ہے لہٰذا عدم مساوات کی صورت $\left|x^2 - 4\right| < \epsilon$ ہو گی۔

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 4\right| &< \epsilon \\ -\epsilon < x^2 - 4 &< \epsilon \\ 4 - \epsilon < x^2 &< 4 + \epsilon \\ \sqrt{4 - \epsilon} < |x| &< \sqrt{4 + \epsilon} && \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4 \text{ ہے} \\ \sqrt{4 - \epsilon} < x &< \sqrt{4 + \epsilon} \end{aligned}$$

کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ میں تمام $x \neq 2$ کے لئے عدم مساوات $|f(x) - 4| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2 - \delta, 2 + \delta)$ کو $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔نقطہ $x_0 = 2$ سے کھلا وقفہ $(\sqrt{4 - \epsilon}, \sqrt{4 + \epsilon})$ کے قریبی سر کا فاصلہ δ ہو گا۔یوں $2 - \sqrt{4 - \epsilon}$ اور $\sqrt{4 + \epsilon} - 2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہو گی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لئے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - 4| < \epsilon$$

□

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon < 4$ کیوں فرض کیا؟ اس لئے کہ تمام x کے لئے ایسا δ کہ $0 < |x-2| < \delta$ سے مراد $\left|f(x)-4\right| < \epsilon < 4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لئے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے ہیں۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ 2.2 کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کیے جاتے ہیں۔آئیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال 2.23: قاعدہ مجموعہ
اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{z\to c} g(x) + M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$$

حل: فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x-c| < \delta$ میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| &= \left|(f(x)-L)+(g(x)-M)\right| \\ &\le \left|f(x)-L\right| + \left|g(x)-M\right| \qquad \text{تکونی عدم مساوات}\end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_1 \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x\to c} g(x) = M$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

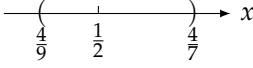
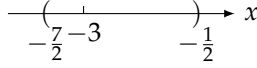
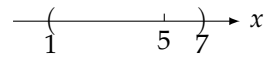
$$0 < |x-c| < \sigma_2 \quad \implies \quad \left|g(x)-M\right| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔اب اگر $0 < |x-c| < \delta$ ہو تب

$$\left|f(x)-L\right| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x-c| < \delta_1$$

ہوں گے، اور $|x-c| < \delta_2$ اور $\left|g(x)-M\right| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔اس طرح

$$\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ہو گا۔اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$ ہے۔ □

شکل 2.25 شکل 2.24 شکل 2.23

2.3 سوالات

نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط لانا

سوال 2.100 تا سوال 2.105 میں x محور پر وقفہ (a,b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ $|x - x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

سوال 2.100: $a = 1, b = 7, x_0 = 5$
جواب: $\delta = 2$ شکل 2.23

سوال 2.101: $a = 1, b = 7, x_0 = 2$

سوال 2.102: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -3$
جواب: $\delta = \frac{1}{2}$ شکل 2.24

سوال 2.103: $a = -\frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}, x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 2.104: $a = \frac{4}{9}, b = \frac{4}{7}, x_0 = \frac{1}{2}$
جواب: $\delta = \frac{1}{18}$ شکل 2.25

سوال 2.105: $a = 2.7591, b = 3.2391, x_0 = 3$

δ کا حصول بذریعہ ترسیم

سوال 2.106 تا سوال 2.113 میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \implies \quad 0 < \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

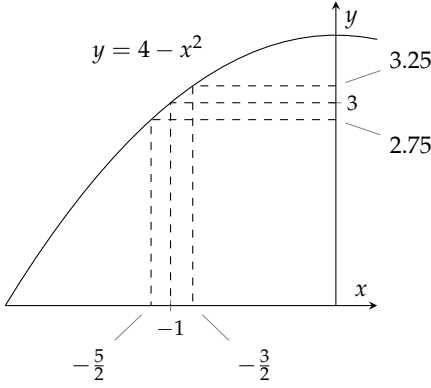
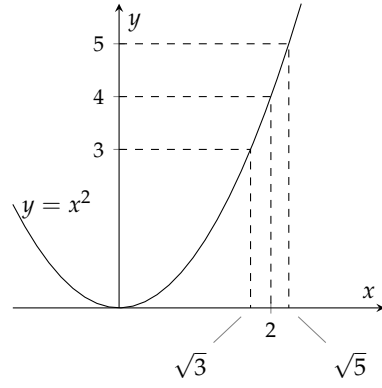
سوال 2.106: $f(x) = 2x - 4, x_0 = 5, L = 6, \epsilon = 0.2$ شکل 2.26
جواب: $\delta = 0.1$

سوال 2.107: $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3, x_0 = -3, L = 7.5, \epsilon = 0.15$ شکل 2.27

شکل 2.26: ترسیم برائے سوال 2.106

شکل 2.27: ترسیم برائے سوال 2.107

شکل 2.28: ترسیم برائے سوال 2.108

شکل 2.29: ترسیم برائے سوال 2.109

شکل 2.31: ترسیم برائے سوال 2.111

شکل 2.30: ترسیم برائے سوال 2.110

سوال 2.108: $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1, L = 1, \epsilon = \frac{1}{4}$ شکل 2.28
جواب: $\delta = \frac{7}{16}$

سوال 2.109: $f(x) = 2\sqrt{x+1}, x_0 = 3, L = 4, \epsilon = 0.2$ شکل 2.29

سوال 2.110: $f(x) = x^2, x_0 = 2, L = 4, \epsilon = 1$ شکل 2.30
جواب: $\delta = \sqrt{5} - 2$

سوال 2.111: $f(x) = 4 - x^2, x_0 = -1, L = 3, \epsilon = 0.25$ شکل 2.31

سوال 2.112: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}, x_0 = -1, L = 2, \epsilon = 0.5$ شکل 2.32
جواب: $\delta = 0.36$

سوال 2.113: $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}, L = 2, \epsilon = 0.01$ شکل 2.33

δ کا الجبرائی حصول

سوال 2.114 تا سوال 2.129 میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لئے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال 2.114: $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0.01$
جواب: $\delta = 0.01, \quad (3.99, 4.01)$

شکل 2.32: ترسیم برائے سوال 2.112

شکل 2.33: ترسیم برائے سوال 2.113

سوال 2.115: $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0.02$

سوال 2.116: $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \epsilon = 0.1$
جواب: $\delta = 0.19, \quad (-0.19, 0.21)$

سوال 2.117: $f(x) = \sqrt{x}, L = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{4}, \epsilon = 0.1$

سوال 2.118: $f(x) = \sqrt{19 - x}, L = 3, x_0 = 10, \epsilon = 1$
جواب: $\delta = 5, \quad (3, 15)$

سوال 2.119: $f(x) = \sqrt{x - 7}, L = 4, x_0 = 23, \epsilon = 1$

سوال 2.120: $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$
جواب: $\delta = \frac{2}{3}, \quad (\frac{10}{3}, 5)$

سوال 2.121: $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال 2.122: $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$
جواب: $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, \quad (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

سوال 2.123: $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال 2.124: $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$
جواب: $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, \quad (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

سوال 2.125: $f(x)=\frac{120}{x}, L=5, x_0=24, \epsilon=1$

سوال 2.126: $f(x)=mx, m>0, L=2m, x_0=2, \epsilon=0.03$
جواب: $\delta=\frac{0.03}{m}, \quad (2-\frac{0.03}{m}, 2+\frac{0.03}{m})$

سوال 2.127: $f(x)=mx, m>0, L=3m, x_0=3, \epsilon=c>0$

سوال 2.128: $f(x)=mx+b, m>0, L=\frac{m}{2}+b, x_0=\frac{1}{2}, \epsilon=c>0$
جواب: $\delta=\frac{c}{m}, \quad (\frac{1}{2}-\frac{c}{m}, \frac{1}{2}+\frac{c}{m})$

سوال 2.129: $f(x)=mx+b, m>0, L=m+b, x_0=1, \epsilon=0.05$

باضابطہ حد پر مزید سوالات

سوال 2.130 تا سوال 2.135 میں تفاعل $f(x)$، نقطہ x_0 اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ تلاش کریں۔اس کے بعد ایسا عدد $\delta>0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$0<|x-x_0|<\delta \implies \left|f(x)-L\right|<\epsilon$$

سوال 2.130: $f(x)=3-2x, x_0=3, \epsilon=0.02$
جواب: $\delta=0.01, \quad L=-3$

سوال 2.131: $f(x)=-3x-2, x_0=-1, \epsilon=0.03$

سوال 2.132: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, x_0=2, \epsilon=0.05$
جواب: $\delta=0.05, \quad L=4$

سوال 2.133: $f(x)=\frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0=-5, \epsilon=0.05$

سوال 2.134: $f(x)=\sqrt{1-5x}, x_0=-3, \epsilon=0.5$
جواب: $\delta=0.75, \quad L=4$

سوال 2.135: $f(x)=\frac{4}{x}, x_0=2, \epsilon=0.4$

سوال 2.136 تا سوال 2.149 میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

سوال 2.136: $\lim_{x\to 4}(9-x)=5$

سوال 2.137: $\lim_{x\to 3}(3x-7)=2$

سوال 2.138: $\lim_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2$

سوال 2.139: $\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x}=2$

سوال 2.140: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 1}f(x)=1$

سوال 2.141: $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq -2\\ 1, & x=-2\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to -2}f(x)=4$

سوال 2.142: $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$

سوال 2.143: $\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{3}$

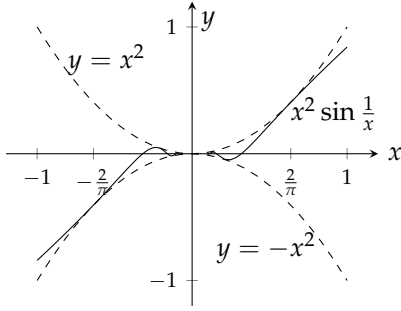
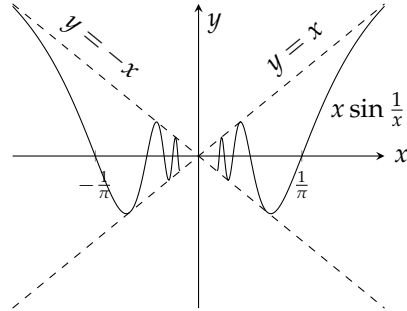
سوال 2.144: $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$

سوال 2.145: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

سوال 2.146: $f(x)=\begin{cases}4-2x, & x<1\\ 6x-4, & x\geq 1\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 1}f(x)=2$

سوال 2.147: $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \frac{x}{2}, & x\geq 0\end{cases}$ کے لئے $\lim_{x\to 0}f(x)=0$

سوال 2.148: $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.34

سوال 2.149: $\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$ شکل 2.35

شکل 2.34: ترسیم برائے سوال 2.148

شکل 2.35: ترسیم برائے سوال 2.149

نظریہ اور مثالیں

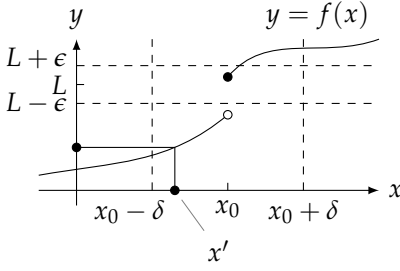
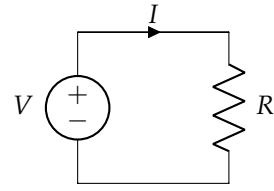
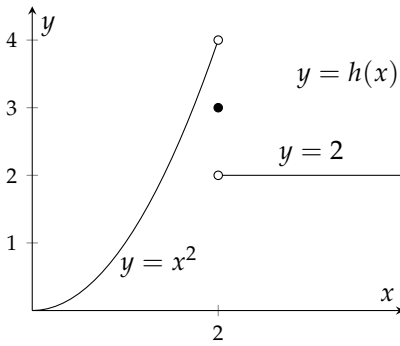
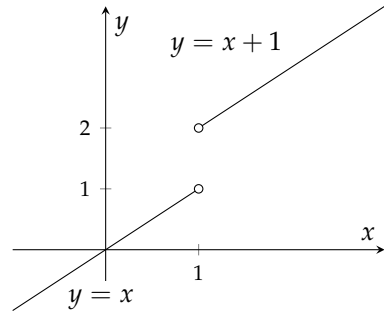
سوال 2.150: $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 2.151: $\lim_{x \to 0} g(x) = k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

سوال 2.152: یہ کہنا کہ "جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے" سے یہ اخذ نہیں کیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 2.153: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہے" سے یہ مراد نہیں لیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کا حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال 2.154: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی
انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش $58\,\text{cm}^2$ حاصل کرنے کے لئے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\mp 0.06\,\text{cm}^2$ درستگی کے اندر رکھنے کے لئے درکار $8.593\,\text{cm}$ قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A - 58| \le 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟
جواب: $[8.589, 8.598]$

سوال 2.155: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباو، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب وولٹ V، ایمپیئر A اور اوہم Ω ہیں (شکل 2.36)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباو $220\,\text{V}$ ہو گی جبکہ برقی رو $10\,\text{mA} \mp 0.1\,\text{mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو $10\,\text{mA}$ میں چھوٹ $0.1\,\text{mA}$ ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

شکل 2.37

شکل 2.36: قانون اوہم (سوال 2.155)

شکل 2.39: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 2.157

شکل 2.38: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 2.156

کب $x \to x_0$ کرنے سے عدد L تفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہو گا؟
یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لئے ایسا کوئی $0 < \delta$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لئے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $\left|f(x) - L\right| \geq \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل 2.37 میں نقطہ $x = x'$)۔

سوال 2.156: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل 2.38 میں دکھایا گیا ہے۔(الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x - 1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لئے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $\left|f(x) - 2\right| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔یعنی ہر δ کے لئے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x - 1| < \delta$ اور $\left|f(x) - 2\right| \geq \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔یوں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 2$ ہو گا۔

(ب) دکھائیں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1$

(پ) دکھائیں $\lim_{x \to 1} f(x) \neq 1.5$

شکل 2.40: ترسیم برائے سوال 2.158

شکل 2.41: ترسیم برائے سوال 2.159

سوال 2.157: تفاعل (شکل 2.39) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$ کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 3$

(پ) $\lim_{x\to 2} h(x) \neq 2$

سوال 2.158: تفاعل کی ترسیم شکل 2.40 اس کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

(الف) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 4$

(ب) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 4.2$

(پ) $\lim_{x\to 2} f(x) \neq 3$

سوال 2.159: دکھائیں کہ شکل 2.41 کی ترسیم کے لئے $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$ ہے۔کیا ایسا نظر آتا ہے جیسے حد $\lim_{x\to -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر حد نہیں پایا جاتا تو اس کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.160 تا سوال 2.165 میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہو گا۔کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل

f ترسیم کریں۔

(ت) درج بالا جزو (پ) سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتے ہوں۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L-\epsilon, L+\epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہٰذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔

(ٹ) جزو (پ) اور (ت) کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لئے دہرائیں۔

سوال 2.160: $f(x) = \frac{x^4-81}{x-3}, x_0 = 3$

سوال 2.161: $f(x) = \frac{5x^3+9x^2}{2x^5+3x^2}, x_0 = 0$

سوال 2.162: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

سوال 2.163: $f(x) = \frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}, x_0 = 0$

سوال 2.164: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, x_0 = 1$

سوال 2.165: $f(x) = \frac{3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5}{x-1}, x_0 = 1$

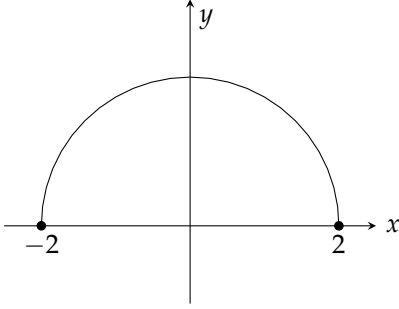
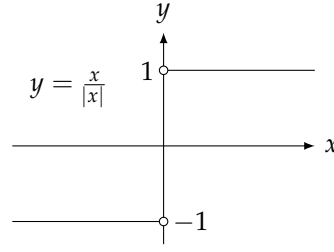
2.4 تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کی تصور کو وسعت دیتے ہیں۔

1. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a تک بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **بائیں ہاتھ حد**[7] حاصل ہو گا۔اسی طرح جب x نقطہ a تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **دائیں ہاتھ حد**[8] حاصل ہو گا۔

2. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں ہے لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ، مثبت یا منفی، ہو جاتی ہو۔

---

[7] left-handed limit
[8] right-handed limit

شکل 2.43: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

شکل 2.42: مبدا پر بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کا نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گا جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے نزدیک تر پہنچتی ہو۔اسی لئے عام حد کو بعض اوقات **دو طرفہ حد**[9] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف بائیں ہاتھ یا صرف دائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کا حد پایا جاتا ہو۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کا a پر یک طرفہ (بائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پایا جاتا ہے۔اگر x نقطہ صفر تک دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کا حد 1 ہو گا جبکہ اگر صفر کو x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل کا حد -1 ہو گا (شکل 2.42)۔

تعریف: **دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف**
فرض کریں کہ وقفہ (a, b) ، جہاں $a < b$ ہے ، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **دائیں ہاتھ حد** L ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کریں کہ وقفہ (c, a) ، جہاں $c < a$ ہے ، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔اگر اس وقفہ کے اندر سے a تک x پہنچنے کی کوشش کرنے سے $f(x)$ کی قیمت M تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کا **بائیں ہاتھ حد** M ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

[9] two-sided limit

شکل 2.42 میں تفاعل $f(x)=\frac{x}{|x|}$ کے لئے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=1, \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=-1$$

□

$x\to a^+$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x\to a^-$ سے مراد ہے کہ a تک پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا سادہ حد نہیں ہو سکتا ہے البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کا یک طرفہ حد ہو سکتا ہے۔

مثال 2.24: تفاعل $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ کا دائرہ کار $[-2,2]$ ہے۔ تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل 2.43 میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2}=0, \quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2}=0$$

نقطہ $x=-2$ پر تفاعل کا بائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ اسی طرح $x=2$ پر اس کا دائیں ہاتھ حد نہیں پایا جاتا ہے۔ $x=-2$ اور $x=2$ پر تفاعل کے سادہ دو طرفہ حد نہیں پائے جاتے ہیں۔ □

مسئلہ 2.1 کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔ دو تفاعل کے مجموعے کا دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کے انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کے حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پورا اترتا ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

مسئلہ 2.5: **یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد**
متغیر x کا c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کا حد اس صورت پایا جاتا ہے جب اس نقطے پر تفاعل کا بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد پائے جاتے ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$\lim_{x\to c} f(x)=L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x)=L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x)=L$$

مثال 2.25: درج ذیل تمام فقرے شکل 2.44 میں ترسیم شدہ تفاعل کے لئے درست ہیں۔

شکل 2.44: ترسیم برائے مثال 2.25

شکل 2.45: ترسیم برائے مثال 2.26

$x = 0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ ($x = 0$ کے بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک جیسے نہیں ہیں۔)

$x = 2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

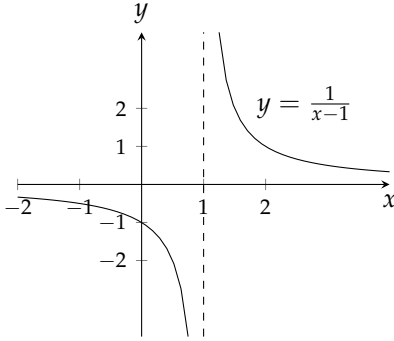
$x = 4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں ہیں۔ (نقطہ $x = 4$ کے دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پایا جاتا ہے۔ □

اب تک تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کا حد موجود نہیں تھا وہاں اس کا یک طرفہ حد موجود تھا۔ درج ذیل مثال میں ماسوائے نقطہ $x = 0$ تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا نہ دائیں ہاتھ اور نا ہی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔

مثال 2.26: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin \frac{1}{x}$ کا کوئی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 2.45)۔

حل: جیسے جیسے x صفر تک پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی بنا $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا ہے جس تک $\sin \frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی جاتی ہے۔ یوں $x = 0$ پر $\sin \frac{1}{x}$ کا نہ کوئی دائیں ہاتھ اور نا کوئی بائیں ہاتھ حد پایا جاتا ہے۔ □

شکل 2.46: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کرتی ہے۔

شکل 2.47: ترسیم برائے مثال 2.27

لامتناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کرتے ہیں جس کو گزشتہ مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔جیسے جیسے $x \to 0^+$ ہوتا ہے ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل 2.46)۔یوں $x \to 0^+$ پر f کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت ∞ کے قریب پہنچتی ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

یہ لکھنے سے ہم ہر گز یہ نہیں کہتے ہیں کہ تفاعل کا حد موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے برعکس ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے چونکہ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

$x \to 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑی عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔یوں $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل 2.46)۔ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

یہاں بھی ہم ہر گز نہیں کہتے ہیں کہ حد موجود ہے اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نا ہی کہتے ہیں کہ کوئی حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا ہے۔ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \to 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی مطلق قیمت کے لئے استعمال کیا گیا ہے)۔

مثال 2.27: یک طرفہ حد
$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔

حل: **ترسیمی حل:** تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل 2.47)۔ یوں 1 کے قریب $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

تحلیلی حل: عدد $x - 1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x \to 1^+$ کرنے سے $(x-1) \to 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \to \infty$ ملتے ہیں۔ $x \to 1^-$ کرنے سے $(x-1) \to 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ ملتے ہیں۔ □

مثال 2.28: دو طرفہ لامتناہی حد

(ا) $x = 0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x = -3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

حل: (ا) جیسے x صفر کو کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کرتی ہے (شکل 2.48):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتا ہے (شکل 2.49)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□

$x \to 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا ہے۔ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں ہے۔ اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال 2.29: ناطق تفاعل کے نسب نما کے صفر کے قریب تفاعل کے مختلف رویہ دیکھنے کو ملتے ہیں

شکل 2.48: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

شکل 2.49: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال 2.28)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \qquad \text{(ا)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \qquad \text{(ب)}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad \text{(ج)}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \qquad \text{(د)}$$

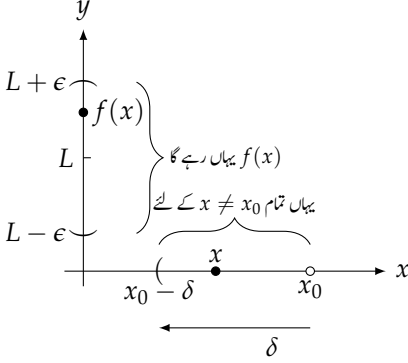
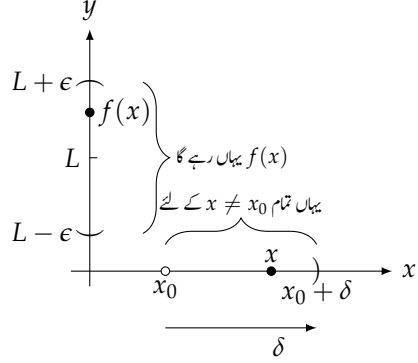
$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \qquad \text{(و)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \qquad \text{(ه)}$$

جزو (ا) اور (ب) میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پایا جاتا ہے۔ جزو (ه) میں ایسا نہیں ہے جہاں کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: **دائیں ہاتھ حد**

شکل 2.51: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

شکل 2.50: دائیں ہاتھ حد کی تعریف

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.1}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا دائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.50)۔

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے

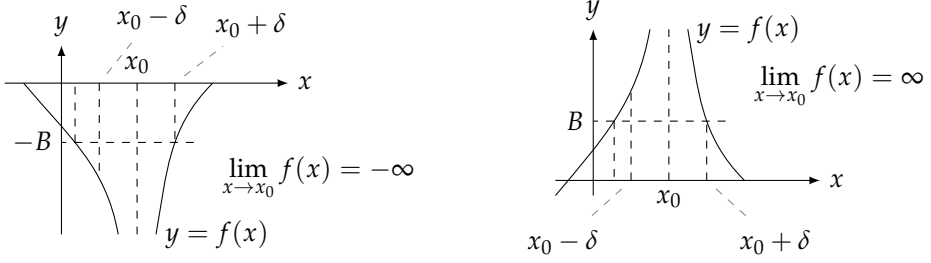
$$x_0 - \delta < x < x_0 \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.2}$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کا بائیں ہاتھ حد L ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل 2.51)۔

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

□

یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا آپس میں تعلق

مساوات 2.1 اور مساوات 2.2 میں δ عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔دائیں ہاتھ حد کے لئے، x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon \tag{2.3}$$

شکل 2.52: لا متناہی حد کی تعریف

بائیں ہاتھ حد کے لئے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right| < \epsilon \tag{2.4}$$

مساوات 2.3 اور مساوات 2.4 بھی وہی بات کرتے ہیں جو دو طرفہ حد کے لئے درست ہے یعنی:

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \implies \quad \left|f(x)-L\right| < \epsilon \tag{2.5}$$

یوں x_0 پر f کا حد اس صورت L ہو گا اگر x_0 پر f کا بائیں ہاتھ حد L اور دائیں ہاتھ حد L ہو۔

لا متناہی حد کی با ضابطہ تعریف

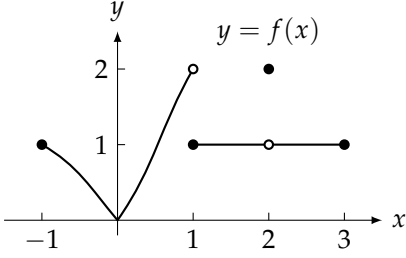
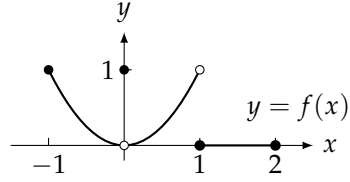
بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لئے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لا متناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 2.52 کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لا متناہی حد

(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x-x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لا متناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x-x_0| < \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لا متناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$$

شکل 2.54: تفاعل برائے سوال 2.167

شکل 2.53: تفاعل برائے سوال 2.166

□

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔اس تعریف کو سوالات میں پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال 2.166: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل 2.53 میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لئے درست ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

ج. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

د. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

ھ. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے۔

و. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ز. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

ح. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

ط. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

ي. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

يا. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ غیر موجود ہے۔

یب. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

جواب:

ا. درست ج. غلط ھ. درست ز. غلط ط. غلط یا. درست

ب. درست د. درست و. درست ح. غلط ي. غلط یب. غلط

سوال 2.167: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل 2.54 میں دیے تفاعل کے لئے درست اور کون سے غلط ہیں۔

ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

ب. $\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

د. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

ھ. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

و. $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے۔

ز. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

ح. کھلے وقفہ $(-1,1)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ط. کھلے وقفہ $(1,3)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

ي. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

یا. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔

سوال 2.168: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.168 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2 \\ \frac{x}{2}+1, & x>2 \end{cases}$$

ا. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

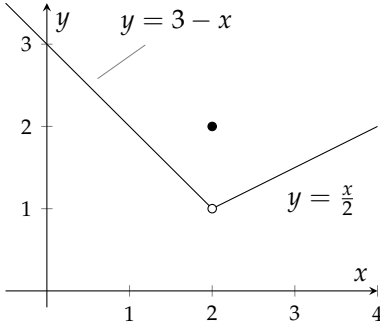
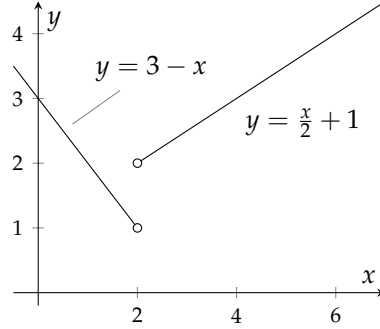
ب. کیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود ہے۔اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تا نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $2, 1$ ، (ب) نہیں $\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$ ، (ج) $3, 3$ ، (د) ہاں، 3

سوال 2.169: درج ذیل کو شکل 2.56 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3-x, & x<2 \\ 2, & x=2 \\ \frac{x}{2}, & x>2 \end{cases}$$

شکل 2.56: تفاعل برائے سوال 2.169

شکل 2.55: تفاعل برائے سوال 2.168

ا. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ ، $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

د. کیا $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.170: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.57 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

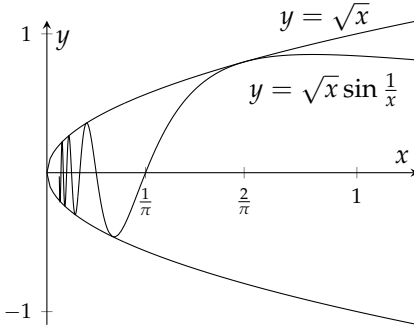
ا. کیا $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

سوال 2.171: درج ذیل تفاعل کو شکل 2.58 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

شکل 2.57: تفاعل برائے سوال 2.170

شکل 2.58: تفاعل برائے سوال 2.171

ا. کیا $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا $\lim_{x \to 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

ج. کیا $\lim_{x \to 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.172:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

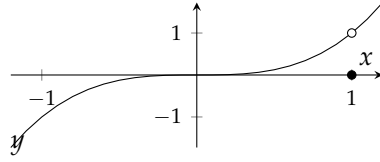
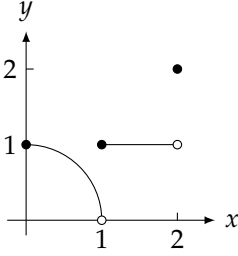
ج. کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) شکل 2.59 (ب) $1, 1$ (ج) ہاں، 1

سوال 2.173:

ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

ب. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

شکل 2.60: ترسیم برائے سوال 2.174

شکل 2.59: ترسیم برائے سوال 2.172

ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نا ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.174 اور سوال 2.175 میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطہ کو تلاش کریں۔

ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

سوال 2.174:
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 0\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

جواب: شکل 2.174 (ا) $D: 0\le x\le 2$ ، $R: 0<y\le 1$ اور $y=2$ (ب) $(0,1)\cup(1,2)$ (ج) $x=2$ (د) $x=0$

سوال 2.175:
$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<0 \text{ یا } 0<x\le 1\\ 1, & x=0\\ 0, & x<-1 \text{ یا } x>1\end{cases}$$

حد کا تحلیلی حصول: سوال 2.176 تا سوال 2.185 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.176: $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

جواب: $\sqrt{3}$

سوال 2.177: $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

سوال 2.178: $\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

جواب: 1

سوال 2.179: $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

سوال 2.180: $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

جواب: $\frac{2}{\sqrt{5}}$

سوال 2.181: $\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

سوال 2.182: (ا) $\lim_{x\to -2^+} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$ (ب) $\lim_{x\to -2^-} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

جواب: (ا) 1 (ب) -1

سوال 2.183: (ا) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال 2.184: (ا) $\lim_{\theta\to 3^+} \frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta\to 3^-} \frac{|\theta|}{\theta}$

جواب: (ا) 1 (ب) $\frac{2}{3}$

سوال 2.185: (ا) $\lim_{t\to 4^+} (t-|t|)$ (ب) $\lim_{t\to 4^-} (t-|t|)$

لامتناہی حد: سوال 2.186 تا سوال 2.197 میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال 2.186: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x}$

جواب: ∞

سوال 2.187: $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{2x}$

سوال 2.188: $\lim_{x\to2^-} \frac{3}{x-2}$
جواب: $-\infty$

سوال 2.189: $\lim_{x\to3^+} \frac{1}{x-3}$

سوال 2.190: $\lim_{x\to-8^+} \frac{2x}{x+8}$
جواب: $-\infty$

سوال 2.191: $\lim_{x\to-5^-} \frac{3x}{2x+10}$

سوال 2.192: $\lim_{x\to7} \frac{4}{(x-7)^2}$
جواب: ∞

سوال 2.193: $\lim_{x\to0} \frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال 2.194: (ا) $\lim_{x\to0^+} \frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x\to0^-} \frac{2}{3x^{1/3}}$
جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$

سوال 2.195: (ا) $\lim_{x\to0^+} \frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x\to0^-} \frac{2}{x^{1/5}}$

سوال 2.196: $\lim_{x\to0} \frac{4}{x^{2/5}}$
جواب: ∞

سوال 2.197: $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^{2/3}}$

سوال 2.198 تا سوال 2.201 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.198: $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$
جواب: ∞

سوال 2.199: $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

سوال 2.200: $\lim_{\theta\to0^-} (1+\csc\theta)$
جواب: $-\infty$

سوال 2.201: $\lim_{\theta\to0}(2-\cot\theta)$

مزید حساب: سوال 2.202 تا سوال 2.207 میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.202: $\lim \frac{1}{x^2-4}$

ا. $x \to 2^+$ ب. $x \to 2^-$ ج. $x \to -2^+$ د. $x \to -2^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) $-\infty$ (د) ∞

سوال 2.203: $\lim \frac{x}{x^2-1}$

ا. $x \to 1^+$ ب. $x \to 1^-$ ج. $x \to -1^+$ د. $x \to -1^-$

سوال 2.204: $\lim(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to \sqrt[3]{2}$ د. $x \to -1$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞ (ج) 0 (د) $\frac{3}{2}$

سوال 2.205: $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$

ا. $x \to -2^+$ ب. $x \to -2^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 0^-$

سوال 2.206: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 2^+$ ج. $x \to 2^-$ د. $x \to 2$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $-\infty$ ہو گا۔

سوال 2.207: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

ا. $x \to 2^+$ ب. $x \to -2^+$ ج. $x \to 0^-$ د. $x \to 1^+$

سوال 2.208 تا سوال 2.211 میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.208: $\lim(2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

جواب: (ا) $-\infty$ (ب) ∞

سوال 2.209: $\lim(\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

ا. $t \to 0^+$ ب. $t \to 0^-$

سوال 2.210: $\lim(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

جواب: (ا) ∞ (ب) ∞ (ج) ∞ (د) ∞

سوال 2.211: $\lim(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$

ا. $x \to 0^+$ ب. $x \to 0^-$ ج. $x \to 1^+$ د. $x \to 1^-$

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.212: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x\to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ $\lim_{x\to a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.213: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x\to c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.214: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.215: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ یا $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

سوال 2.216: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5+\delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟
جواب: $\delta = \epsilon^2, \lim_{x \to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

سوال 2.217: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4-\delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 2.218 اور سوال 2.219 میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 2.218: $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

سوال 2.219: $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال 2.220: (ا) $\lim_{x \to 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x \to 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو جزو کے نتائج کو دیکھ کر کیا $\lim_{x \to 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔
جواب: (ا) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

سوال 2.221: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (ا) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x \to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی با ضابطہ تعریف: سوال 2.222 تا سوال 2.225 میں دیے گئے فقروں کو حد کی با ضابطہ تعریف کی استعمال سے ثابت کریں۔

سوال 2.222: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال 2.223: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال 2.224: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال 2.225: $\lim\limits_{x \to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

یک طرفہ لا متناہی حد کی باضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لا متناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $0 < \delta$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لا متناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to x_0^+} = \infty$$

□

سوال 2.226: درج بالا تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے درج ذیل صورتوں کے لئے قابل استعمال بنائیں۔

ا. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty$

ب. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

ج. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

جواب: (ا) ہر مثبت حقیقی عدد B کے لئے ایسا مطابقتی عدد $0 < \delta$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لئے $f(x) > B$ ہے۔ (ب) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $0 < \delta$ موجود ہے کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔ (ج) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $0 < \delta$ موجود ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لئے $f(x) < -B$ ہے۔

یک طرفہ لا متناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال 2.227 تا سوال 2.232 میں دیے گئے فقروں کو ثابت کریں۔

سوال 2.227: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

سوال 2.228: $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

سوال 2.229: $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

سوال 2.230: $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

سوال 2.231: $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$

سوال 2.232: $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

2.5 استمرار

تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل کو ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے نا کہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظر انداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہو۔

اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاہد ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن مالیکیول میں ایٹم صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی در حقیقت ذراتی ہے اور گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتی ہے نا کہ تمام تعدد پر استمراری خارج کرتی ہے۔ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر میں غیر مسلسل تفاعل کی استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا ہے۔

اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہو گا یعنی **اندرونی نقطے**[10] (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلا وقفے کے اندر پائے جاتے ہیں)، **بائیں سر نقطے**[11] اور **دائیں سر نقطے**[12]۔

تعریف: **اندرونی نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطہ پر f استمراری ہو گا۔

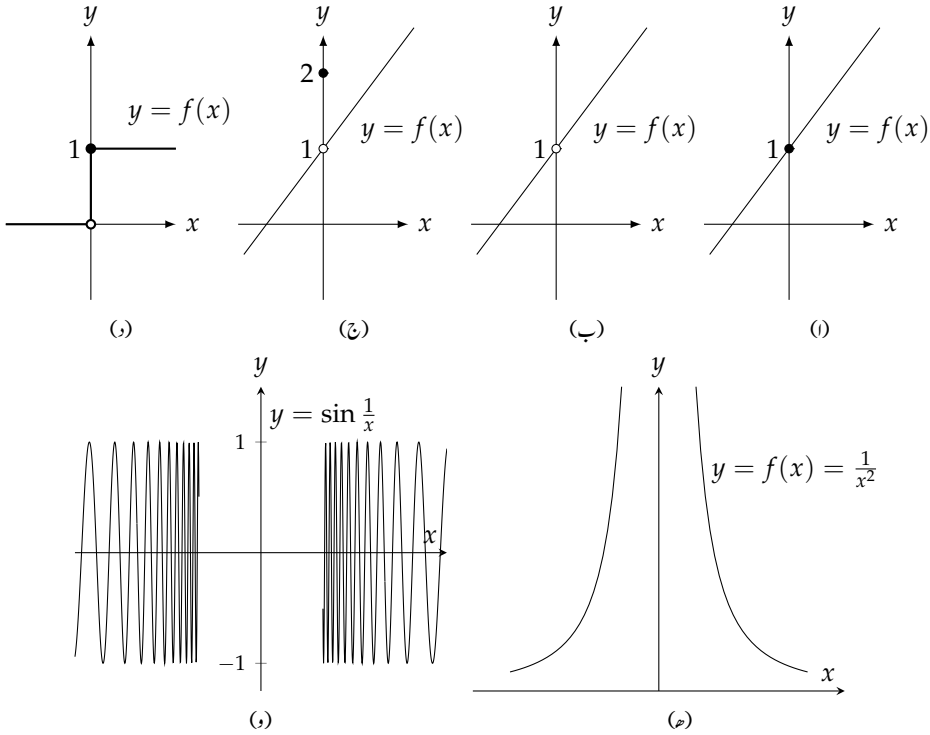
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

□

شکل 2.61 میں $x = 0$ پر (ا) استمراری ہے۔اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کی بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔انہیں **قابل ہٹاو**[13] عدم استمرار کہتے ہیں۔ان دونوں میں $x \to 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتا ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے۔

شکل 2.61 میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود نہیں ہیں لہٰذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جا سکتی ہے۔ (د) میں **چھلانگ عدم استمرار**[14] پایا جاتا ہے: اس کے یک طرفہ حد پائے جاتے

---

[10] interior points
[11] left endpoints
[12] right endpoints
[13] removable
[14] jump discontinuity

شکل 2.61: $x = 0$ پر تفاعل (ا) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (و) غیر استمراری ہیں۔

ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں ہیں۔ (ہ) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا **لامتناہی عدم استمرار**[15] پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لئے غیر استمراری ہے کہ $x \to 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا ہے۔ (و) میں **ارتعاشی عدم استمرار**[16] پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لئے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا نہ جائے۔

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

تعریف: **بائیں سر نقطہ اور دائیں سر نقطہ پر استمرار**
اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

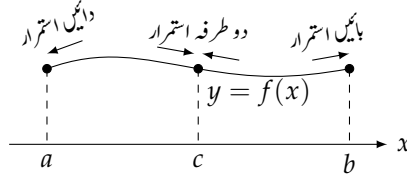
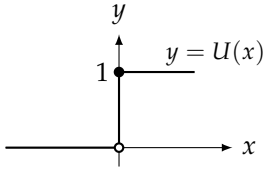
ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔

□

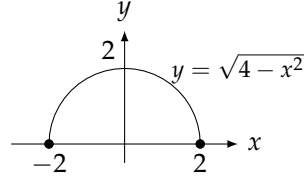
عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل **دائیں استمراری**[17] ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت **بائیں استمراری**[18] ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور بائیں استمراری ہو (شکل 2.62)۔

مثال 2.30: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل 2.63)۔

---

[15] infinite discontinuity
[16] oscillating discontinuity
[17] right-continuous
[18] left-continuous

شکل 2.62: نقطہ a ، b اور c پر استمرار

شکل 2.63: پورے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری

شکل 2.64: یہ تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے

□

مثال 2.31: شکل 2.64 میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نا بائیں استمراری ہے اور نا ہی استمراری ہے۔ □

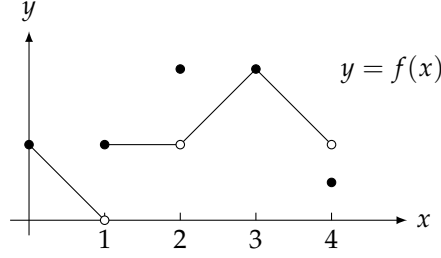
ہم نقطے پر استمرار کو ایک پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

پرکھ استمرار
نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

1. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے ($x \to c$ پر f کا حد پایا جاتا ہے)
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کا حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لئے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

مثال 2.32: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.65 میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کی استمرار پر بحث کریں۔

حل: پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 2.65: تفاعل f بند وقفہ $[0,4]$ پر معین ہے۔یہ تفاعل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استمراری ہے جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(0)$ موجود ہے $(f(0) = 1)$
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)
3. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)

ب. چونکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہٰذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا ہے: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

1. $f(1)$ موجود ہے ($f(1) = 1$)
2. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ (نقطہ $x = 1$ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)
3. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (دائیں ہاتھ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہیں۔)

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ کی بنا $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

1. $f(3)$ موجود ہے ($f(3) = 2$)
2. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ (نقطہ $x = 2$ پر حد موجود ہے۔)
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)

ھ. چونکہ $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہٰذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا ہے۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ 2.1 کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعل کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ 2.6: الجبرائی میل کا استمرار
اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

1. $f + g$ اور $f - g$
2. fg
3. kf ، جہاں k کوئی عدد ہے
4. $\frac{f}{g}$ (بشرطیکہ $g(c) \neq 0$ ہو)
5. $(f(x))^{m/n}$ (بشرطیکہ $(f(x))^{m/n}$ اس وقفے پر معین ہو جس پر c پایا جاتا ہے، اور m اور n عدد صحیح ہیں۔)

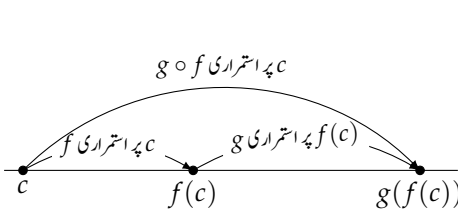
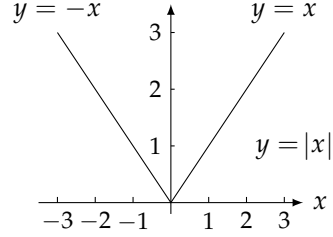
درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ 2.7: کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی استمرار
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر ہر کثیر رکنی استمراری ہو گا۔ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال 2.33: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x-2)$ استمراری ہیں۔تفاعل

$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x-2)}$$

ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔ □

مثال 2.34: $f(x) = |x|$ کی استمرار
x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل 2.66)۔ $x > 0$ کے لئے $f(x) = x$ ہو گا جو کثیر رکنی ہے۔اسی طرح $x < 0$ کے لئے $f(x) = -x$ ہو گا جو ایک اور کثیر رکنی ہے۔آخر میں مبدا پر $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$ ہے۔
□

شکل 2.66: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا ہے (مثال 2.34)۔

شکل 2.67: مرکب تفاعل کی استمرار۔

مثال 2.35: **تکونیاتی تفاعل کی استمرار**

باب 3 میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہے لہٰذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

□

مسئلہ 2.8: **مرکبات کی استمرار**

اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہو گا (شکل 2.67)۔

مرکب کی استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لئے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

مثال 2.36: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

(ا) $y = \sqrt{x}$ — مسئلہ 2.6 اور 2.7 (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)

(ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ — مسئلہ 2.7 اور مسئلہ 2.8 (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب)

(ج) $y = \dfrac{x\cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ — مسئلہ 2.6، 2.7 اور 2.8 (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)

(د) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ — مسئلہ 2.7 اور 2.8 (حتمی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)

□

نقطے تک استمراری توسیع

ہم نے مثال 2.13 میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کا اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتا ہے جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو لیکن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک **استمراری توسیع**[19] کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو **وسیع تفاعل**[20] کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کے استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کی اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 2.37: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کا $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

حل: اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کا حد درج ذیل ہے۔

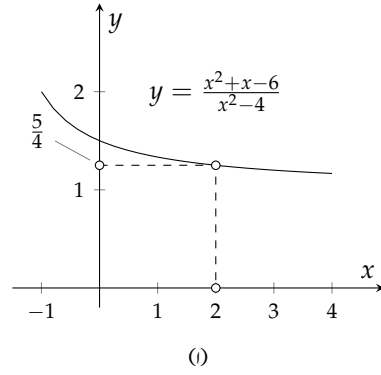
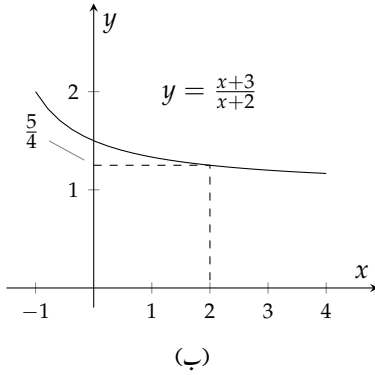
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل f کی ترسیم شکل 2.68 میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے مگر اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا ہے۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

---

[19] continuous extension
[20] extended function

شکل 2.68: تفاعل $f(x)$ اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

وقفوں پر استمرار

ایک تفاعل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ایسا تفاعل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

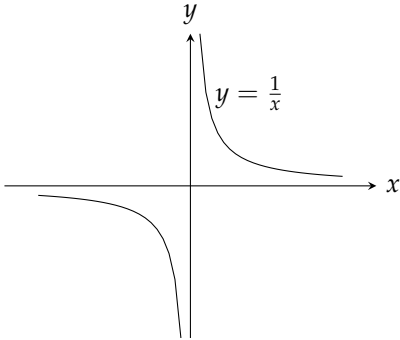
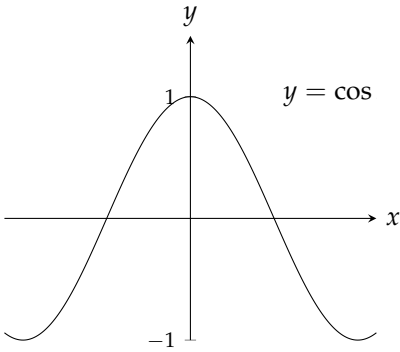
اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تفاعل کی قیمت برابر ہوں تب f **وقفہ پر استمراری**[21] کہلائے گا۔جو تفاعل I پر استمراری ہو یہ تفاعل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال 2.38: وقفوں پر استمراری تفاعل
شکل 2.69 میں وقفوں پر استمراری تفاعل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔ □

وقفوں پر استمراری تفاعل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی بنا یہ ریاضیات کے لئے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ان میں ایک **متوسط قیمت خاصیت**[22] ہے۔ اگر دو اعداد کے بیچ تمام قیمتیں لئے بغیر تفاعل ان قیمتوں کو نہ لیتا ہو تب یہ تفاعل **متوسط قیمت خاصیت** رکھتا ہے۔

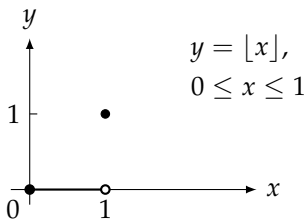
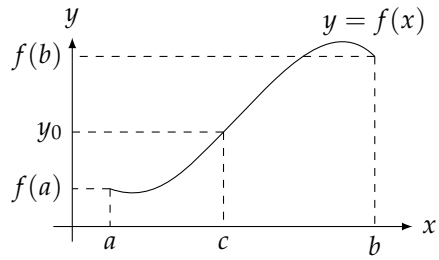
مسئلہ 2.9: **مسئلہ متوسط قیمت**
فرض کریں کہ تفاعل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ تب اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا کہ $f(c) = y_0$ ہو (شکل 2.70)۔

---

[21] continuous on interval
[22] intermediate value property

(ا) $[-2,2]$ پر استمراری

(ب) $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر استمراری

(ج) $(-\infty,0)$ اور $[0,\infty)$ پر استمراری

(د) $(-\infty,\infty)$ پر استمراری

شکل 2.69: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال 2.38)

شکل 2.70: وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ ہر قیمت رکھتا ہے

شکل 2.71: تفاعل $y=\lfloor x \rfloor, 0\le x\le 1$ کوئی بھی قیمت $f(0)=0$ اور $f(1)=1$ کے بیچ قبول نہیں کرتا ہے۔

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلٰی کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی مکملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کی استمرار ضروری ہے۔اگر I میں صرف ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔اس کی ایک مثال شکل 2.71 میں دی گئی ہے۔

ترسیم کرنے کا نتیجہ: ربط

مسئلہ 2.9 کی بنا وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی ہے۔اس میں عددی صحیح زینہ تفاعل $\lfloor x \rfloor$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے ہیں اور نا ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

تلاشِ جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا **صفر**[23] یا **جذر**[24] کہتے ہیں۔مسئلہ 2.9 کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت $(\pm)$ تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی ترسیم x محور کو f کی جذر پر قطع کرتی ہے۔ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ یہ کہاں x محور کو قطع کرتی ہے۔ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت دیکھتے ہیں۔اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک کا جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔شکل 2.72 میں، قدم با قدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب حاصل کیا جا سکتا ہے جیسے آپ حصہ 4.8 میں دیکھیں گے۔

سوالات

استمرار بذریعہ ترسیم

سوال 2.233 تا سوال 2.236 میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استمراری ہے۔نا ہونے کی صورت میں کہاں تفاعل غیر استمراری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

سوال 2.233: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل 2.73-ا میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: نہیں؛ $x = 2$ پر غیر استمراری ہے؛ $x = 2$ پر غیر معین ہے۔

سوال 2.234: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل 2.73-ب میں دکھایا گیا ہے۔

---
[23] zero
[24] root

(ا) جذر (صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

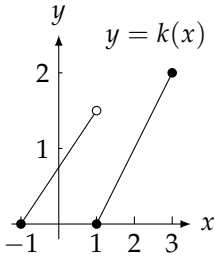
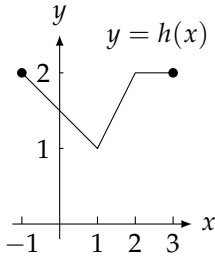
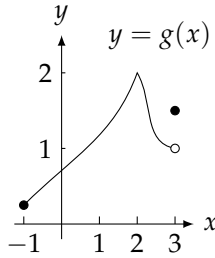
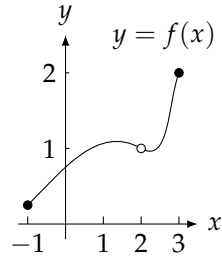
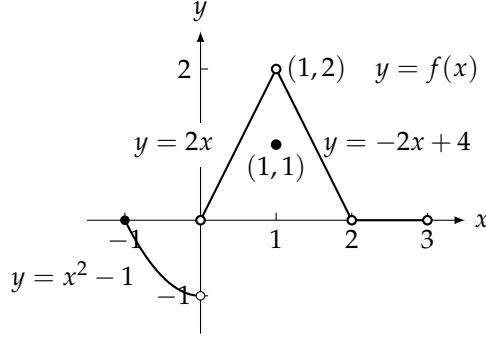
(ب) جذر (صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(ج) جذر (صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(د) جذر (صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(ہ) جذر (صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

(و) جذر (صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

شکل 2.72: ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم با قدم حصول۔

شکل 2.73: اشکال برائے سوال 2.233 تا سوال 2.236

شکل 2.74: ترسیم برائے سوال 2.237 تا سوال 2.242

سوال 2.235: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل 2.73-ج میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: استمراری

سوال 2.236: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل 2.73-د میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 2.237 تا سوال 2.242 درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل 2.74 میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

سوال 2.237: (ا) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟
(د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟
جواب: (ا) ہاں، (ب) ہاں، (ج) ہاں، (د) ہاں

سوال 2.238: (ا) کیا $f(x)$ موجود ہے؟
(ب) کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟
(ج) کیا $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ہے؟
(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال 2.239: (ا) کیا $x = 2$ پر f معین ہے؟
(ب) کیا $= 2$ پر f استمراری ہے؟
جواب: (ا) نہیں، (ب) نہیں

سوال 2.240: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال 2.241: $x = 2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟
جواب: 0

سوال 2.242: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پرکھ استمرار کا استعمال

کن نقطوں پر سوال 2.243 اور سوال 2.244 میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جا سکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.243: حصہ 2.4 میں سوال 2.166 کے تفاعل۔
جواب: 1 نا قابل ہٹاو؛ 0 قابل ہٹاو

سوال 2.244: حصہ 2.4 سوال 2.167 میں کے تفاعل۔

سوال 2.245 تا سوال 2.260 میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال 2.245: $y = \frac{1}{x-2} - 3x$
جواب: تمام ماسوائے $x = 2$

سوال 2.246: $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال 2.247: $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$
جواب: تمام ماسوائے $x = 3$ اور $x = 1$

سوال 2.248: $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال 2.249: $y = |x-1| + \sin x$
جواب: تمام x

سوال 2.250: $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال 2.251: $y = \frac{\cos x}{x}$
جواب: تمام ماسوائے $x = 0$

سوال 2.252: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال 2.253: $y = \csc x$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 2.254: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 2.255: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$
جواب: تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n طاق عدد صحیح ہے۔

سوال 2.256: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال 2.257: $y = \sqrt{2x+3}$
جواب: تمام $x > -\frac{3}{2}$

سوال 2.258: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال 2.259: $y = (2x-1)^{1/3}$
جواب: تمام x

سوال 2.260: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کے حد

سوال 2.261 تا سوال 2.266 میں حد تلاش کریں۔

سوال 2.261: $\lim_{x \to \pi} \sin(x - \sin x)$
جواب: 0

سوال 2.262: $\lim_{t \to 0} \sin(\frac{\pi}{2} \cos(\tan t))$

سوال 2.263: $\lim_{y \to 1} \sec(y \sec^2 y - \tan^2 y - 1)$
جواب: 1

سوال 2.264: $\lim_{x \to 0} \tan(\frac{\pi}{4} \cos(\sin x^{1/3}))$

سوال 2.265: $\lim_{t\to 0} \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}}\right)$

جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سوال 2.266: $\lim_{x\to \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

استمراری توسیع

سوال 2.267: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x=3$ پر $g(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ کی استمراری توسیع ہو۔

جواب: $g(3)=6$

سوال 2.268: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t=2$ پر $h(t)=\frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 2.269: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s=1$ پر $f(s)=\frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔

جواب: $f(1)=\frac{3}{2}$

سوال 2.270: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x=4$ پر $g(x)=\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال 2.271: a کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<3 \\ 2ax, & x\geq 3 \end{cases}$ استمراری ہے؟

جواب: $a=\frac{4}{3}$

سوال 2.272: b کی کس قیمت کے لئے ہر x پر $g(x)=\begin{cases} x, & x<-2 \\ bx^2, & x\geq -2 \end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.273 تا سوال 2.276 میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کہ آیا مبدا پر اس کا استمراری توسیع پایا جاتا ہے۔اگر ایسا ہو تب $x=0$ پر وسیع تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبدا پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں مبدا پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 2.273: $f(x)=\frac{10^x-1}{x}$

سوال 2.274: $f(x)=\frac{10^{|x|}-1}{x}$

سوال 2.275: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال 2.276: $f(x) = (1+2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 2.277: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x = 0$ پر منفی اور $x = 1$ پر مثبت ہے۔ $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ مساوات $f(x) = 0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ ایک خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال 2.278: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال 2.279: دکھائیں کہ وقفہ $[-4, 4]$ میں مساوات $x^3 - 15x + 1 = 0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال 2.280: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2 + x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

سوال 2.281: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x) = x^3 - 8x + 10$ کی قیمت (ا) π ؛ (ب) $-\sqrt{3}$ ؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال 2.282: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔
(ا) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے جذر تلاش کریں۔
(ب) اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جہاں $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔
(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3 - 3x = 1$ ہو گا۔
(د) ان نقطوں کے x محدد تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3 - 3x$ خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔
(ہ) مساوات $x^3 - 3x - 1 = 0$ کو حل کریں۔

سوال 2.283: ایسا تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = 2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاو ہے۔

سوال 2.284: ایسا تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = -1$ پر جہاں اس کا نا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار نا قابل ہٹاو ہے۔

سوال 2.285: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل
(ا) اس حقیقت کو برائے کار لاتے ہوئے، کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ناطق } x \\ 0 & \text{غیر ناطق } x \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال 2.286: اگر $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0,1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.287: اگر تفاعل $h(x) = f(h) \cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.288: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ 2.8 کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.289: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا ہے وہ تفاعل اس وقفہ پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا ہے؟اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.290: کیا یہ درست ہے کہ ربڑ کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ بر قرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 2.291: مسئلہ مقررہ نقطہ
فرض کریں کہ وقفہ $0,1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0,1]$ میں ہر x کے لئے $0 \leq f(x) \leq 1$ ہے۔دکھائیں کہ $[0,1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہو گا۔ c کو f کا **مقررہ نقطہ**[25] کہتے ہیں۔

سوال 2.292: استمراری تفاعل کی علامت بر قرار رکھنے کی خاصیت
فرض کریں کہ وقفہ (a,b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔دکھائیں کے c کے ارد گرد وقفہ $c - \delta, c + \delta$ میں f کی علامت وہی ہو گی جو c پر $f(c)$ کی ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a,b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ہے ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملانے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال 2.293: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 سے اس حصے کا مسئلہ 2.6 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 2.294: دکھائیں کہ حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.2 اور مسئلہ 2.3 سے موجودہ حصے کا مسئلہ 2.7 کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے؟

سوال کا حل بذریعہ ترسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

---

[25] fixed point

سوال 2.295: $x^3 - 3x - 1 = 0$
جواب: $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

سوال 2.296: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال 2.297: $x(x-1)^2 = 1$
جواب: $x \approx 1.7549$ ایک جذر حاصل کریں۔

سوال 2.298: $x^x = 2$

سوال 2.299: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$
جواب: $x \approx 3.5156$

سوال 2.300: $x^3 - 15x + 1 = 0$ تین جذر تلاش کریں۔

سوال 2.301: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔
جواب: $x \approx 0.7391$

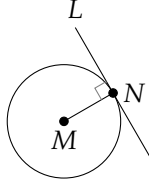
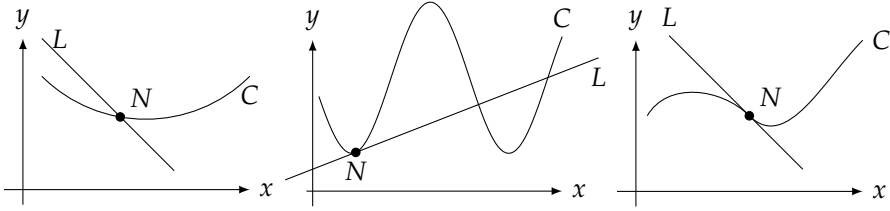
سوال 2.302: $2\sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

2.6 مماسی خط

حصہ 2.1 میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ہم سیکنٹ کی ڈھلوان کا حد تلاش کرتے ہوئے منحنی کا مماس حاصل کریں گے۔

منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

دائرے کی مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور N پر رداس کو عمودی ہے (شکل 2.75)۔ نقطہ N پر کسی اور منحنی C کے مماس سے کیا مطلب ہے؟ دائرے کی جیومیٹری کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

1. N سے C کی مرکز تک خط کو عمودی خط L ،
2. خط L منحنی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،
3. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کے ایک جانب رہتا ہے۔

شکل 2.75: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔

(ا) N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔

(ب) نقطہ N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔

(ج) اگرچہ L منحنی C کو ایک نقطہ N پر مس کرتا ہے، یہ منحنی کا مماس نہیں ہے۔

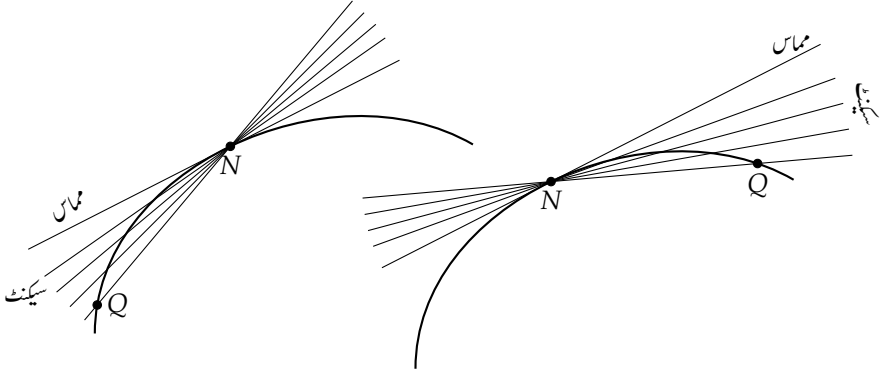
شکل 2.76: عمومی منحنی کے مماس۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لئے بلا تضاد درست نہیں ہیں۔ عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا ہے، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کہیں اور یا N پر منقطع سکتا ہے۔اس کے علاوہ ضروری نہیں ہے کہ منحنی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہوا سیدھا خط منحنی کا مماس ہو (شکل 2.76)۔

عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہو گا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھتے ہوئے N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل 2.77)۔اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

1. ہم سیکنٹ NQ کی ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

2. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

3. اگر یہ حد موجود ہو تب اس کو N پر منحنی کی ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کریں جس کی ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

شکل 2.77: نقطہ N کے دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہو گا۔

مثال 2.39: نقطہ $N(2,4)$ پر قطع مکافی $y = x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر قطع مکافی کی مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل 2.78)۔

حل: ہم $N(2,4)$ اور $Q(2+h,(2+h)^2)$ سے سیکنٹ گزار کر اس کی ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کی ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{(2+h)-(2)} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

اگر $h > 0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔اگر $h < 0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔دونوں صورتوں میں قطع مکافی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے نزدیک پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے نزدیک پہنچتی ہے جس سے سیکنٹ کی ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

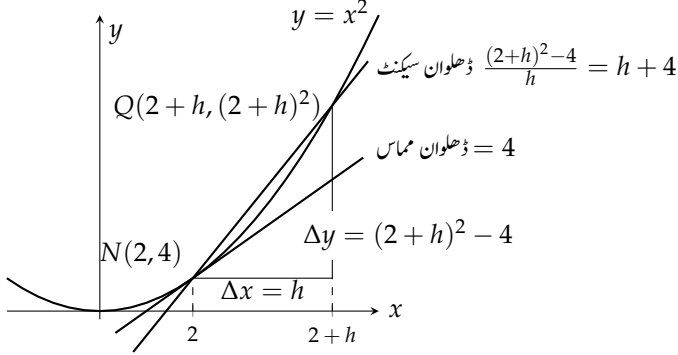
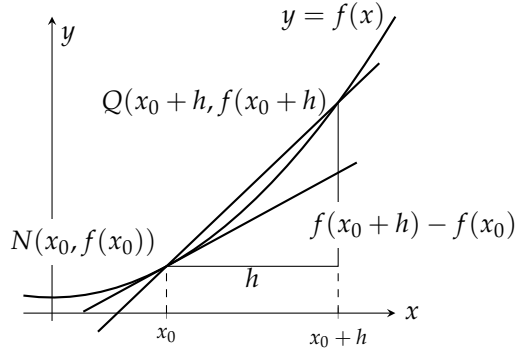
$$\lim_{h \to 0}(h+4) = 4$$

ہم N پر قطع مکافی کی ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔نقطہ N پر قطع مکافی کا مماس وہ خط ہے جس کی ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2,4)$ سے گزرتا ہے۔اس مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x-2) && \text{نقطہ ڈھلوان مساوات} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

□

تفاعل کی ترسیم کا مماس

نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم N اور $Q(x_0 + h, f(x_0+h))$ سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔اس کے بعد $h \to 0$ کرتے ہوئے اس سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں

شکل 2.78: قطع مکافی کا مماس (مثال 2.39)

شکل 2.79: مماس کی ڈھلوان $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ہو گی۔

(شکل 2.79)۔اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان مانا جاتا ہے اور اتنی ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر منحنی کا مماس قبول کیا جاتا ہے۔

تعریف : نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کی **ڈھلوان** درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔)}$$

N پر اس ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا **مماس** کہتے ہیں۔

□

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی صورتوں میں استعمال کرتے ہوئے متوقع جوابات حاصل کر کے یقین دہانی ہوتی ہے۔درج ذیل مثال دکھاتا ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی لکیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال 2.40: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال
دکھائیں کہ نقطہ (x_0, mx_0+b) پر خط $y = mx+b$ کا مماس یہی خط ہے۔
حل: ہم $f(x) = mx+b$ لیتے ہوئے قد با قدم چلتے ہیں۔
پہلا قدم: $f(x_0)$ اور $f(x_0=h)$ ڈھونڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= mx_0+b \\
f(x_0+h) &= m(x_0+h)+b = mx_0+mh+b
\end{aligned}$$

دوسرا قدم: ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m
\end{aligned}$$

تیسرا قدم: نقطہ ڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔نقطہ x_0, mx_0+b پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
y &= (mx_0+b)+m(x-x_0) \\
&= mx_0+b+mx-mx_0 \\
&= mx+b
\end{aligned}$$

□

مثال 2.41: (ا) $x=a$ پر منحنی $y=\frac{1}{x}$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
(ب) کس نقطے پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟
(ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہو گا؟
حل: (ا) یہاں $f(x)=\frac{1}{x}$ ہے اور $(a, \frac{1}{a})$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{a-(a-h)}{a(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}
\end{aligned}$$

(ا) دو نقطوں پر مماس کی ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے۔

(ب) مبدا کے قریب ڈھلوان زیادہ ہے۔

شکل 2.80: اشکال برائے مثال 2.41

دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim_{h\to 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h = 0$ پر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔

(ب) نقطہ $x = a$ پر $y = \frac{1}{x}$ کی ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پر کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

اس کے حل $a = 2$ اور $a = -2$ ہیں لہٰذا منحنی $y = \frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $(2, \frac{1}{2})$ اور $(-2, -\frac{1}{2})$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل 2.80-ا)۔

(ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گی۔یوں $a \to 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے اور مماس انتصابی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔یہی کچھ $a \to 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔جیسے جیسے مبدا سے a دور ہٹتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل 2.80-ب)۔ □

شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا **تفریقی حاصل تقسیم**[26] کہتے ہیں۔اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کا حد پایا جاتا ہو، اس حد کو x_0 پر f کا **تفرق**[27] کہتے ہیں۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سیکنٹ کی ڈھلوان تصور کریں تب تفرق نقطہ x_0 پر منحنی اور مماس کی ڈھلوان دیتا ہے۔اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ 2.1 میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر باب 3 میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

---

[26] difference quotient
[27] derivative

مثال 2.42: لمحاتی رفتار (حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2)
حصہ 2.1 کی مثال 2.1 اور مثال 2.2 میں سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ پہلی t سیکنڈوں میں یہ $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیہ میں اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لمحاتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لمحاتی رفتار کیا ہو گی؟
حل: ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

ہو گی۔ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہماری پہلی جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h \to 0} 4.9(2 + h) = 4.9(2 + 0) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

□

سوالات

سوال 2.303 تا سوال 2.306 میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کی ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سیکنٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا ہے لہٰذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)

سوال 2.303: شکل 2.81
جواب: $N_1 : m = -2.25, \quad N_2 : m = 6$

سوال 2.304: شکل 2.82
جواب: $N_1 : m = -2, \quad N_2 : m = 2$

سوال 2.305: شکل 2.83
جواب: $N_1 : m = -1.5, \quad N_2 : m = 0.5$

سوال 2.306: شکل 2.84
جواب: $N_1 : m = 2, \quad N_2 : m = -2$

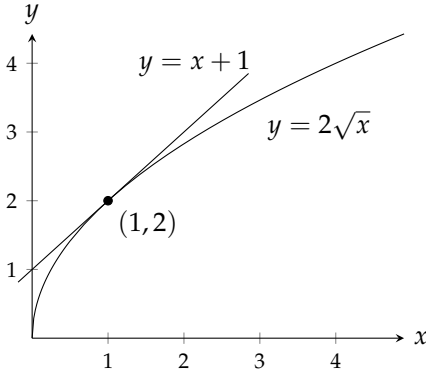
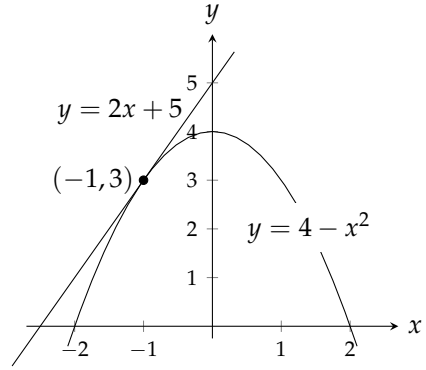
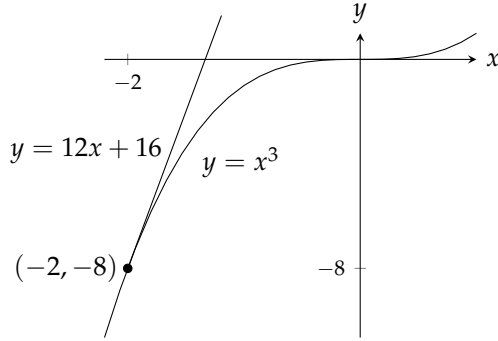
سوال 2.307 تا سوال 2.312 میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 2.307: $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$
جواب: $y = 2x + 5$ شکل 2.85

شکل 2.81: منحنی برائے سوال 2.303

شکل 2.82: منحنی برائے سوال 2.304

شکل 2.83: منحنی برائے سوال 2.305

شکل 2.84: منحنی برائے سوال 2.306

شکل 2.86: ترسیم برائے سوال 2.309

شکل 2.85: ترسیم برائے سوال 2.307

شکل 2.87: ترسیم برائے سوال 2.311

سوال 2.308: $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1,1)$

سوال 2.309: $y = 2\sqrt{x}, \quad (1,2)$
جواب: $y = x + 1$ شکل 2.86

سوال 2.310: $y = \frac{1}{x^2}, \quad (-1,1)$

سوال 2.311: $y = x^3, \quad (-2,-8)$
جواب: $y = 12x + 16$ شکل 2.87

سوال 2.312: $y = \frac{1}{x^3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$

سوال 2.313 تا سوال 2.320 میں دیے نقطے پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 2.313: $f(x) = x^2 + 1, \quad (2,5)$
جواب: $m = 4, \quad y - 5 = 4(x-2)$

سوال 2.314: $f(x) = x - 2x^2, \quad (1,-1)$

سوال 2.315: $g(x) = \frac{x}{x-2}, \quad (3,3)$
جواب: $m = -2, \quad y - 3 = -2(x-3)$

سوال 2.316: $g(x) = \frac{8}{x^2}, \quad (2,2)$

سوال 2.317: $h(t) = t^3, \quad (2,8)$
جواب: $m = 12, \quad y - 8 = 12(t-2)$

سوال 2.318: $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1,4)$

سوال 2.319: $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4,2)$
جواب: $m = \frac{1}{4}, \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$

سوال 2.320: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8,3)$

سوال 2.321 تا سوال 2.324 میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 2.321: $y = 5x^2, \quad x = -1$
جواب: $m = -10$

سوال 2.322: $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

سوال 2.323: $y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 3$
جواب: $m = -\frac{1}{4}$

سوال 2.324: $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال 2.325: کس نقطے پر تفاعل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟
جواب: $(-2, -5)$

سوال 2.326: کس نقطے پر تفاعل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال 2.327: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کی ڈھلوان -1 ہے اور جو تفاعل $y = \frac{1}{x-1}$ کی مماس ہیں۔
جواب: $y = -(x+1), \quad y = -(x-3)$

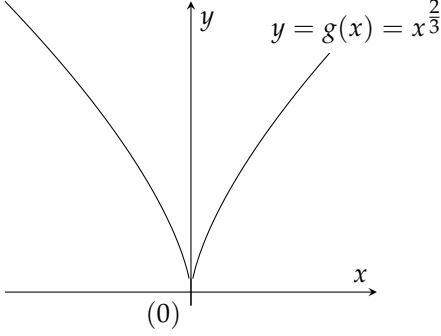
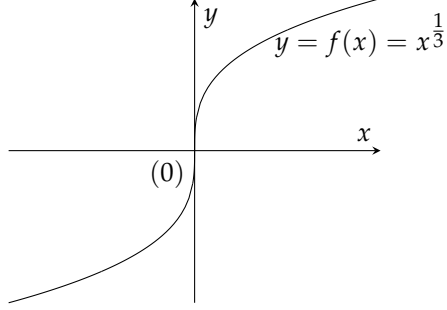
سوال 2.328: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تفاعل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

شرح تبدیلی

سوال 2.329: ایک جسم کو ساکن حالت سے $100\,\mathrm{m}$ بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟
جواب: $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 2.330: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہے؟

سوال 2.331: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟
جواب: 6π

سوال 2.332: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟

(ب) مبدا پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

(ا) مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔

شکل 2.88: انتصابی مماس

مماس کے لئے پرکھ

سوال 2.333: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 2.334: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

انتصابی مماس

اگر $\infty = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $\lim_{h\to 0}$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔

نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل 2.88-ا)۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

آئیں اب مبدا پر تفاعل $y = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (شکل 2.88-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\frac{2}{3}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

اب چونکہ مبدا تک دائیں سے پہنچنے سے حد ∞ جبکہ مبدا تک بائیں سے پہنچنے سے حد $-\infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مبدا پر درج بالا حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 2.335: کیا درج ذیل تفاعل کا مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

جواب: ہاں

سوال 2.336: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0,1)$ پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

سوال 2.337 تا سوال 2.346 میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق کریں۔

سوال 2.337: $y = x^{\frac{2}{5}}$
جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 2.338: $y = x^{\frac{4}{5}}$

سوال 2.339: $y = x^{\frac{1}{5}}$
جواب: (ا) $x = 0$ پر

سوال 2.340: $y = x^{\frac{3}{5}}$

سوال 2.341: $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$
جواب: (ا) کہیں نہیں

سوال 2.342: $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

سوال 2.343: $y = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$
جواب: (ا) $x = 1$ پر

سوال 2.344: $y = x^{\frac{1}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

سوال 2.345: $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$
جواب: (ا) $x = 0$ پر

سوال 2.346: $y = \sqrt{|4-x|}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 2.347 تا سوال 2.350 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0 - \frac{1}{2} \le x \le x_0 + 3$ پر تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تفریقی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h = 3, 2, 1$ کے لئے سیکنٹ خطوط $y = f(x_0) + q(x - x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (ا) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تفاعل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 2.347: $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال 2.348: $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال 2.349: $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 2.350: $f(x) = \cos x + 4\sin 2x, \quad x_0 = \pi$

باب 3

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

3.1 تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

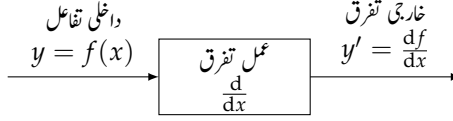
اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

---

[1] derivative

داخلی تفاعل $y = f(x)$ → عمل تفرق $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ → خارجی تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

شکل 3.1: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

□

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[2] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل 3.1)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو " x کے لحاظ سے y کو تفرق" پڑھتے ہیں۔اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو " x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

---

[2] differentiable

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال 2.40 اور مثال 2.41 میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال 2.40 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال 2.41 میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{3.1}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

1. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

2. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

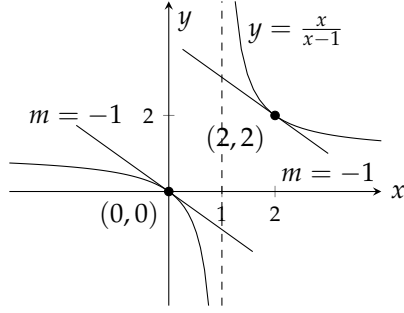
3. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال 3.1:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟

شکل 3.2: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہو گا (مثال 3.1)۔

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔
دوسرا قدم:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y = f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

اس مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x = 2$ اور $x = 0$ درکار نتائج ہیں (شکل 3.2)۔ □

مثال 3.2:

1. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

2. $x=4$ پر تفاعل $y=\sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) **پہلا قدم:**

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad f(x+h)=\sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}&=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\&=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\&=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل 3.3 دیکھیں۔

(ب) $x=4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=4}=\frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4}=\frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y=2+\frac{1}{4}(x-4)=\frac{1}{4}x+1$$

□

نقطہ $x=a$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

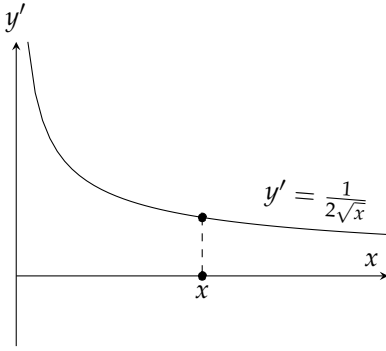
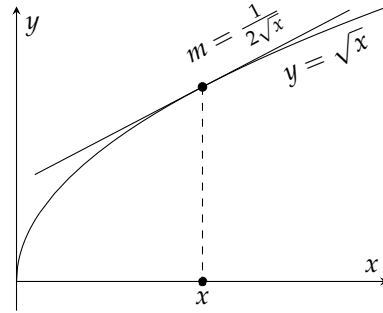
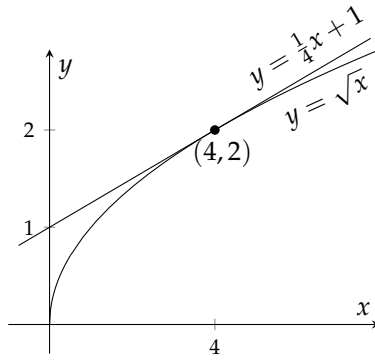
$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

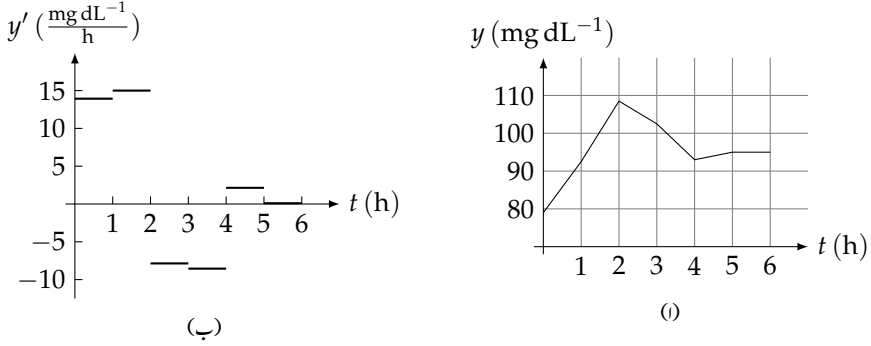
کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x=a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$

(ب) $x > 0$ کے لئے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4, 2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$

شکل 3.3: اشکال برائے مثال 3.2۔ نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔

شکل 3.4: (ا) قبل پرواز پر کھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پر کھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تا کہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال 3.3: دوا

23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[3] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[4] سے جزیرہ سانٹورینی[5] تک اڑا کر 115.11 کلو میٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[6] کے طلبہ نے تیار کیا۔اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل 3.4-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل 3.4-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\text{mg dL}^{-1}$ سے بڑھ کر $83\,\text{mg dL}^{-1}$ ہو جاتا ہے۔یوں تبدیل $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\text{mg dL}^{-1}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\text{h}$ سے تقسیم کرتے ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

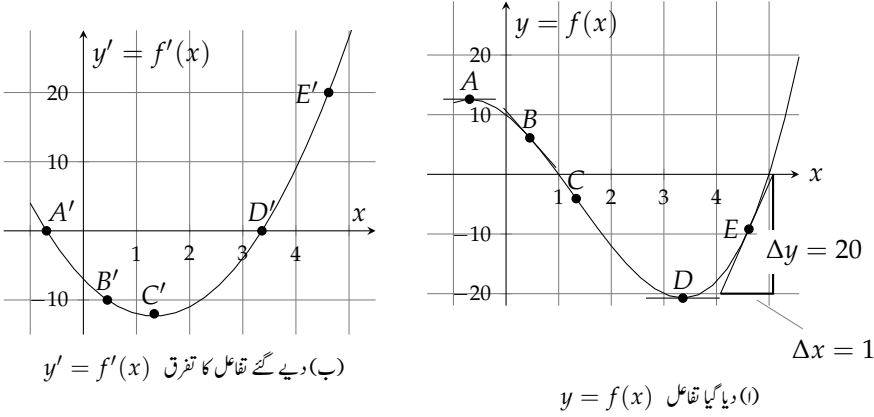
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\text{mg dL}^{-1}}{\text{h}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

---

[3] Daedalus
[4] Crete
[5] Santorini
[6] MIT

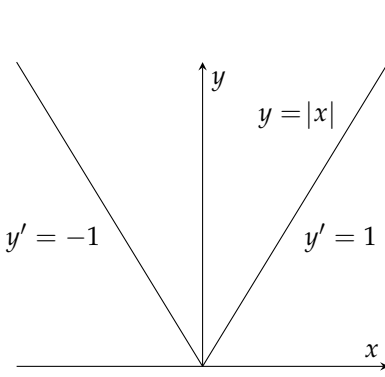
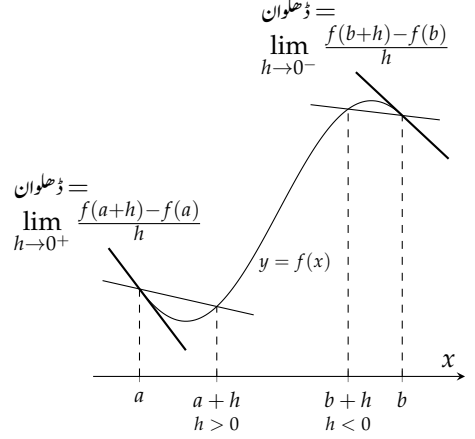
(ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$

شکل 3.5: اشکال برائے مثال 3.5

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں للذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ان نقطوں پر تفرق سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.4: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 3.5-ا میں دکھایا گیا ہے۔اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل 3.5-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل 3.5-ب کے مطابقتی نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □

شکل 3.7: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال 3.5)۔

شکل 3.6: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل 3.6)۔

$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a \text{ پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h\to0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad b \text{ پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ 2.5 کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال 3.5: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot x) = 1, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot x) = -1$$

ہے (شکل 3.7)۔چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} && \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h|=h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} && \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h|=-h \text{ ہو گا} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1 \end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

1. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل 3.8-ا)۔

2. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ب)۔

3. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل 3.8-ج)۔

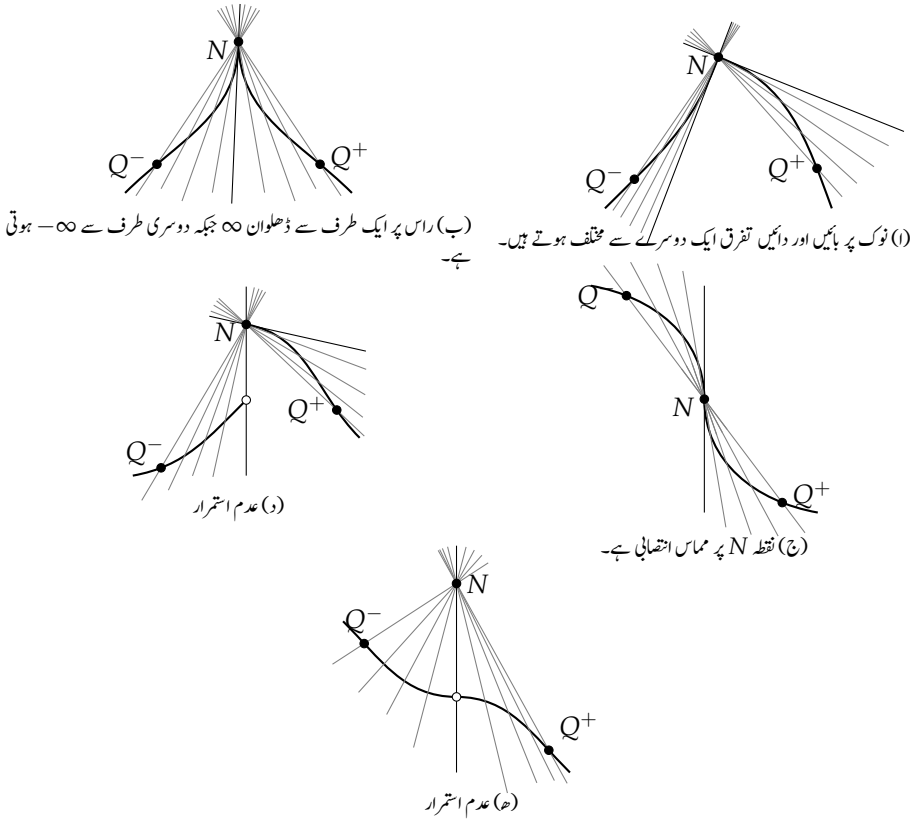
4. عدم استمرار (شکل 3.8-د اور شکل 3.8-ہ)۔

(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔

(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔

(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔

(د) عدم استمرار

(ھ) عدم استمرار

شکل 3.8: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل نا قابل تفرق ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہو گا۔

مسئلہ 3.1: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استمراری ہو گا۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ 2.1 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

انتباہ مسئلہ 3.1 کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال 3.5 میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل 3.9) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائشٹراس[7] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

---

[7] [1815-1897]

شکل 3.9: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔

شکل 3.10: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[8] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 3.2: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ 3.2 (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل 3.10)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ان کے جواب کو ہم باب 5 میں دیکھیں گے۔

سوالات

تفرقی تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال 3.1 تا سوال 3.6 میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

---

[8] chaos theory

سوال 3.1: $f(x)=4-x^2;\quad f'(-3),f'(0),f'(1)$
جواب: $-2x,6,0,-2$

سوال 3.2: $F(x)=(x-1)^2+1;\quad F'(-1),F'(0),F'(2)$

سوال 3.3: $g(t)=\frac{1}{t^2};\quad g'(-1),g'(2),g'(\sqrt{3})$
جواب: $-\frac{2}{t^3},2,-\frac{1}{4},-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

سوال 3.4: $k(z)=\frac{1-z}{2z};\quad k'(-1),k'(1),k'(\sqrt{2})$

سوال 3.5: $p(\theta)=\sqrt{3\theta};\quad p'(1),p'(3),p'(\frac{2}{3})$
جواب: $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}},\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2},\frac{3}{2\sqrt{2}}$

سوال 3.6: $r(s)=\sqrt{2s+1};\quad r'(0),r'(1),r'(\frac{1}{2})$

سوال 3.7 تا سوال 3.12 میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.7: $y=2x^3;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
جواب: $6x^2$

سوال 3.8: $r=\frac{s^3}{2}+1;\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$

سوال 3.9: $s=\frac{t}{2t+1};\quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$
جواب: $\frac{1}{(2t+1)^2}$

سوال 3.10: $v=t-\frac{1}{t};\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال 3.11: $p=\frac{1}{\sqrt{q+1}};\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$
جواب: $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

سوال 3.12: $z=\frac{1}{\sqrt{3w-2}};\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال 3.13 تا سوال 3.16 میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 3.13: $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$
جواب: $1 - \frac{9}{x^2}, 0$

سوال 3.14: $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال 3.15: $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$
جواب: $3t^2 - 2t, 5$

سوال 3.16: $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال 3.17 تا سوال 3.18 میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.17: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4)$
جواب: $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y - 4 = -\frac{1}{2}(x-6)$

سوال 3.18: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2)$

سوال 3.19 تا سوال 3.22 میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 3.19: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$
جواب: 6

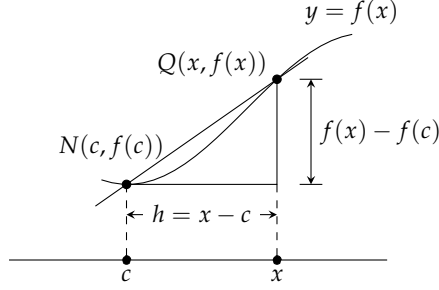
سوال 3.20: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال 3.21: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$
جواب: $\frac{1}{8}$

سوال 3.22: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$

تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ

تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل 3.11 میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{3.2}$$

شکل 3.11: حصول تفرق کا متبادل کلیہ

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال 3.23 تا سوال 3.26 میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.23: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$
جواب: -1

سوال 3.24: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

سوال 3.25: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$
جواب: $-\frac{1}{4}$

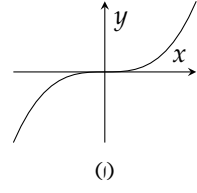
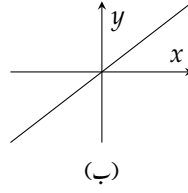
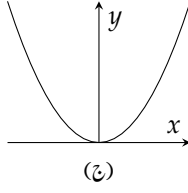
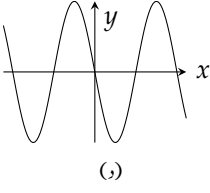
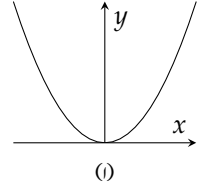
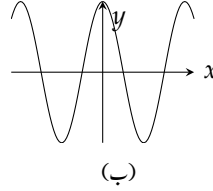
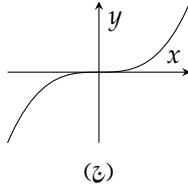
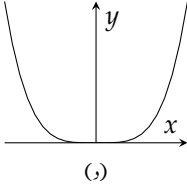
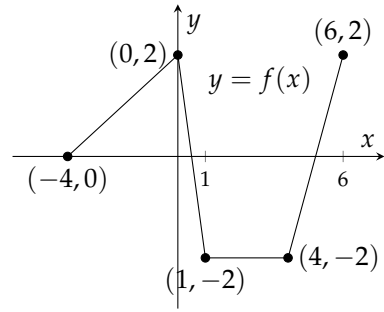
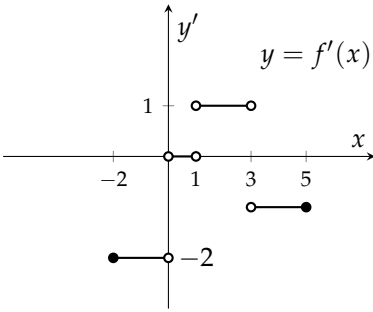
سوال 3.26: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

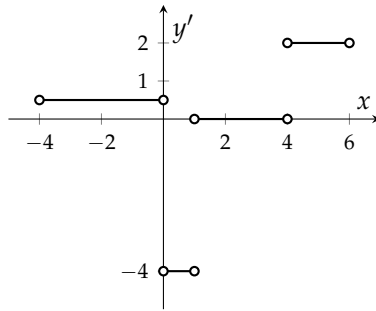
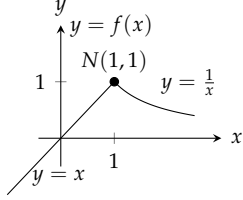
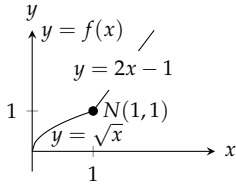
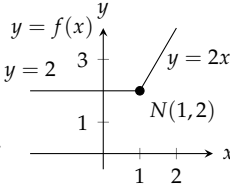
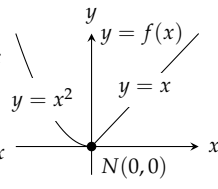
ترسیمات سوال 3.27 تا سوال 3.30 میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل 3.12 میں تلاش کریں۔

سوال 3.27: شکل 3.13-ا
جواب: شکل 3.12-ب

سوال 3.28: شکل 3.13-ب
جواب: شکل 3.12-د

سوال 3.29: شکل 3.13-ج
جواب: شکل 3.12-ج

سوال 3.30: شکل 3.13-د
جواب: شکل 3.12-ا

شکل 3.12: تفاعل کے تفرق

شکل 3.13: اصل تفاعل

شکل 3.15: تفاعل کے تفرق کا ترسیم برائے سوال 3.32

شکل 3.14: ترسیم برائے سوال 3.31

شکل 3.16: جواب برائے سوال 3.32

شکل 3.20 شکل 3.19 شکل 3.18 شکل 3.17

سوال 3.31: قطعات کو جوڑ کر شکل 3.14 حاصل کی گئی ہے۔(ا) وقفہ $[-4,6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتصابی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گا۔

جواب: (ا) $x = 0, 1, 4$ ؛ (ب) شکل 3.16

سوال 3.32: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی
(ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f ترسیم کو وقفہ $[-2,5]$ پر کریں۔

1. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔
2. ترسیم کو نقطہ $(-2,3)$ سے شروع کریں۔
3. تفاعل کا تفرق شکل 3.15 میں دکھایا گیا ہے۔

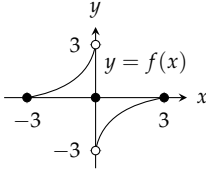
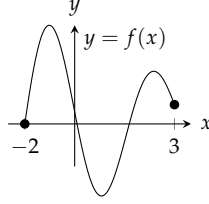
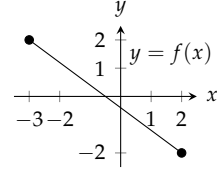
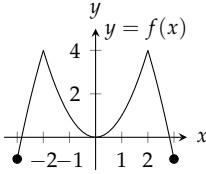
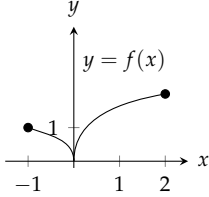
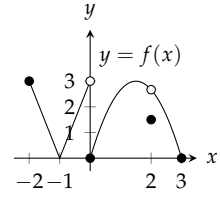
(ب) نقطہ $(-2,0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

سوال 3.33 تا سوال 3.36 میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل نا قابل تفرق ہے۔

سوال 3.33: تفاعل کو شکل 3.17 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ ہے لہٰذا $x = 0$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

سوال 3.34: تفاعل کو شکل 3.18 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3.35: تفاعل کو شکل 3.19 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: چونکہ $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x = 1$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

سوال 3.36: تفاعل کو شکل 3.20 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 3.37 تا سوال 3.42 میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن نا قابل تفرق، (ج) غیر استمراری اور نا قابل تفرق ہے؟

سوال 3.37: ترسیم شکل 3.21 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -3 \le x \le 2$ ہے۔

جواب: (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

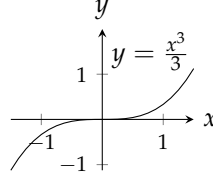
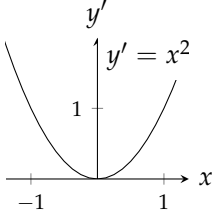
سوال 3.38: ترسیم شکل 3.22 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 3.39: ترسیم شکل 3.23 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -3 \le x \le 3$ ہے۔
جواب: (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x = 0$

سوال 3.40: ترسیم شکل 3.24 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -2 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 3.41: ترسیم شکل 3.25 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -1 \le x \le 2$ ہے۔
جواب: (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں۔

سوال 3.42: ترسیم شکل 3.26 میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D: -3 \le x \le 3$ ہے۔

سوال 3.43 تا سوال 3.46 میں درج ذیل کریں۔

شکل 3.27: ترسیم برائے شکل 3.45

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (باب 4 میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال 3.43: $y = -x^2$
جواب: (ا) $y' = -2x$ (ج) $x < 0, x = 0, x > 0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

سوال 3.44: $y = -\frac{1}{x}$

سوال 3.45: $y = \frac{x^3}{3}$
جواب: (ا) $y' = x^2$، (ب) شکل 3.27، (ج) $x \neq 0$ ، $x = 0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

سوال 3.46: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال 3.47: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہو گا۔

سوال 3.48: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.49: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں، $y + 16 = -(x - 3)$ نقطہ $(3, -16)$ پر مماس ہے۔

سوال 3.50: کیا منحنی $y=\sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x=-1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال 3.51: کیا $(-\infty,\infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y=\lfloor x \rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: نہیں، چونکہ تفاعل $y=\lfloor x \rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

سوال 3.52: $f(x)=|x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y=\frac{|x|-0}{x-0}=\frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال 3.53: یہ جانتے ہوئے کہ $x=x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x=x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں؛ $(-f)'(x)=-(f'(x))$

سوال 3.54: کیا $t=7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t=7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.55: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0)=h(0)=0$ ہے۔ کیا $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $g(t)=mt$ اور $h(t)=t$ کے لئے $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}=m$ ہو گا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

سوال 3.56: (ا) فرض کریں کہ $-1\le x\le 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $|f(x)|\le x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x=0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x=0$ پر

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.57: $0\le x\le 2$ کے لئے $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔اس کے اوپر پہلے $h=1,0.5,0.1$ لیتے ہوئے $y=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h=-1,-0.5,-0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال 3.58: $-2\le x\le 2$ اور $0\le y\le 3$ لیتے ہوئے $y=3x^2$ ترسیم کریں۔اسی کے اوپر پہلے $h=2,1,0.2$ لیتے ہوئے $y=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h=-2,-1,-0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال 3.59: وائشٹراس کا نا قابل تفرق تفاعل وائشٹراس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال 3.60 تا سوال 3.65 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ھ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

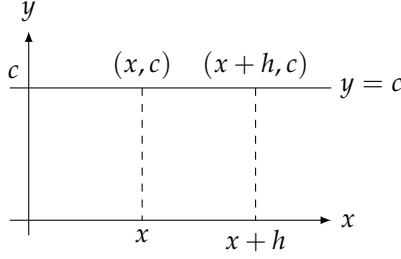
سوال 3.60: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

سوال 3.61: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال 3.62: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال 3.63: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال 3.64: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 3.65: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

شکل 3.28: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

3.2 قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ 3.1: **مستقل کا تفرق**
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c=0$ ہو گا۔

مثال 3.6: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\frac{1}{2}\Big)=0,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3})=0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x)=c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل 3.28)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to0}0=0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ 3.2: قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح

اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال 3.7:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

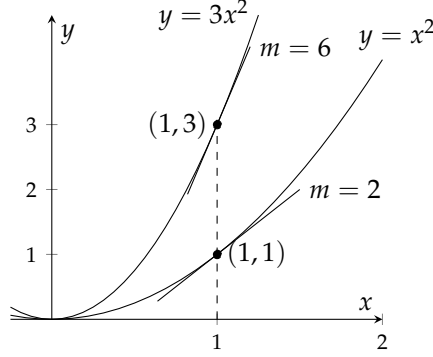
استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ہم $a = x+h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔یوں $h = a - b$ ہو گا۔اس طرح

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}\\ &= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \to 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

شکل 3.29: ترسیم برائے مثال 3.8

قاعدہ 3.3: **قاعدہ مستقل مضرب**
اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال 3.8: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گی (شکل 3.29)۔ □

مثال 3.9: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ 3.3 میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && f(x)=cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\
&= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ قابل تفرق ہے}
\end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.4: **قاعدہ مجموعہ**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u+v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی **تفریقی قاعدہ** حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v]=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔اگر $u_1,u_2,\cdots,u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1+u_2+\cdots+u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.10:

(ا) $y = x^4 + 12x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12$$

(ب) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0\\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ 3.4) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\ &= \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت

ہم درج ذیل فقرے کو **ریاضی ماخوذ**[9] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx} \tag{3.3}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔ یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

---

[9] mathematical induction

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}$$

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}})\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ 3.4 کی درستگی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال 3.11: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟

حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

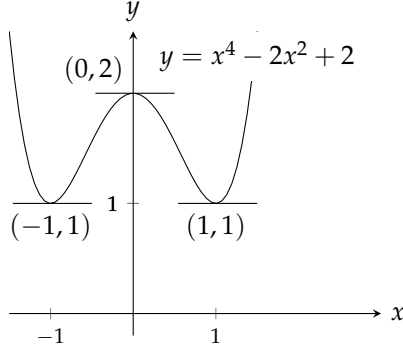
اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
4x^3 - 4x &= 0\\
4x(x^2 - 1) &= 0\\
x &= 0, 1, -1
\end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابقتی نقطے $(-1, 1)$ ، $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ ہیں (شکل 3.30)۔ □

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔مثال کے طور پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{ہو گا۔}$$

شکل 3.30: افقی مماس (مثال 3.11)

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ 3.5: **قاعدہ حاصل ضرب**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

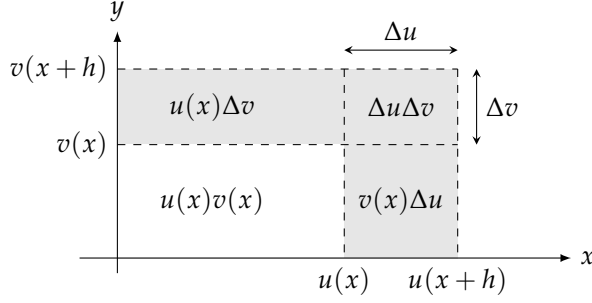
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\end{aligned}$$

شکل 3.31: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے للذا $h \to 0$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل 3.31 حاصل ہو گا۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا للذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال 3.12: تفاعل $y=(x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u=x^2+1$ اور $v=x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)]&=(x^2+1)(3x^2)+(x^3+3)(2x)\\&=3x^4+3x^2+2x^4+6x\\&=5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y&=(x^2+1)(x^3+3)=x^5+x^3+3x^2+3\\\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال 3.12 میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال 3.13: فرض کریں کہ $y=uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2)=3,\quad u'(2)=-4,\quad v(2)=1,\quad v'(2)=2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y'=(uv)'=uv'+vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y'(2)&=u(2)v'(2)+v(2)u'(2)\\&=(3)(2)+(1)(-4)=6-4=2\end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ 3.6: قاعدہ حاصل تقسیم

اگر $u(x)$ اور $v()$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.14: تفاعل $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم $u = t^2 - 1$ اور $v = t^2 + 1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2t\right)\\ &= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ 3.7: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ
اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

□

مثال 3.15:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

□

مثال 3.16: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔
حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x}\Big) = 1 + 2\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y - 3 &= (-1)(x-1) && \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات} \\ y &= -x + 1 + 3 \\ y &= -x + 4 \end{aligned}$$

□

قاعدہ کا انتخاب

تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال 3.17: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4} \end{aligned}$$

□

دو رتبی اور بلند رتبی تفرق

تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا **رتبہ اول تفرق**[10] یا **یک رتبی تفرق** یا مختصراً **پہلا تفرق**[11] کہتے ہیں۔یہ تفرق ازخود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **رتبہ دوم تفرق**[12] یا **دو رتبی تفرق** یا مختصراً **دوسرا تفرق**[13] کہتے ہیں۔

دو رتبی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قبل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا **رتبہ سوم تفرق** یا **سہ رتبی تفرق** یا **تین رتبی تفرق** یا مختصراً **تیسرا تفرق** کہتے ہیں۔اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ n **تفرق** یا n **رتبی تفرق** یا n **واں تفرق** کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔آپ نے دیکھا کہ بلند رتبی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال 3.18: تفاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x \\ y'' &= 6x - 6 \\ y''' &= 6 \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق در حقیقت صفر (یعنی مستال) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔یوں اس تفاعل کے ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔اس کا چار رتبی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

---

[10] first order derivative
[11] first derivative
[12] second order derivative
[13] second derivative

سوالات

تفرق کا حساب

سوال 3.66 تا سوال 3.77 میں تفاعل کا رتبہ اول اور رتبہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.66: $y = -x^2 + 3$
جواب: $y' = -2x, \quad y'' = -2$

سوال 3.67: $y = x^2 + x + 8$

سوال 3.68: $s = 5t^3 - 3t^5$
جواب: $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

سوال 3.69: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال 3.70: $y = \frac{4x^3}{3} - x$
جواب: $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

سوال 3.71: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال 3.72: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$
جواب: $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

سوال 3.73: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال 3.74: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
جواب: $y' = 12x - 10 + 10x^{-3}, \quad y'' = 12 - 30x^{-4}$

سوال 3.75: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال 3.76: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$
جواب: $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

سوال 3.77: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال 3.78 تا سوال 3.81 میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال 3.78: $y=(3-x^2)(x^3-x+1)$
جواب: $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

سوال 3.79: $y=(x-1)(x^2+x+1)$

سوال 3.80: $y=(x^2+1)\left(x+5+\frac{1}{x}\right)$
جواب: $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

سوال 3.81: $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}+1\right)$

سوال 3.82 تا سوال 3.93 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 3.82: $y=\frac{2x+5}{3x-2}$
جواب: $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

سوال 3.83: $z=\frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال 3.84: $g(x)=\frac{x^2-4}{x+0.5}$
جواب: $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

سوال 3.85: $f(t)=\frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال 3.86: $v=(1-t)(1+t^2)^{-1}$
جواب: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

سوال 3.87: $w=(2x-7)^{-1}(x+5)$

سوال 3.88: $f(s)=\frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$
جواب: $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

سوال 3.89: $u=\frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال 3.90: $v=\frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$
جواب: $v'=-\frac{1}{x^2}+2x^{-3/2}$

سوال 3.91: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال 3.92: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$
جواب: $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

سوال 3.93: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال 3.94: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔
جواب: $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3, y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لئے $y^{(n)} = 0$

سوال 3.95: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال 3.96 تا سوال 3.103 میں یک رتبی اور دو رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال 3.96: $y = \frac{x^3+7}{x}$
جواب: $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

سوال 3.97: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال 3.98: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$
جواب: $\frac{dr}{d\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = -12\theta^{-5}$

سوال 3.99: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال 3.100: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$
جواب: $\frac{dw}{dz} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 2z^{-3}$

سوال 3.101: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال 3.102: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$
جواب: $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5}, \quad \frac{d^2p}{dq^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

سوال 3.103: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال 3.104: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

جواب:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = 13, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = -7, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{7}{25}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u) = 20$$

سوال 3.105: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

ڈھلوان اور مماس

سوال 3.106: (ا) نقطہ $(2,1)$ پر منحنی $y = x^3 - 4x + 1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.107: (ا) منحنی $y = x^3 - 3x - 2$ کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.108: مبدا اور $(1,2)$ پر منحنی $y = \frac{4x}{x^2+1}$ کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 3.109: نقطہ $(2,1)$ پر $y = \frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 3.110: منحنی $y=ax^2+bx+c$ نقطہ $(1,2)$ سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط $y=x$ کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 3.111: نقطہ $(1,0)$ پر $y=x^2+ax+b$ اور $y=cx-x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال 3.112: (ا) نقطہ $(-1,0)$ پر منحنی $y=x^3-x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کا اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال 3.113: (ا) مبدا پر منحنی $y=x^3-6x^2+5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبعی استعمال

سوال 3.114: دباو اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم V اور دباو P درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b اور c مستقل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V}$ تلاش کریں۔

$$P=\frac{nRT}{V-nb}-\frac{an^2}{V^2}$$

سوال 3.115: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R=M^2\Big(\frac{C}{2}-\frac{M}{3}\Big)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب R کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کو جسم کی **حساسیت**[14] کہلاتا ہے۔ سوال 4.397 میں ہم دوا کی وہ مقدار معلوم کریں گے جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 3.116: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جا سکتا ہے؟

---

[14] sensitivity

سوال 3.117: قاعدہ بالعکس متناسب
(ا) **قاعدہ بالعکس متناسب**[15] کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right)=-\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب در حقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال 3.118: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n-c^n=(x-c)(x^{n-1}+x^{n-2}c+\cdots+xc^{n-2}+c^{n-1})$$

اور صفحہ 3.2 پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات 3.2)

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)=nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال 3.119: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ا) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2u_3u_4$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2\cdots u_n$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال 3.120: $x^{3/2}$ کو $x\cdot x^{1/2}$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔ ناطق طاقتیں حصہ 3.6 کا ایک موضوع ہے۔

---

[15] reciprocal rule

3.3 تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔ ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔ اس دورانیے کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا x_0+h پر تفاعل $f(x)$ کی **اوسط شرح تبدیلی** سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی **(لمحاتی) شرح تبدیلی**

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔ عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال 3.19: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی $r = 0.1\,\mathrm{m}$ پر کیا ہو گی؟

حل: رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

ہے۔ یوں $r = 0.1\,\mathrm{m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{m}$ ہو گی۔ یوں اس رداس پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں $0.2\pi\Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔ □

لکیر پر حرکت۔ ہٹاو، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔ دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا **ہٹاو**[16]

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل 3.32) اور اس کی **اوسط سمتی رفتار**[17]

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاو}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \to 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔ یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لمحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔ لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

□

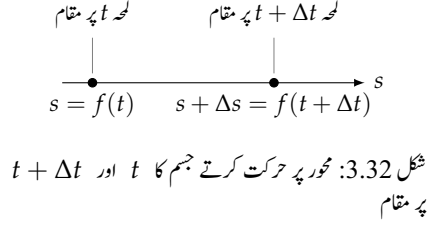
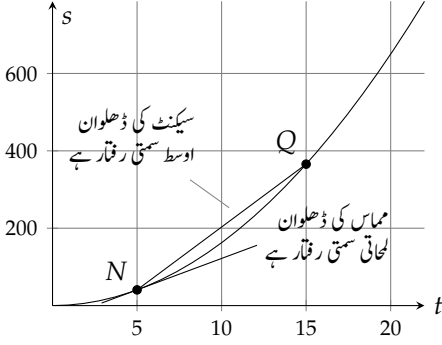
مثال 3.20: ایک گاڑھی کی فاصلہ (میٹر) بالمقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل 3.33 میں دکھایا گیا ہے۔ سیکنٹ NQ کی ڈھلوان دورانیہ $t = 5\,\mathrm{s}$ تا $15\,\mathrm{s}$ کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو $32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $117\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لمحاتی سمتی رفتار $16.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $58.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتی ہے۔ □

مقدار معلوم روپ

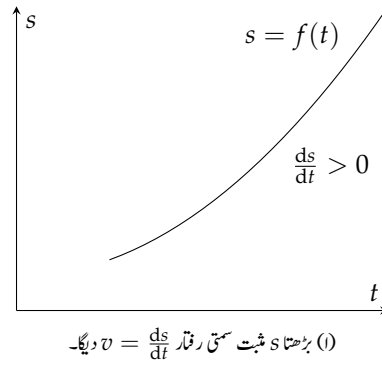
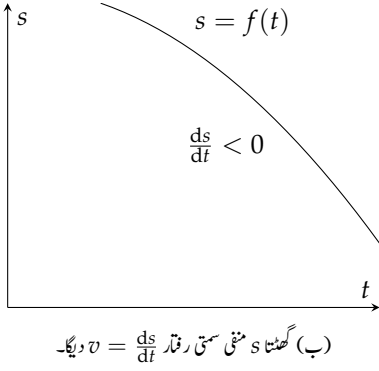
اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم **مقدار معلوم ترسیم**[18] کہلاتی ہے۔ منحنی $y = f(x)$

---

displacement[16]
average velocity[17]
parametric curve[18]

شکل 3.32: محور پر حرکت کرتے جسم کا t اور $t + \Delta t$ پر مقام

شکل 3.33: فاصلہ بالمقابل وقت برائے مثال 3.20

(ب) گھٹتا s منفی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔

(ا) بڑھتا s مثبت سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔

شکل 3.34

کی **مقدار معلوم روپ**[19] حاصل کرنے کی خاطر ہم $x = t$ اور $y = f(t)$ لیں گے۔چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہو گا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہو گا (شکل 3.34)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا

[19]parametric representation

تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[20] کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک $60\,\mathrm{km}$ کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار $-60\,\mathrm{km}$ ہو گی لیکن گاڑھی کا رفتار پیما واپسی پر بھی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے نا کہ سمتی رفتار۔

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[21] کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = \left|v(t)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

□

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی **اسراع** کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق **اسراع**[22] کہلاتا ہے۔اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہو گی۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جا سکتی ہے۔ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو **آزادانہ گرنا**[23] کہتے ہیں۔آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانیہ t میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائی جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

---

[20] speed
[21] speed
[22] acceleration
[23] free fall

اسراع کی اکائی $\mathrm{m\,s^{-2}}$ میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال 3.21: لمحہ $t=0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
(ا) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟
حل: (ا) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2)=\frac{1}{2}(9.8)(2^2)=19.6\,\mathrm{m}$$

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ اور اسراع $a(t)$

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=9.8t,\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=9.8$$

ہوں گے۔ یوں $t=2\,\mathrm{s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2)=9.8(2)=19.6\,\mathrm{m},\quad a(2)=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

آپ نے دیکھا کہ اسراع a کی قیمت وقت t کا تابع نہیں ہے۔ □

مثال 3.22: ایک جسم کو $49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s=49-\frac{1}{2}gt^2$ ہو گی (شکل 3.35)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے $102.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہو گی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کی اسراع کتنی ہو گی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محددی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔یوں بلندی s مثبت مقدار ہو گی، ابتدائی رفتار مثبت ہو گی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہو گا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہو گی۔بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہو گی۔ اب کسی بھی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 49 - gt$$

ہو گی۔رفتار اس لمحہ پر صفر ہو گای جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \implies \quad t = \frac{49}{9.8} = 5\,\mathrm{s}$$

ہو۔لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہو گی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5\,\mathrm{m}$$

ب. جسم کی رفتار $100\,\mathrm{m}$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \implies \quad t = 3\,\mathrm{s},\ 7\,\mathrm{s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم $102.9\,\mathrm{m}$ بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

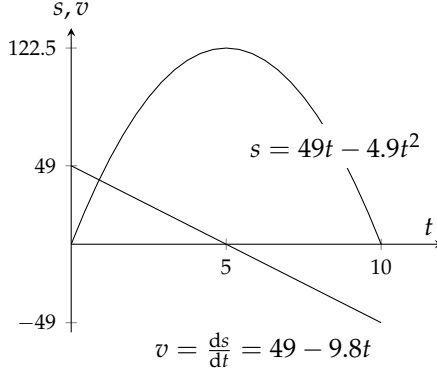
ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g = -9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

جسم کی اسراع مسلسل $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ رہتی ہے۔اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہو گا جب $s = 0$ ہو یعنی:

$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \implies \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \implies \quad t = 0\,\mathrm{s},\ 10\,\mathrm{s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہو گا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔

شکل 3.35: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال 3.22)

□

فنیات انتصابی لکیر پر حرکت کی نقل
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

کو کمپیوٹر پر **نقطہ ترسیم**[24] کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔نقطہ ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔مثال 3.22 کے لئے اس لحاتی ترسیم کو پہلے $0 \leq t \leq 5$ اور بعد میں $0 \leq t \leq 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

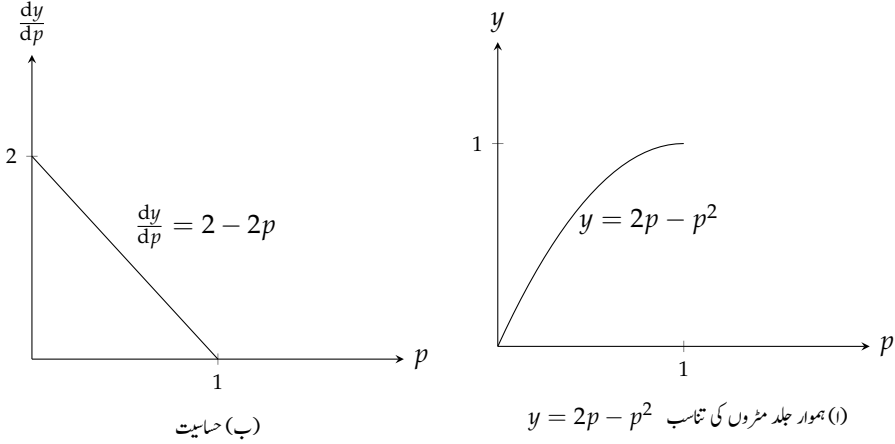
کو نقطہ ترسیم کریں۔

حساسیت

اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x میں تبدیلی کے لئے تفاعل نسبتاً زیادہ **حساس**[25] ہے۔تفرق $f'(x)$ تفاعل $f(x)$ کی **حساسیت**[26] کی ناپ ہے۔

---

[24] dot graph
[25] sensitive
[26] sensitivity

(ا) ہموار جلد مٹروں کی تناسب $y = 2p - p^2$ (ب) حساسیت

شکل 3.36: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

مثال 3.23: تبدیلی کے لئے حساسیت
آسٹریا کے گرگر یوہان مینڈل (1884-1822) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے **جنیات**[27] کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد والے (**غالب**[28]) مٹروں کے **جینز**[29] کی تعدد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (**مغلوب**[30]) مٹروں کی جین کی تعدد $(1-p)$ ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

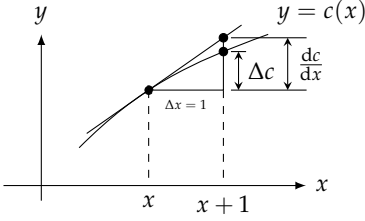
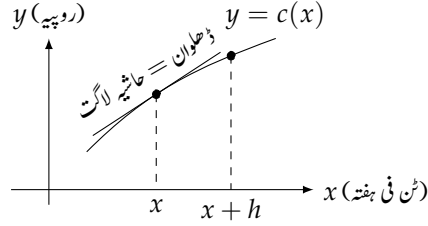
ہے۔

y بالمقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہو تب y زیادہ حساس ہو گا (شکل 3.36-ا)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{dy}{dp}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔جب p کی قیمت 0 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل 3.36-ب)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سمتی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم **حاشیہ**[31] کی بات کرتے ہیں۔

---

genetics[27]
dominant[28]
gene[29]
recessive[30]
marginals[31]

(ا) ہفتہ وار پیداوار بالمقابل لاگت

(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کی اضافی لاگت Δc تقریباً $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کے برابر ہے۔

شکل 3.37: حاشیہ لاگت پیداوار

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت $c(x)$ متغیر x کا تفاعل ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد x ہے۔ **حاشیہ لاگت پیداوار**[32] سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن[33] فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ لاگت آتی ہے۔اب $x + h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ} = \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \to 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیہ لاگت دے گی (شکل 3.37-ا)۔

$$\text{حاشیہ لاگت پیداوار} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ لاگت پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کی تخمین ہے۔یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ x کے نزدیک c کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$ کے قیمت کے بہت قریب ہو گی۔ عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمین قابل قبول ہو گی (شکل 3.37-ب)۔

مثال 3.24: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

[32] marginal cost of production
[33] tonne, 1000 kg

روپیہ لاگت آتی ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟

حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی لاگت آئے گی

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15 \\ c'(10) &= 3(100) - 12(10) + 15 = 195 \end{aligned}$$

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔ □

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کعبی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کعبی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال 3.25: حاشیہ شرح ٹیکس

اگر آپ نی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس $28\,\%$ ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ $28\,\%$ حاشیہ ٹیکس کا یہ ہر گز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا $28\,\%$ بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}I} = 0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔ □

مثال 3.26: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $5 \le x \le 20$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیہ لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

سوالات

محدد لکیر پر حرکت

سوال 3.121 تا سوال 3.126 میں $a \le t \le b$ کے لئے $s = f(t)$ محدد لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاو اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال 3.121: چاند پر آزادانہ گرنا $s = 0.8t^2, \quad 0 \le t \le 10$
جواب: (ا) $80\,\mathrm{m}$ ، $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 3.122: مریخ پر آزادانہ گرنا $s = 1.86t^2, \quad 0 \le t \le 0.5$

سوال 3.123: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \le t \le 3$
جواب: (ا) $-9\,\mathrm{m}$ ، $-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $-12\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیلی نہیں ہوتی

سوال 3.124: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 3.125: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$
جواب: (ا) $-20\,\mathrm{m}$ ، $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $140\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $\frac{4}{25}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ج) سمت تبدیل نہیں ہوتی

سوال 3.126: $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

سوال 3.127: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔ (ا) ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔
جواب: (ا) $a(1) = -6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $a(3) = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ب) $v(2) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ج) $6\,\mathrm{m}$

سوال 3.128: وقت $t \ge 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔ (ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزادانہ گرنا

سوال 3.129: مریخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار $27.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی تقریباً $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو گی؟
جواب: مریخ: $7.5\,\mathrm{s}$ ، مشتری: $1.2\,\mathrm{s}$

سوال 3.130: سطح چاند سے انتصابی رخ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

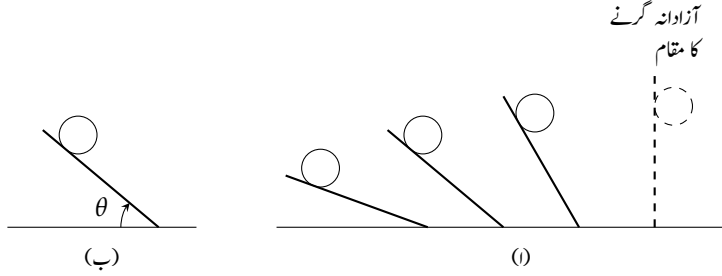
سوال 3.131: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال 3.130 کا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 4.9t^2$ بلندی پر ہو گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

شکل 3.38: گلیلو کا تجربہ برائے آزادانہ گرنا (سوال 3.135)

جواب: (ا) $2.4 - 9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (ب) $2.4\,\mathrm{s}$ (ج) $29.4\,\mathrm{m}$ (د) 0.7 سیکنڈ اوپر جانب اور 4.2 سیکنڈ نیچے رخ (ہ) $4.9\,\mathrm{s}$

سوال 3.132: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ایک ٹھوس جسم کو انتصابی رخ $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔ اس دنیا کے سطح پر ثقلی اسراع $g_s\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہونے کی بنا t سیکنڈوں میں جسم $s = 15t - \frac{1}{2}g_s t^2$ میٹر بلندی تک پہنچے گا۔ یہ جسم بلند ترین مقام تک 20 سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔ اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنی ہے؟

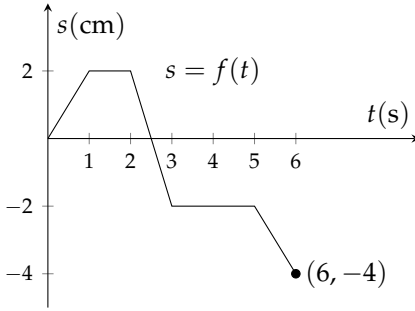
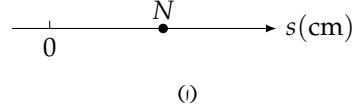
سوال 3.133: چاند پر ایک بندوق کو انتصابی رخ چلایا گیا۔ بندوق کی گولی t سیکنڈوں میں $s = 300t - 4.9t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ چاند پر یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟
جواب: چاند پر 320 سیکنڈ، زمین پر 52 سیکنڈ؛ چاند پر 20287 میٹر، زمین پر 3297 میٹر

سوال 3.134: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 11.44t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ $s = 300t - 1.86t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنے بلندی تک پہنچے گی؟

سوال 3.135: گلیلو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیلو نے اس پر گیند کی سمتی رفتار کو ناپتے ہوئے کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا (شکل 3.38)۔ گلیلو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے t سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت t کے راست متناسب ہے یعنی $v = kt$ لکھا جا سکتا ہے۔ مستقل k کی قیمت کا دارومدار پٹی کی ڈھلوان پر ہے۔

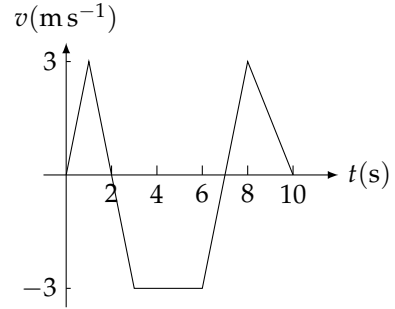
موجودہ علامتیت استعمال کرتے ہوئے (شکل 3.38-ب) در حقیقت گلیلو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا تھا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

$$v = (9.8\sin\theta)t$$

(ا) آزادانہ گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کی اسراع کیا ہو گی؟
جواب: (ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

شکل 3.39: محوری لکیر پر حرکت (سوال 3.138)

سوال 3.136: پی سا اگر گلیلو پی سا سے توپ کی گولی $55\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرنے دیتا تب t سیکنڈ بعد سطح زمین سے اس کی بلندی $s = 55 - 4.9t^2$ ہوتی۔ (ا) لمحہ t پر توپ کی گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتا؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار کیا ہوتی؟

ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا

سوال 3.137: ایک محوری لکیر پر ایک جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)$ کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔

(ا) جسم کب سمت حرکت تبدیل کرتی ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے؟ (ج) دورانیہ $0 \leq t \leq 10$ کے لئے جسم کی رفتار ترسیم کریں۔ (د) جسم کی اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

جواب: (ا) $t = 2, t = 7$ (ب) $3 \leq t \leq 6$

سوال 3.138: ایک محوری لکیر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔اس نقطے کا مقام بالمقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل 3.39)۔ (ا) N کب بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

شکل 3.40: راکٹ کی حرکت (سوال 3.139)

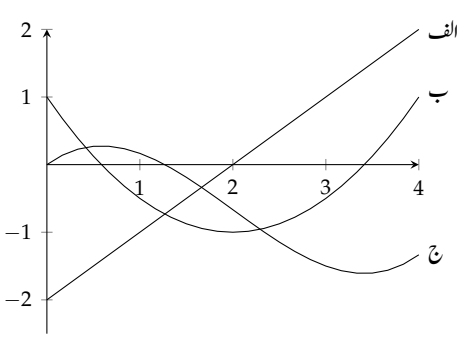
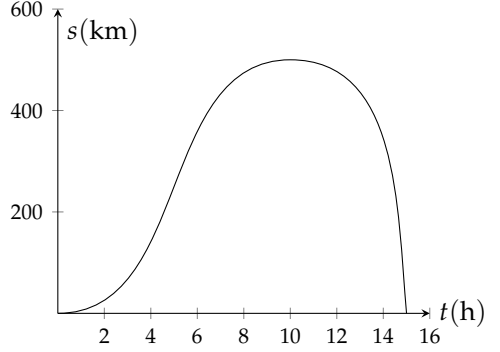
شکل 3.41: جسم کی حرکت (سوال 3.140)

سوال 3.139: راکٹ میں چند سیکنڈوں کے لئے ایندھن ہوتا ہے جو اس کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ زمین تک پہنچاتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت کو شکل 3.40 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ (ا) ایندھن ختم ہونے کے لمحہ راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لئے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحہ پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ہ) پیرا شوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کی اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھی؟ (ز) اسراع کب مستقل تھی اور اس کی قیمت کیا تھی؟
جواب: (ا) $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $2\,\mathrm{s}$ (ج) $t = 8.12\,\mathrm{s}$ ، $v = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (د) $12\,\mathrm{s}$ ، $v = -38\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ہ) $10\,\mathrm{s}$ (و) لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر (ز) $2\,\mathrm{s}$ تا $12\,\mathrm{s}$

سوال 3.140: محوری لکیر پر ایک جسم کی رفتار $v = f(t)$ شکل 3.41 ترسیم کی گئی ہے۔ (ا) کب جسم آگے حرکت، پیچھے حرکت کرتی ہے؟ اس کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کی اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کم جسم لمحہ سے زیادہ دورانیے کے لئے ساکن رہتا ہے؟

سوال 3.141: ایک ٹرک $t = 0$ پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔اس کے مقام بالمقابل کا شکل 3.42 میں دکھایا گیا ہے۔ مثال 3.4 کی طرح $0 \leq t \leq 15$ کے لئے ٹرک کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کی اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

سوال 3.142: ایک جسم کا فاصل s ، رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل وقت t کو شکل 3.142 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان میں کون سا ترسیم کون سا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: مقام بالمقابل وقت شکل-ج، رفتار بالمقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالمقابل وقت شکل-ا ہیں۔

اقتصادیات

شکل 3.43: اشکال برائے سوال 3.142

شکل 3.42: ٹرک کی حرکت (سوال 3.141)

سوال 3.143: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x مشینوں کو پیدا کرنے پر $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ روپیہ لاگت آتی ہے۔ (ا) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہو گی؟ (ب) اگر 100 پیدا کیے جا رہے ہوں تب حاشیہ لاگت کیا ہو گی؟ (ج) دکھائیں کہ 100 مشین پیدا کرنے کے بعد ایک اضافی مشین پیدا کرنے پر لاگت تقریباً حاشیہ لاگت کے برابر ہے۔
جواب: (ا) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

سوال 3.144: حاشیہ آمدنی فرض کریں کہ x کرسیاں فروخت کرنے سے $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$ روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔ (ا) x کرسیوں کی فروخت پر حاشیہ آمدنی کیا ہو گی؟ (ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کی بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو $r'(x)$ سے حاصل کریں۔ (ج) $x \to \infty$ کرتے ہوئے تفاعل $r'(x)$ کے حد کی قیمت تلاش کریں۔ اس قیمت کا کیا مطلب ہو گا؟

مزید استعمال

سوال 3.145: جرثوموں پر تجربہ کے دوران ان کی خراک میں جرثومہ مار دوا ملائی گئی۔ جرثوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔ لمحہ t پر ان کی تعداد $b(t) = 10^6 + 10^4t - 10^3t^2$ تھی جہاں t کی اکائی گھنٹہ ہے۔ شرح نمو کو (ا) $t = 0$ ؛ (ب) $t = 5$ ؛ اور $t = 10$ پر تلاش کریں۔
جواب: (ا) 10^4 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ب) 0 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ج) -10^4 جرثومیں فی گھنٹہ

سوال 3.146: لمحہ t پر ایک ٹینکی سے پانی کا انخلا $Q(t) = 200(30 - t^2)$ لٹر ہے جہاں t کی اکائی منٹ ہے۔ دس منٹ بعد پانی کی انخلا کی شرح کیا ہے؟ پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال 3.147: ٹینکی کو خالی کرنے کے لئے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔ نلکے کھولنے کے t منٹوں بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$ سنٹی میٹر ہے۔ (ا) لمحہ t پر ٹینکی سے پانی کی انخلا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گی؟ (ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟ کب کم سے کم تیزی سے گہرائی گھٹتی ہے؟ ان لمحات پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟ (ج) y اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کو ایک ساتھ

ترسیم کریں اور $\frac{dy}{dt}$ کی علامت اور قیمتوں کے ساتھ y کے تعلق پر تبصرہ کریں۔
جواب: (ا) $5(\frac{t}{60}-1)$ (ب) $t=0$ پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح $\frac{dy}{dt}=-5$ ہے اور $t=60$ پر گھٹنے کی کم تر شرح $\frac{dy}{dt}=0$ ہو گی۔

سوال 3.148: گول غبارے کا حجم $H=\frac{4}{3}\pi r^3$ رداس r کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ (ا) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح $r=10\,\mathrm{cm}$ پر کیا ہو گی؟ (ب) اگر رداس $10\,\mathrm{cm}$ سے $12\,\mathrm{cm}$ ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال 3.149: پرواز سے پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔ زمین پر دوڑ کے دوران ایک جہاز $D=\frac{10}{9}t^2$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ اڑنے کے لئے درکار رفتار $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟
جواب: جہاز 25 سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور جس دوران یہ $694\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرتا ہے۔

سوال 3.150: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی 1959 نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں $580\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک لاوا اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔ لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.151 تا سوال 3.154 میں s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ t پر تعین گر تفاعل $s=f(t)$ دیتا ہے۔ اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل $v=\frac{ds}{dt}=f'(t)$ اور تفاعل اسراع $a=\frac{dv}{dt}=f''(t)$ کے ساتھ اکٹھے ترسیم کریں۔ v اور a کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے s کے رویہ پر بحث کریں۔ بحث میں درج ذیل شامل کریں۔

ا. کب جسم لمحاتی طور پر ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب یہ دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کو کب تبدیل کرتا ہے؟

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ھ. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبدا سے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال 3.151: $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le t \le 12.5$

سوال 3.152: $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$
جواب: (ا) $t = 6.25\,\text{s}$ ؛ (ب) $[0, 6.25)$ پر اوپر رخ اور $(6.25, 12.5]$ پر نیچے رخ؛ (ج) $t = 6.25\,\text{s}$ ؛ (د) $[0, 6.25)$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (د) $t = 0, 12.5$ پر تیز تر اور $t = 6.25$ پر آہستہ ترین؛ (ہ) $t = 6.25\,\text{s}$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $(6.25, 12.5]$

سوال 3.153: $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

سوال 3.154: $s = 4 - 7t + 6t^2, \quad 0 \le t \le 4$
جواب: (ا) $t = \frac{6 \mp \sqrt{15}}{3}$ ؛ (ب) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر بائیں رخ اور $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر دائیں رخ؛ (ج) $t = \frac{6 \mp \sqrt{15}}{3}$ ؛ (د) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (ہ) $t = 0, 4$ پر تیز ترین اور $t = \frac{6 \mp \sqrt{15}}{3}$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = \frac{6+\sqrt{15}}{3}$

3.4 تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقاطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

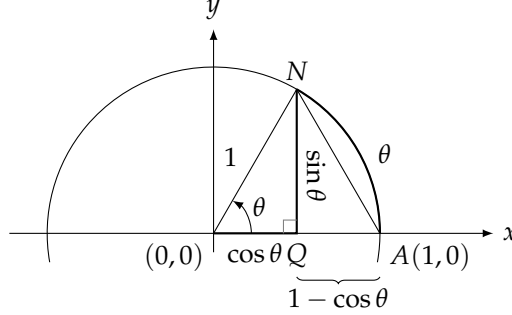
چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ 3.3: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos\theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل 3.44 پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

شکل 3.44: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $0 < \theta$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1-\cos\theta| < |\theta|$$

یعنی

$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

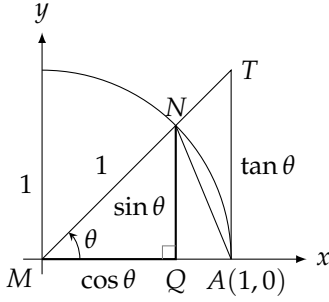
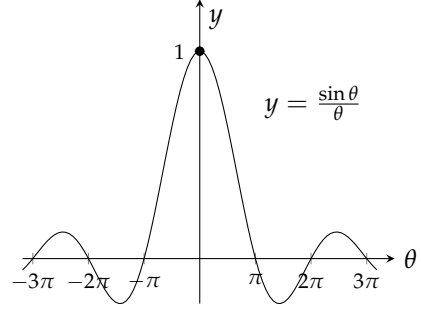
حاصل ہوتے ہیں۔

□

مثال 3.27: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0, \quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

حل: $\theta \to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔یوں مسئلہ 3.3 اور مسئلہ بیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے کو شکل 3.45 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

شکل 3.45: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

شکل 3.46: برائے مسئلہ 3.4

مسئلہ 3.4:

(θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے)

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \tag{3.4}$$

ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل 3.46)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\text{رقبہ}\,\Delta MAN < \text{رقبہ خط}\,MAN < \text{رقبہ}\,\Delta MAT$$

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ}\,\Delta MAN &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\\
\text{رقبہ خط}\,MAN &= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}\\
\text{رقبہ}\,\Delta MAT &= \frac{1}{2}\times\text{قاعدہ}\times\text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta
\end{aligned}$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل 3.45)۔اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ 145 پر مسئلہ 2.5 کے تحت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ 3.4 کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 3.28: دکھائیں کہ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} = 0$ ہے۔

حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\\ &= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad (\theta = \frac{h}{2})\\ &= -(1)(0) = 0\end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال 3.28 کے حد اور مسئلہ 3.4 کو کلیہ

$$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\Big(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\Big)+\lim_{h\to 0}\Big(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\Big)\\ &= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کوسائن تفاعل ہے۔

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

مثال 3.29:

ا.

$$y=x^2-\sin x:\quad \begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2x-\frac{d}{dx}(\sin x) \quad (\text{قاعدہ فرق})\\ &= 2x-\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$y=x^2\sin x:\quad \begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2\frac{d}{dx}(\sin x)+2x\sin x \quad (\text{قاعدہ حاصل ضرب})\\ &= x^2\cos x+2x\sin x\end{aligned}$$

ج.

$$y=\frac{\sin x}{x}:\quad \begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\cdot 1}{x^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم}\\ &= \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h$$

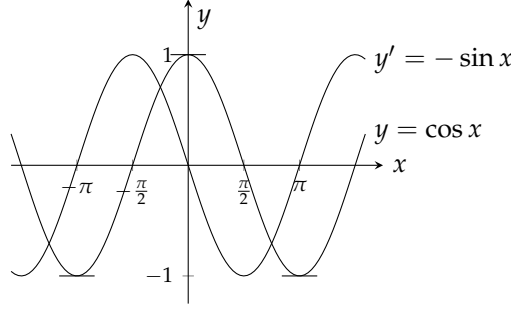
استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\cos x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} && \text{(تفرق کی تعریف)}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}\\
&=\lim_{g\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\\
&=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1 && \text{(مثال 3.28 اور مسئلہ 3.4)}\\
&=-\sin x
\end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)=-\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل 3.47 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x=-\pi,0,\pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y'=-\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x=-\frac{\pi}{2}$ اور $x=\frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال 3.30:

شکل 3.47: تفاعل $y = \cos x$ کی ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} y &= \sin x \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) + \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{(1 - \sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) - \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\ &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال 3.31: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5\cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
s &= 5\cos t && \text{ہم مقام} \\
v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں}
\end{aligned}
$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

1. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

2. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

   جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

3. جسم کی اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو **جھٹکا**[34] کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال 3.32:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال 3.31 کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

---

[34] jerk

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \sec^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) &= -\csc^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) &= \sec x \tan x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{3.5}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال 3.221 اور سوال 3.222 میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال 3.33: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال 3.34: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات 3.5)} \\
y'' &= \frac{d}{dx}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x \frac{d}{dx}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال 3.35:

ا.

$$\tfrac{d}{dx}(3x + \cot x) = 3 + \tfrac{d}{dx}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{d}{dx}(2\csc x) = 2\tfrac{d}{dx}(\csc x) \\
&= 2(-\csc x \cot x) = -2\csc x \cot x
\end{aligned}$$

□

تکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ 3.1 کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلا واسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 3.36: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ □

مسئلہ 3.4 کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,\ \theta = x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1,\ \theta = 7x; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1,\ \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \to 0$ کرنا $\theta \to 0$ کے مترادف ہے۔یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 3.37:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x} \\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} \\ &= \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

(تفاعل کو مسئلہ 3.4 کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right) \\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

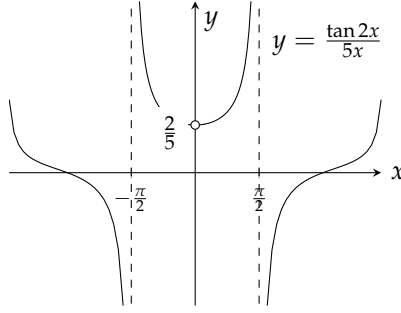
$\left(\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)$

شکل 3.48 سے رجوع کریں۔ □

مثال 3.38: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔یوں $t \to \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \to 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t-\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

□

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔

شکل 3.48: ترسیم برائے مثال 3.37

سوالات

سوال 3.155 تا سوال 3.166 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 3.155: $y = -10x + 3\cos x$
جواب: $y' = -10 - 3\sin x$

سوال 3.156: $y = \frac{2}{x} + 3\sin x$

سوال 3.157: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
جواب: $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

سوال 3.158: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال 3.159: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
جواب: $y' = 0$

سوال 3.160: $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

سوال 3.161: $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$
جواب: $\frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

سوال 3.162: $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

سوال 3.163: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$
جواب: $4\tan x \sec x - \csc^2 x$

سوال 3.164: $y=\frac{\cos x}{x}+\frac{x}{\cos x}$

سوال 3.165: $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$
جواب: $x^2\cos x$

سوال 3.166: $y=x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x$

سوال 3.167 تا سوال 3.170 میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 3.167: $s=\tan t-t$
جواب: $\sec^2 t-1$

سوال 3.168: $s=t^2-\sec t+1$

سوال 3.169: $s=\frac{1+\csc t}{1-\csc t}$
جواب: $\frac{-2\csc t\cot t}{(1-\csc t)^2}$

سوال 3.170: $s=\frac{\sin t}{1-\cos t}$

سوال 3.171 تا سوال 3.174 میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 3.171: $r=4-\theta^2\sin\theta$
جواب: $-\theta(\theta\cos\theta+2\sin\theta)$

سوال 3.172: $r=\theta\sin\theta+\cos\theta$

سوال 3.173: $r=\sec\theta\csc\theta$
جواب: $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta-\cot\theta)=\sec^2\theta-\csc^2\theta$

سوال 3.174: $r=(1+\sec\theta)\sin\theta$

سوال 3.175 تا سوال 3.178 میں $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ تلاش کریں۔

سوال 3.175: $p=5+\frac{1}{\cot q}$
جواب: $\sec^2 q$

سوال 3.176: $p=(1+\csc q)\cos q$

سوال 3.177: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$
جواب: $\sec^2 q$

سوال 3.178: $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

سوال 3.179: (ا) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لئے y'' تلاش کریں۔
جواب: (ا) $2\csc^3 x - \csc x$، (ب) $2\sec^3 x - \sec x$

سوال 3.180: (ا) $y = -2\sin x$ اور (ب) $y = 9\cos x$ کے لئے $y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ تلاش کریں۔

سوال 3.181 تا سوال 3.186 میں حد تلاش کریں۔

سوال 3.181: $\lim\limits_{x \to 2} \sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})$
جواب: 0

سوال 3.182: $\lim\limits_{x \to \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

سوال 3.183: $\lim\limits_{x \to 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4 \sec x}) - 1]$
جواب: -1

سوال 3.184: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2\sec x}$

سوال 3.185: $\lim\limits_{t \to 0} \tan(1 - \frac{\sin t}{t})$
جواب: 0

سوال 3.186: $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos(\frac{\pi \theta}{\sin \theta})$

سوال 3.187 تا سوال 3.202 میں حد تلاش کریں۔

سوال 3.187: $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$
جواب: 1

سوال 3.188: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل})$

سوال 3.189: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{4y}$

جواب: $3/4$

سوال 3.190: $\lim_{h\to 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال 3.191: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

جواب: 2

سوال 3.192: $\lim_{t\to 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال 3.193: $\lim_{x\to 0} \frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

جواب: $1/2$

سوال 3.194: $\lim_{x\to 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال 3.195: $\lim_{x\to 0} \frac{x + x\cos x}{\sin x \cos x}$

جواب: 2

سوال 3.196: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x + \sin x}{2x}$

سوال 3.197: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

جواب: 1

سوال 3.198: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال 3.199: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

جواب: $1/2$

سوال 3.200: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال 3.201: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

جواب: $3/8$

سوال 3.202: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

مماسی خطوط

سوال 3.203 تا سوال 3.206 میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

سوال 3.203: $y = \sin x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi, 0, 3\pi/2$

سوال 3.204: $y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, 0, \pi/3$

سوال 3.205: $y = \sec x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, \pi/4$

سوال 3.206: $y = 1 + \cos x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi/3, 3\pi/2$

کیا سوال 3.207 تا سوال 3.210 کا دائرہ کار $0 \le x \le 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

سوال 3.207: $y = x + \sin x$
جواب: ہاں، نقطہ $x = \pi$ پر

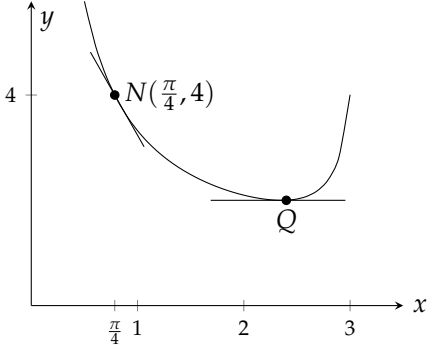
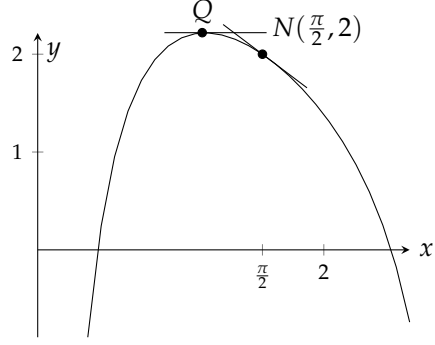
سوال 3.208: $y = 2x + \sin x$

سوال 3.209: $y = x - \cot x$
جواب: نہیں

سوال 3.210: $y = x + 2\cos x$

سوال 3.211: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔
جواب: $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$

سوال 3.212: منحنی $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 3.213: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.49 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔
جواب: (ا) $y = -x + \pi/2 + 2$، (ب) $y = 4 - \sqrt{3}$

شکل 3.50: تفاعل $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$ کی منحنی (سوال 3.214)

شکل 3.49: تفاعل $y = 4 + \cot x - 2\csc x$ کی منحنی (سوال 3.213)

سوال 3.214: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل 3.50 کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال 3.215 تا سوال 3.215 میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال 3.215: $s = 2 - 2\sin t$
جواب: $-\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-3}}$

سوال 3.216: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال 3.217: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

جواب: $c = 9$

سوال 3.218: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (ا) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$$

سوال 3.219: $\frac{\mathrm{d}^{999}}{\mathrm{d}x^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔
جواب: $\sin x$

سوال 3.220: $\frac{\mathrm{d}^{725}}{\mathrm{d}x^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال 3.221: x کے لحاظ سے (ا) $\sec x$ اور (ب) $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال 3.222: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.223: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

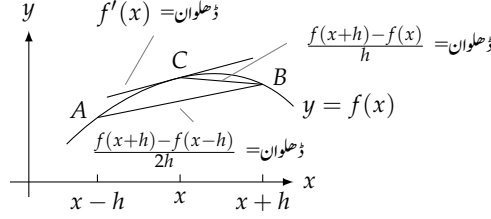
اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0^+$ اور $h \to 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال 3.224: وسطی فرق حاصل تقسیم **وسطی تفریقی حاصل تقسیم**[35]

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \to 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً **فرمٹے تفریقی حاصل تقسیم**[36]

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f'(x)$ = ڈھلوان
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ = ڈھلوان
$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ = ڈھلوان
$y = f(x)$
A B C
$x-h$ x $x+h$

شکل 3.51: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

سے بہتر ہوتا ہے (شکل 3.51)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 3.223 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔
(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال 3.223 میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 3.225: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتباہ بعض اوقات x پر نا قابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کا $h \to 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال 3.226: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

---
centered difference quotient[35]
Fermat's difference quotient[36]

سوال 3.227: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.228: وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر $y = \frac{\sin x}{x}$ ، $y = \frac{\sin 2x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \to 0$ کرتے ہوئے آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$ اور $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y = \frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال 3.229: درجات بالمقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h\to 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جا سکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ھ. بلند رتبی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

3.5 زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور $x^2 - 4$ کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2-4)$ کا تفرق **زنجیری قاعدہ**[37] کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال 3.39: تفاعل $y = 6x - 10 = 2(3x-5)$ حقیقتاً تفاعل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔
ان تینوں تفاعل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟
حل: ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہٰذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

کیا تعلق

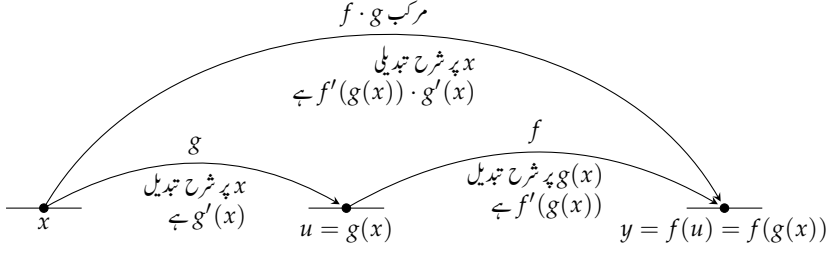
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال 3.40: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2+1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2+1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

[37] chain rule

شکل 3.52: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

اور

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^4 + 6x^2 + 1)\\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل 3.52)۔

مسئلہ 3.5: **زنجیری قاعدہ**
اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{3.6}$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.7}$$

ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیلی سے u میں تبدیلی Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ ثابت کرنے کی خاطر ہمیں حصہ 4.7 میں پیش کیے گئے تصورات کی ضرورت ہو گی۔ یہ ثبوت اس وقت پیش کیا جائے گا جب ہم اس کو سمجھنے کے قابل ہوں۔

مثال 3.41: $y = \sqrt{x^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2+1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہٰذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x)\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ
اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات 3.7 درج ذیل کہتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[g(x)] \cdot g'(x) \tag{3.8}$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال 3.42:

$$\frac{d}{dx}\overbrace{\sin}^{\text{بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی}} = \overbrace{\cos}^{\text{تفرق بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال 3.43: $g(t)=\tan(5-\sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5-\sin 2t))\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\frac{d}{dt}(5-\sin 2t) && u=5-\sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق}\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\left(0-(\cos 2t)\cdot\frac{d}{dt}(2t)\right) && u=2t \text{ لے کر } 5-\sin u \text{ کا تفرق}\\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2\\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5-\sin 2t)
\end{aligned}$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات

تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y=f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d}{dx}f(u)=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

قاعدہ 3.8: **طاقت کا زنجیری قاعدہ**
اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{3.9}$$

مثال 3.44:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^5 x &= 5\sin^4 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \\ &= 5\sin^4 x \cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1) \\ &= -3(2x+1)^{-4}(2) \\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4) \\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3) \\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{3x-2}\Big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال 3.45: درجات بالمقابل ریڈیئن
یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ π ریڈیئن $= 180^\circ$ ہوتا ہے لہٰذا $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ ریڈیئن ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^\circ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180}\sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی پیمائش درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال 3.46: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟
حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخلی ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
H &= s^3, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(6s^2)\\
H &= H_0 \quad \text{پر} \quad t = 0\\
H &= \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پر} \quad t = 1\,\mathrm{h}
\end{aligned}
$$

اب ہمیں $H = 0$ پر t تلاش کرنا ہو گا۔
ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -6ks^2\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -2k
\end{aligned}
$$

حاصل کرتے ہیں۔اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔ پگھلنے کا وقت $2kt = s_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\tfrac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہٰذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1-0.91} \approx 11\,\text{h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال 3.230 تا سوال 3.237 میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال 3.230: $y = 6u - 9, \quad u = \frac{1}{2}x^4$
جواب: $12x^3$

سوال 3.231: $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

سوال 3.232: $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$
جواب: $3\cos(3x+1)$

سوال 3.233: $y = \cos u, \quad u = -\frac{x}{3}$

سوال 3.234: $y = \cos u, \quad u = \sin x$
جواب: $-\sin(\sin x)\cos x$

سوال 3.235: $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

سوال 3.236: $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$
جواب: $10\sec^2(10x-5)$

سوال 3.237: $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

سوال 3.238 تا سوال 3.247 میں تفاعل کو $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ صورت میں لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 3.238: $y=(2x+1)^{-7}$

جواب: $u=2x+1$ لیتے ہوئے $y=u^5$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=5u^4\cdot 2=10(2x+1)^4$ ہو گا۔

سوال 3.239: $y=(4-3x)^9$

سوال 3.240: $y=(1-\frac{x}{7})^{-7}$

جواب: $u=(1-x/7)$ لے کر، $y=u^{-7}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-7u^{-8}\cdot(\frac{1}{7})=(1-x/7)^{-8}$

سوال 3.241: $y=(\frac{x}{2}-1)^{-10}$

سوال 3.242: $y=(\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x})^4$

جواب: $u=x^2/8+x-1/x$ لے کر، $y=u^4$ ،

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=4(x^2/8+x-1/x)^3(x/4+1+1/x^2)$$

سوال 3.243: $y=(\frac{x}{5}+\frac{1}{5x})^5$

سوال 3.244: $y=\sec(\tan x)$

جواب: $u=\tan x$ لے کر $y=\sec u$ اور

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(\sec u\tan u)(\sec^2 x)=\sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$$

سوال 3.245: $y=\cos(\pi-\frac{1}{x})$

سوال 3.246: $y=\sin^3 x$

جواب: $u=\sin x$ لے کر $y=u^3$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u^2\cos x=3\sin^2 x\cos x$

سوال 3.247: $y=5\cos^{-4} x$

سوال 3.248 تا سوال 3.267 میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 3.248: $p=\sqrt{3-t}$

جواب: $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

سوال 3.249: $q=\sqrt{2r-r^2}$

سوال 3.250: $s=\frac{4}{3\pi}\sin 3t+\frac{4}{5\pi}\cos 5t$

جواب: $\frac{4}{\pi}(\cos 3t-\sin 5t)$

سوال 3.251: $s = \sin(\frac{3\pi t}{2}) + \cos(\frac{3\pi t}{2})$

سوال 3.252: $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$
جواب: $\frac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

سوال 3.253: $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$

سوال 3.254: $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$
جواب: $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\sin x$

سوال 3.255: $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

سوال 3.256: $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + (4 - \frac{1}{2x^2})^{-1}$
جواب: $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3(4-\frac{1}{2x^2})^2}$

سوال 3.257: $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}(\frac{2}{x}+1)^4$

سوال 3.258: $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$
جواب: $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

سوال 3.259: $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

سوال 3.260: $h(x) = x\tan(2\sqrt{x}) + 7$
جواب: $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$

سوال 3.261: $k(x) = x^2\sec(\frac{1}{x})$

سوال 3.262: $f(\theta) = (\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta})^2$
جواب: $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

سوال 3.263: $g(t) = (\frac{1+\cot t}{\sin t})^{-1}$

سوال 3.264: $r = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$
جواب: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

سوال 3.265: $r = \sec\sqrt{\theta}\tan(\frac{1}{\theta})$

سوال 3.266: $q = \sin(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$
جواب: $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = (\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}})\cos(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

سوال 3.267: $q = \cot(\frac{\sin t}{t})$

سوال 3.268 تا سوال 3.277 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 3.268: $y = \sin^2(\pi t - 2)$
جواب: $2\pi \sin(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$

سوال 3.269: $y = \sec^2 \pi t$

سوال 3.270: $y = (1 + \cos 2t)^{-4}$
جواب: $\frac{8 \sin 2t}{(1+\cos 2t)^5}$

سوال 3.271: $y = (1 + \cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

سوال 3.272: $y = \sin(\cos(2t - 5))$
جواب: $-2\cos(\cos(2t - 5))\sin(2t - 5)$

سوال 3.273: $y = \cos(5 \sin(\frac{t}{3}))$

سوال 3.274: $y = (1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^3$
جواب: $(1 + \tan^4(\frac{t}{12}))^2(\tan^3(\frac{t}{12})\sec^2(\frac{t}{12}))$

سوال 3.275: $y = \frac{1}{6}(1 + \cos^2(7t))^3$

سوال 3.276: $y = \sqrt{1 + \cos(t^2)}$
جواب: $\frac{-t \sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

سوال 3.277: $y = 4\sin(\sqrt{1 + \sqrt{t}})$

سوال 3.278 تا سوال 3.281 میں y'' تلاش کریں۔

سوال 3.278: $y = (1 + \frac{1}{x})^3$
جواب: $\frac{6}{x^3}(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{2}{x})$

سوال 3.279: $y = (1-\sqrt{x})^{-1}$

سوال 3.280: $y = \frac{1}{9}\cot(3x-1)$
جواب: $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$

سوال 3.281: $y = 9\tan(\frac{x}{3})$

تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال 3.282 تا سوال 3.287 میں x کی دی گئی قیمت پر $(f\circ g)'$ تلاش کریں۔

سوال 3.282: $f(u) = u^5+1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$
جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 3.283: $f(u) = 1-\frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

سوال 3.284: $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$
جواب: $-\pi/4$

سوال 3.285: $f(u) = u+\frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = \frac{1}{4}$

سوال 3.286: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}, \quad u = g(x) = 10x^2+x+1, \quad x = 0$
جواب: 0

سوال 3.287: $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2}-1, \quad x = -1$

سوال 3.288: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x=2$ اور $x=3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $2f(x),\ x=2$

ب. $f(x)+g(x),\ x=3$

ج. $f(x)\cdot g(x),\ x=3$

د. $f(x)/g(x),\ x=2$

ھ. $f(g(x)),\ x=2$

و. $\sqrt{f(x)},\ x=2$

ز. $1/g^2(x),\ x=3$

ح. $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)},\ x=2$

جواب: (ا) $2/3$ ، (ب) $2\pi+5$ ، (ج) -8π ، (د) $37/6$ ، (ہ) -1 ، (و) $\frac{\sqrt{2}}{24}$ ، (ز) $5/32$ ، (ح) $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$

سوال 3.289: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x=0$ اور $x=1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $5f(x)-g(x),\ x=1$

ب. $f(x)g^3(x),\ x=0$

ج. $\frac{f(x)}{g(x)+1},\ x=1$

د. $f(g(x)),\ x=0$

ھ. x=0 g(f(x)),

و. $(x^{11}+f(x))^{-2},\ x=1$

ز. x=0 f(x+g(x)),

سوال 3.290: اگر $s=\cos\theta$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=5$ ہوں تب $\theta=3\pi/2$ پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔
جواب: 5

سوال 3.291: اگر $y=x^2+7x-5$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}$ ہوں تب $x=1$ پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

مرکب کے کئی صورتیں

اگر مرکب تفاعل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہو گا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہو گا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہو گا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال 3.292: تفاعل $y=x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35$

ب. $y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1}$

جواب: (ا) 1، (ب) 1

سوال 3.293: تفاعل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

ا. $y = u^3, \quad u = \sqrt{x}$

ب. $y = \sqrt{u}, \quad u = x^3$

مماس اور ڈھلوان

سوال 3.294:

ا. $x = 1$ پر منحنی $y = 2\tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منحنی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

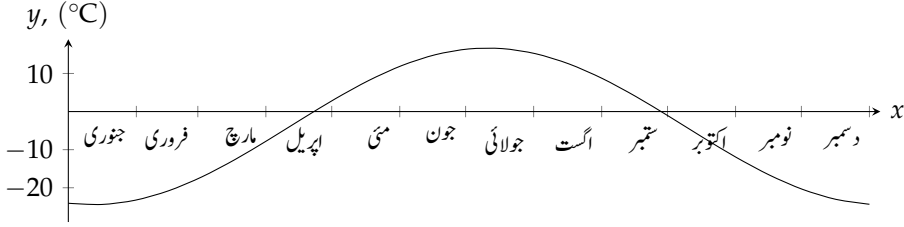
جواب: (ا) $y = \pi x + 2 - \pi$، (ب) $\pi/2$

سوال 3.295:

ا. مبدا پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin \frac{x}{2}$ کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبدا پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی مماسوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لئے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin \frac{x}{m}$ کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin 2x$ دو چکر پورے کرتا ہے، تفاعل $y = \sin \frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقفے پر تفاعل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبدا پر تفاعل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 3.53: اوسط درجہ حرارت

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 3.296: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پسٹن[38] اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمحہ t پر پسٹن کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیطہ A اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔ تعدد دگنا کرنے سے پسٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہو گا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔)

جواب: سمتی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

سوال 3.297: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا[39] کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل 3.53 میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$y = 20.56\sin[\tfrac{2\pi}{365}(x-101)] - 3.89$$

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

سوال 3.298: محور لکیر پر ایک جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6\,\mathrm{s}$ پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟

جواب: $v = 0.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = -\frac{4}{125}\mathrm{m\,s^{-2}}$

piston[38]
alaska[39]

سوال 3.299: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال 3.300: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار $\sqrt{s}$ کے بالعکس متناسب ہے جہاں زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال 3.301: x محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ ہے۔دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال 3.302: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہو گی۔

سوال 3.303: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

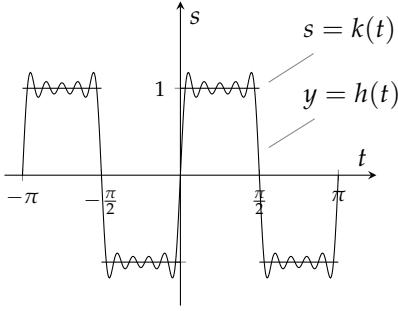
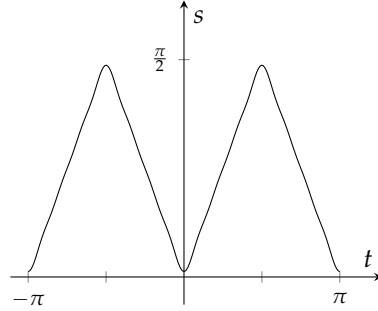
$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{ور} \quad (g \circ f)(x) = \left|x^2\right| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں ہے۔کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.304: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کے منحنی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.305: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لئے دکھائیں کہ طاقتی قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

سوال 3.306: $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

شکل 3.55: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کشیر رکنی سے اظہار (سوال 3.310)

شکل 3.54: دندان موج کا کشیر رکنی سے اظہار (سوال 3.309)

سوال 3.307: $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.308: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \le x \le 3.5$ کے لئے تفاعل $y = 2\cos 2x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لئے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \to 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.309: درج ذیل کشیر رکنی کو شکل 3.54 میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتا ہے۔

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کشیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

ج. کہاں پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکونیاتی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال 3.310: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل 3.55 میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732\sin 2t + 0.4244\sin 6t + 0.25465\sin 10t + 0.18186\sin 14t + 0.14147\sin 18t$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

3.6 خفی تفرق اور ناطق قوت نما

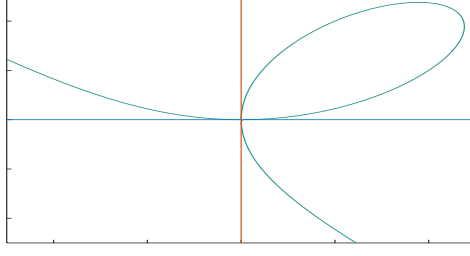
بعض اوقات مساوات $F(x,y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔اس کے باوجود ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام ناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔

خفی تفرق

چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ درحقیقت تین تفاعل $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہٰذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل 3.56)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔اس کے بعد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس ترکیب کو **خفی تفرق**[40] کہتے ہیں۔

---

implicit differentiation[40]

شکل 3.56: خفی منحنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

مثال 3.47: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔
حل: مساوات $y^2 = x$ در حقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ہم $x > 0$ کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

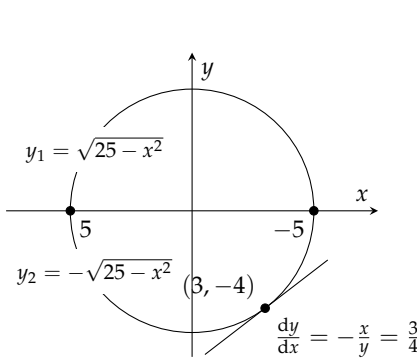
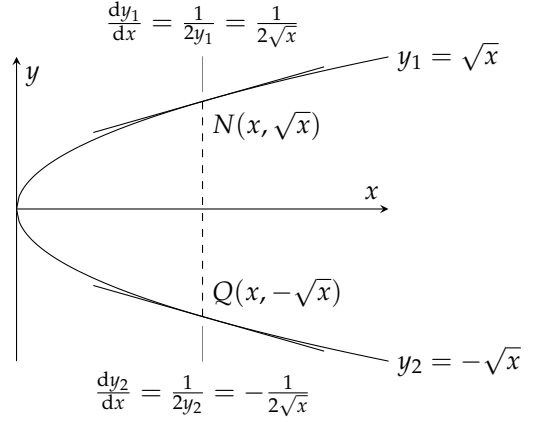
آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{زنجیری قاعدہ} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال 3.48: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.58)۔
حل: دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تفاعل $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ

شکل 3.58: ترسیم برائے مثال 3.48

شکل 3.57: ترسیم برائے مثال 3.47

$(3, -4)$ تفاعل y_2 پر پایا جاتا ہے لہٰذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4} \tag{3.10}$$

ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات 3.10 صرف x محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہو گا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

مثال 3.49: $2y = x^2 + \sin y$ کے لئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
2y &= x^2 + \sin y \\
\frac{d}{dx}(2y) &= \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y) \\
&= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y) \\
2\frac{dy}{dx} &= 2x + \cos y \frac{dy}{dx} \\
2\frac{dy}{dx} - \cos y \frac{dy}{dx} &= 2x \\
\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) &= 2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{2 - \cos y}
\end{aligned}$$

□

خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

1. y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔

2. $\frac{dy}{dx}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

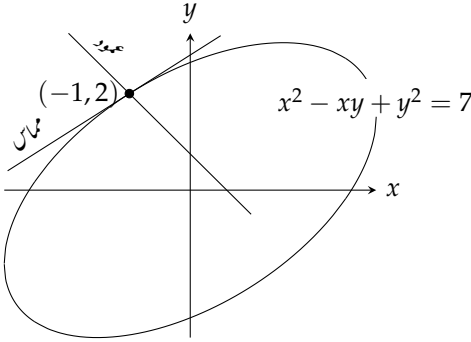
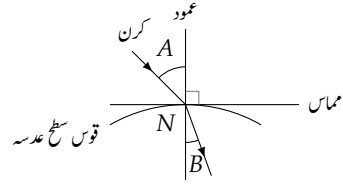
3. $\frac{dy}{dx}$ کو تجزی کریں۔

4. $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کریں۔

عدسہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ N پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل 3.59)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو **عمودی**[41] کہتے ہیں۔اس خط کو N پر منحنی کا **عمود** کہتے ہیں۔

[41] normal

شکل 3.60: ترسیمات برائے مثال 3.50

شکل 3.59: عدسہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمود کی طرف جھکتی ہے۔

□

عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.50: نقطہ $(-1,2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل 3.60)۔

حل: ہم خفی تفرق سے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہیں۔

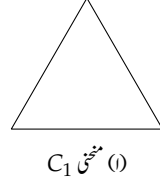
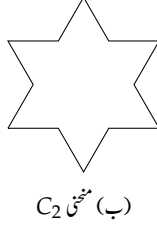
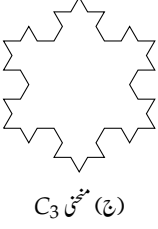
$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= 7 \\
\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(7) \\
2x - (x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(2y - x)\frac{dy}{dx} &= y - 2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{2y - x}
\end{aligned}$$

نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-1,2)} = \left.\frac{y - 2x}{2y - x}\right|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$

(ج) منحنی C_3

(ب) منحنی C_2

(ا) منحنی C_1

شکل 3.61: برف کی روئی۔

$(-1,2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{4}{5}(x - (-1))$$
$$y = \frac{4}{5} + \frac{14}{5}$$

اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1,2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 - \frac{5}{4}(x - (-1))$$
$$y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$$

□

برف کی روئی

ہلگے ون کوچ[42] کے منحنیات جنہیں برف کی روئی کہتے ہیں شکل 3.61 میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں جس کو ہم منحنی C_1 کہتے ہیں۔ ہر ضلع کے وسط پر باہر رخ مثلث الاضلاع بنا کر درمیانے $\frac{1}{3}$ ضلع کو مٹائیں۔یوں منحنی C_2 حاصل ہو گی۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے لامتناہی منحنیات بنائی جا سکتی ہیں۔ ان منحنیات کی تحدیدی صورت C_n کو **برف کی روئی**[43] کہتے ہیں، جہاں عدد n لامتناہی تک پہنچتا ہے۔

برف کی روئی بہت زیادہ غیر ہموار ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر اس کا مماس حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ تفاعل $F(x,y) = 0$ جو برف کی روئی کو ظاہر کرتا ہے، نا y کو x کا قابل تفرق تفاعل اور نا ہی x کو y کا قابل تفرق تفاعل ظاہر کرتا ہے۔ برف کی روئی پر صفحہ 671 پر دوبارہ غور کیا جائے گا جہاں لمبائی قوس کی بات کی جائے گی۔

[42] 1904
[43] snow flake

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 3.51: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}2x^3 - 3y^2 &= 7\\ \frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) &= \frac{d}{dx}(7)\\ 6x62 - 6yy' &= 0\\ x^2 - yy' &= 0\\ y' &= \frac{x^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)\end{aligned}$$

ہم اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(yy') &= \frac{d}{dx}(0)\\ 2x - y'y' - yy'' &= 0\\ yy'' &= 2x - (y')^2\\ y'' &= \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)\end{aligned}$$

ہم آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پر کرتے ہوئے x اور y کی روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)$$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح n کے لئے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ 3.6: **ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ**
اگر ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ ہے۔تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہٰذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلٰی مسئلہ کے تحت) y متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = px^{p-1}$$

اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}}\\ &= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{(x^{(p/q)})^{q-1}}\\ &= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}\\ &= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)}\\ &= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1}\end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 3.52:

ا.

تفاعل $x \geq 0$ جبکہ تفرق $x > 0$ کے لئے معین ہے
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب.

تفاعل تمام x جبکہ تفرق $x \neq 0$ کے لئے معین ہے $\qquad \dfrac{d}{dx}(x^{1/5}) = \dfrac{1}{5}x^{-4/5}$

□

طاقتی قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \tag{3.11}$$

مثال 3.53:

ا.

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x)$$

تفاعل وقفہ $[-1,1]$ جبکہ تفرق وقفہ $(-1,1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{d}{dx}(\cos x)\\ &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x)\\ &= \frac{1}{5}\sin x(\cos x)^{-6/5}\end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق

سوال 3.311 تا سوال 3.320 میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال 3.311: $y = x^{9/4}$
جواب: $\frac{9}{4}x^{5/4}$

سوال 3.312: $y = x^{-3/5}$

سوال 3.313: $y = \sqrt[3]{2x}$
جواب: $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

سوال 3.314: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال 3.315: $y = 7\sqrt{x+6}$
جواب: $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

سوال 3.316: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال 3.317: $y = (2x+5)^{-1/2}$
جواب: $-(2x+5)^{-3/2}$

سوال 3.318: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال 3.319: $y = x(x^2+1)^{1/2}$
جواب: $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

سوال 3.320: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال 3.321 تا سوال 3.328 میں پہلا تفرق تلاش کریں۔

سوال 3.321: $s = \sqrt[7]{t^2}$
جواب: $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

سوال 3.322: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال 3.323: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$

جواب: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال 3.324: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال 3.325: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

جواب: $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

سوال 3.326: $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

سوال 3.327: $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

جواب: $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$

سوال 3.328: $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

خفی تفرق

سوال 3.329 تا سوال 3.342 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 3.329: $x^2y + xy^2 = 6$

جواب: $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

سوال 3.330: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال 3.331: $2xy + y^2 = x + y$

جواب: $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

سوال 3.332: $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال 3.333: $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

جواب: $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

سوال 3.334: $(3xy+7)^2 = 6y$

سوال 3.335: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

جواب: $\frac{1}{y(x+1)^2}$

سوال 3.336: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 3.337: $x = \tan y$
جواب: $\cos^2 y$

سوال 3.338: $x = \sin y$

سوال 3.339: $x + \tan(xy) = 0$
جواب: $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

سوال 3.340: $x + \sin y = xy$

سوال 3.341: $y\sin(\frac{1}{y}) = 1 - xy$
جواب: $\frac{-y^2}{y\sin(\frac{1}{y})-\cos(\frac{1}{y})+xy}$

سوال 3.342: $y^2\cos(\frac{1}{y}) = 2x + 2y$

سوال 3.343 تا سوال 3.346 میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال 3.343: $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$
جواب: $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

سوال 3.344: $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال 3.345: $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$
جواب: $\frac{-r}{\theta}$

سوال 3.346: $\cos r + \cos\theta = r\theta$

بلند رتبی تفرق

سوال 3.347 تا سوال 3.352 میں خفی تفرق کی مدد سے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور بعد میں $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

سوال 3.347: $x^2 + y^2 = 1$
جواب: $y' = -\frac{x}{y},\ y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

سوال 3.348: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

سوال 3.349: $y^2 = x^2 + 2x$
جواب: $y' = \frac{x+1}{y},\ y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

سوال 3.350: $y^2 - 2x = 1 - 2y$

سوال 3.351: $2\sqrt{y} = x - y$
جواب: $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1},\ y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

سوال 3.352: $xy + y^2 = 1$

سوال 3.353: نقطہ $(2,2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لئے $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: -2

سوال 3.354: نقطہ $(0,-1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لئے $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود

سوال 3.355 تا سوال 3.356 میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 3.355: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x, \quad (-2,1), (-2,-1)$
جواب: $(-2,1) : m = -1,\ (-2,-1) : m = 1$

سوال 3.356: $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2, \quad (1,0), (1,-1)$

سوال 3.357 تا سوال 3.366 میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ منحنی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر منحنی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال 3.357: $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2,3)$
جواب: (ا) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$، (ب) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

سوال 3.358: $x^2 + y^2 = 25, \quad (3,-4)$

سوال 3.359: $x^2y^2 = 9, \quad (-1,3)$
جواب: (ا) $y = 3x + 6$، (ب) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

سوال 3.360: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2,1)$

شکل 3.62: منحنی آٹھ (سوال 3.369)

شکل 3.63: منحنی برائے سوال 3.370

سوال 3.361: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$
جواب: (ا) $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$ ، (ب) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

سوال 3.362: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3}, 2)$

سوال 3.363: $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$
جواب: (ا) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ ، (ب) $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

سوال 3.364: $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

سوال 3.365: $y = 2\sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$
جواب: (ا) $y = 2\pi x - 2\pi$ ، (ب) $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

سوال 3.366: $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

سوال 3.367: x محور کو $x^2 + xy + y^2 = 7$ دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟
جواب: نقطہ $(-\sqrt{7}, 0)$ اور $\sqrt{7}, 0$ ، ڈھلوان: -2

سوال 3.368: منحنی $x^2 + y^2 + xy = 7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (ا) مماس x محور کے متوازی ہے، (ب) مماس y محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{dy}{dx}$ غیر معین جبکہ $\frac{dx}{dy}$ معین ہے۔ان نقطوں پر $\frac{dx}{dy}$ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال 3.369: منحنی آٹھ نقطہ $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $y^4 = y^2 - x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.62)۔
جواب: $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ پر $m = -1$ ، $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $m = \sqrt{3}$

سوال 3.370: نقطہ $(1,1)$ پر $y^2(2-x)=x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل 3.63)۔

سوال 3.371: چار نقطوں $(-3,2)$ ، $(-3,-2)$ ، $(3,2)$ اور $(3,-2)$ پر $y^4-4y^2=x^4-9x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔
جواب: $(-3,2): m=-\frac{27}{8}; (-3,-2): m=\frac{27}{8}; (3,2): m=\frac{27}{8}; (3,-2): m=-\frac{27}{8}$

سوال 3.372:

ا. نقطہ $(4,2)$ اور $(2,4)$ پر پتا $x^3+y^3-9xy=0$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل 3.56)۔

ب. مبدا کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتصابی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 3.373: اگر $f''(x)=x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

ا. $f(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}-3$

ب. $f(x)=\frac{9}{10}x^{5/3}-7$

ج. $f'''(x)=-\frac{1}{3}x^{-4/3}$

د. $f'(x)=\frac{3}{2}x^{2/3}+6$

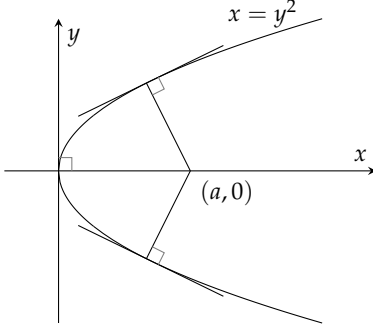
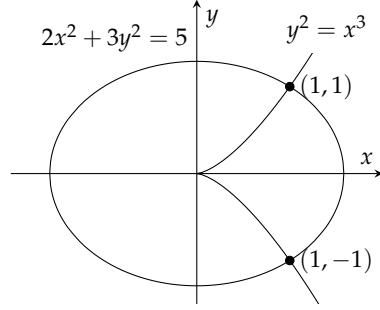
جواب: (ا) غلط، (ب) درست، (ج) درست، (د) درست

سوال 3.374: کیا نقطہ $(1,1)$ اور $(1,-1)$ پر $2x^2+3y^2=5$ اور $y^2=x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 3.64)۔

سوال 3.375: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $x^2+2xy-3y^2=0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟
جواب: $(3,-1)$

سوال 3.376: منحنی $xy+2x-y=0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x+y=0$ کے متوازی ہو۔

سوال 3.377: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a,0)$ سے قطع مکافی $x=y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a>\frac{1}{2}$ ہو گا۔ تیسرا عمود x محور ہے۔ a کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل 3.65)؟

سوال 3.378: مثال 3.52 اور مثال 3.53-ا میں کس جیومیٹری کی بنا دائرہ کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

شکل 3.65: منحنی برائے سوال 3.377

شکل 3.64: ترسیم برائے سوال 3.374

سوال 3.379 اور سوال 3.380 میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

سوال 3.379: $\quad xy^3 + x^2y = 6$

جواب: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}, \; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}, \; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{1}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x}$

سوال 3.380: $\quad x^3 + y^2 = \sin^2 y$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 3.381:

ا. منحنی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ عمومی طریقہ اور مخفی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟

ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے یک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.382:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار خفی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2+y^2=4$ کو y کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2+y^2=4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے یک رتبی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 3.383 تا سوال 3.390 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطے پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

سوال 3.383: $x^3-xy+y^3=7, \quad N(2,1)$

سوال 3.384: $x^5+y^3x+yx^2+y^4=4, \quad N(1,1)$

سوال 3.385: $y^2+y=\frac{2+x}{1-x}, \quad N(0,1)$

سوال 3.386: $y^3+\cos(xy)=x^2, \quad N(1,0)$

سوال 3.387: $x+\tan(\frac{y}{x})=2, \quad N(1,\pi/2)$

سوال 3.388: $xy^3+\tan(x+y)=1, \quad N(\pi/4,0)$

سوال 3.389: $2y^2+(xy)^{1/3}=x^2+2, \quad N(1,1)$

سوال 3.390: $x\sqrt{1+2y}+y=x^2, \quad N(1,0)$

3.7 دیگر شرح تبدیلی

ٹینکی سے $3000\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال 3.54: انعکاس

$3000\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔ یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل 3.66)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -3000$$

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

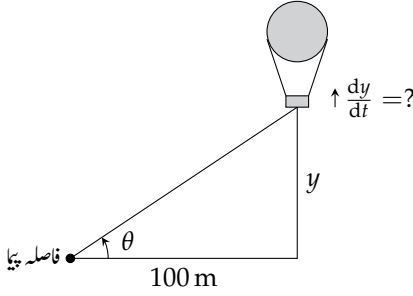
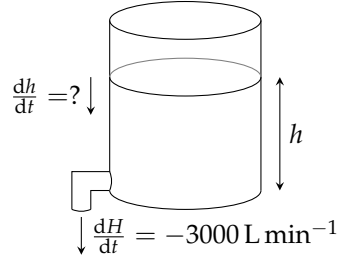
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 1000\pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً $r = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 10\,\mathrm{m}$ کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 1\,\mathrm{m})$$
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -0.95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 10\,\mathrm{m})$$

□

شکل 3.67: غبارہ (مثال 3.55)

شکل 3.66: پانی کی ٹینکی (مثال 3.54)

مثال 3.55: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل 3.67)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے $100\,\mathrm{m}$ دور واقع فاصلہ پیما[44] سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیما کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}}$ تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصور کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیما کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیما سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ $100\,\mathrm{m}$ ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt}=0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}}\qquad (\theta=\tfrac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta=\pi/4$ کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ پوچھا گیا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100}=\tan\theta \quad\implies\quad y=100\tan\theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{dy}{dt}$ (درکار معلومات) اور $\frac{d\theta}{dt}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{dy}{dt}=100\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

---

[44] range finder

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100(\sec\tfrac{\pi}{4})^2(0.14) = 28\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصور کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہو گا)۔
- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہو گا۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نا معلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال 3.56: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ $0.6\,\mathrm{km}$ اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ $0.8\,\mathrm{km}$ ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی محدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو x محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو y محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x، پولیس کی گاڑی کا مقام y اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x، y اور s متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔

دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8\,\mathrm{km}, \quad y = 0.6\,\mathrm{km}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60\,\mathrm{km\,h^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔
پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{s}\Big(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)\end{aligned}$$

چھٹا قدم: $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2+0.6^2}}\Big(0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 0.6(-60)\Big)\\ 20 &= 0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 36\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{20+36}{0.8} = 70\end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار $70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔

□

مثال 3.57: پانی کی مخروطی ٹینکی $9\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ، اس کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $6\,\mathrm{m}$ ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟
حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔
پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔
دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔
چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \implies \quad x = \frac{y}{2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3}\pi(\tfrac{y}{2})^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

پانچواں قدم: t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi y^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi(6^2)}\cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32\,\mathrm{m}\,\mathrm{min}^{-1}$$

اس لمحے پر پانی کی گہرائی $0.32\,\mathrm{m}\,\mathrm{min}^{-1}$ سے بڑھ رہی ہے۔ □

سوالات

سوال 3.391: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔
جواب: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 2\pi r \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

سوال 3.392: فرض کریں کرہ کا رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال 3.393: بیلن کے رداس r ، قد h اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا r اور نا h مستقل ہوں تب $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ، (ب) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2\pi r h \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ، (ج) $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + 2\pi r h \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

سوال 3.394: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو گا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

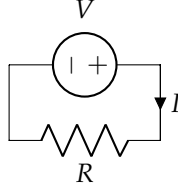
ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال 3.395: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباو V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل 3.68 میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباو $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

شکل 3.68: برقی دور برائے سوال 3.395

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیئر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گا؟ کیا R بڑھ رہا ہو گا یا گھٹ رہا ہو گا؟

جواب: (ا) $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ ، (ب) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$ ، (ج) $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{I}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - \frac{V}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right)$ ، (د) $\frac{3}{2}\,\Omega\,\mathrm{s^{-1}}$ ، مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

سوال 3.396: برقی دور میں طاقت P ، مزاحمت R اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W) ، اوہم Ω اور ایمپیئر (A) ہیں۔

ا. $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہے؟

سوال 3.397: کارتیسی محدد میں نقطہ $(x, 0)$ اور $(0, y)$ کے بیچ فاصلہ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ وقت کو t سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، (ب) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ ، (ج) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

سوال 3.398: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہو گی۔

ا. فرض کریں x ، y اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال 3.399: ایک مثلث جس کے ضلع a اور b جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ ہو گا۔

ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ، (ب) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ ، (ج) $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$

سوال 3.400: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے جس سے اس کا رداس $0.01\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس $50\,\mathrm{cm}$ ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال 3.401: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ اور $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ہیں۔ جب $l = 12\,\mathrm{cm}$ اور $w = 5\,\mathrm{cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

جواب: (ا) $14\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ سے بڑھتا ہے؛ (ب) $0\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ، مستقل؛ (ج) $-\frac{14}{13}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ، گھٹ رہا ہے۔

سوال 3.402: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ان کی شرح تبدیلی

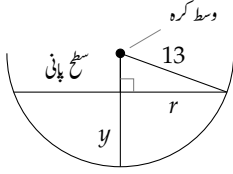
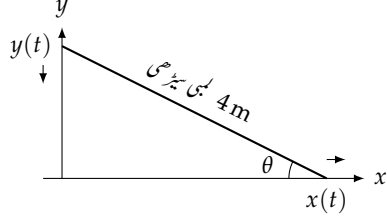
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

ہیں۔ جس لمحہ $x = 4$ ، $y = 3$ اور $z = 2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہو گی؟

سوال 3.403: دیوار کے ساتھ لگی $4\,\mathrm{m}$ لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل 3.69)۔ جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ $3\,\mathrm{m}$ ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیڑھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

شکل 3.69: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال 3.403)

شکل 3.70: نصف کرہ ٹینکی (سوال 3.409)

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

جواب: (ا) $\frac{-3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{-\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

سوال 3.404: دو ہوائی جہاز $7000\,\mathrm{m}$ کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔جہاز الف کی رفتار $1000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ جبکہ جہاز ب کی رفتار $850\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ $50\,\mathrm{km}$ اور ب کا فاصلہ $100\,\mathrm{km}$ ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

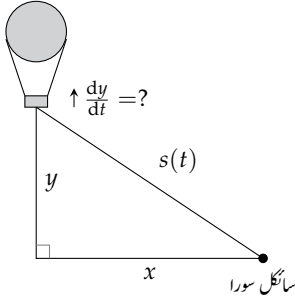
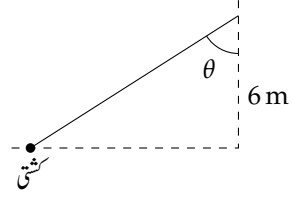
سوال 3.405: ایک لڑکی $300\,\mathrm{m}$ بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ہوا پتنگ کو افقی رخ $25\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ $500\,\mathrm{m}$ ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟
جواب: $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 3.406: پرانے انجن کی بیلن کو خراد کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔خراد کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25\,\mathrm{\mu m}$ بڑھاتی ہے۔جب رداس $9.8\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال 3.407: ریت کو $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔جب ڈھیر $4\,\mathrm{m}$ اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (ا) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔
جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 11.19\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$، (ب) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 14.92\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$

سوال 3.408: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی $6\,\mathrm{m}$ اور رداس $45\,\mathrm{m}$ ہیں سے پانی کو $50\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (ا) جب پانی $5\,\mathrm{m}$ گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔

سوال 3.409: نصف کرہ جس کا رداس $R = 13\,\mathrm{m}$ ہے سے پانی کا انعکاس $6\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل 3.70)۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3}y^2(3R-y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی $8\,\mathrm{m}$ ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

شکل 3.72: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال 3.413)

شکل 3.71: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال 3.412)

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

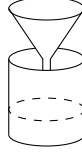
ج. جب پانی 8 m گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

جواب: (ا) $-\frac{1}{24\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ ، (ب) $r = \sqrt{26y - y^2}\,\mathrm{m}$ ، (ج) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$

سوال 3.410: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔

سوال 3.411: ایک غبارے میں $100\pi\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے ہیلیم[45] گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس 5 m ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $1\,\mathrm{m/min}$ ، $40\pi\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}$

سوال 3.412: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے 6 m اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل 3.71)۔رسی کو $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (ا) جب رسی کی لمبائی 10 m ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.413: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔جب یہ 65 m بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی $17\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل 3.72)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟
جواب: $11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

شکل 3.73: مخروط چھلنی (سوال 3.414)

سوال 3.414: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10\,\mathrm{cm^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل 3.73)۔ (ا) چھلنی میں چائے کی گہرائی $5\,\mathrm{cm}$ ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال 3.415: اخراج قلب جرمنی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً $7\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر $6\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب $30\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹر فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت $\mathrm{mL/L}$ اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223\,\mathrm{mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41\,\mathrm{mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223\,\mathrm{mL/min}}{41\,\mathrm{mL/L}} \approx 5.68\,\mathrm{L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟
جواب: $\frac{466}{1681}\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔

سوال 3.416: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لئے $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔

helium[45]

ا.

$$r(x)=9x,\quad c(x)=x^3-6x^2+15x;\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.1,\quad x=2$$

ب.

$$r(x)=70x,\quad c(x)=x63-6x62+\frac{45}{x};\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.05,\quad x=1.5$$

سوال 3.417: قطع مکافی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x=3\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 3.418: دوسرا قطع مکافی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکافی $y=\sqrt{-x}$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $\frac{8}{\mathrm{ms}}$ سے گھٹتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x=-4\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.419: مستوی پر حرکت۔ کارتیسی محدد پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر x اور y محدد وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب مبدا سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 3.420: حرکت پذیر سایہ۔ $2\,\mathrm{m}$ قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلب زمین سے $5\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے $4\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.421: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب $15\,\mathrm{m}$ بلندی پر نسب ہے۔ کھمبے سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل 3.74)۔ آدھے سیکنڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ($g=9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)
(جواب: $490\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

سوال 3.422: آپ $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے $150\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $40\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو[46] بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آ رہی ہے (شکل 3.75)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سیکنڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال 3.423: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس $0.1\,\mathrm{m}$ ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو $10\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی $2\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟
جواب: $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=1.66\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=55\,\mathrm{\mu m\,s^{-1}}$

---

[46] video

شکل 3.74: گیند کا سایہ (سوال 3.421)

شکل 3.75: گاڑی کی ویڈیو (سوال 3.422)

شکل 3.76: عمارت کا سایہ (سوال 3.425)

شکل 3.77: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال 3.426)

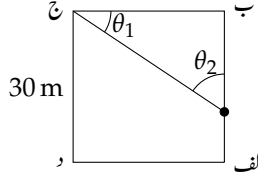
سوال 3.424: موٹروے پولیس۔ $1\,\mathrm{km}$ بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹروے کے ٹھیک اوپر $500\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹروے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ $5\,\mathrm{km}$ ناپتا ہے جو اس لمحے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

سوال 3.425: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج $80\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل 3.76)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر $60\,\mathrm{m}$ ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے جو اس لمحہ $0.27^\circ/\mathrm{min}$ کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب $\mathrm{cm/min}$ میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔
جواب: $58.9\,\mathrm{cm/min}$

سوال 3.426: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک 90° زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریخنہ چوراہے کی جانب $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل 3.77)۔ جب عفت بریخنہ اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب $20\,\mathrm{m}$ اور $15\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر ہوں، زاویہ θ کی شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال 3.427: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھڑی کی الٹ رخ چکور راہ پر $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چکور کے اطراف کی لمبائی $30\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 3.78)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ θ_1 اور θ_2 کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

شکل 3.78: بچوں کا کھیل (سوال 3.427)

جواب: (ا) $\frac{-12}{\sqrt{13}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، (ب) $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 3.428: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$ ہے۔جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال 3.429: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں $120°$ کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔جہاز الف کی رفتار $28\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟
جواب: $4\sqrt{109}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

باب 4

تفرق کا استعمال

اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ ہم تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی کرتے ہیں اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کی صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ تکملی احصاء (باب 5) کی راہ ہموار کرتا ہے۔

4.1 تفاعل کی انتہائی قیمتیں

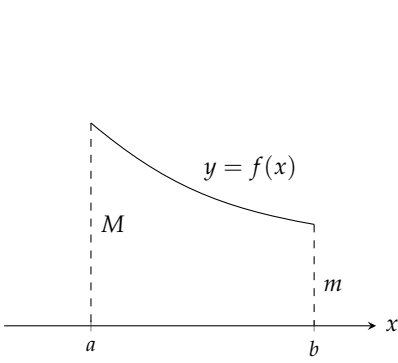
اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

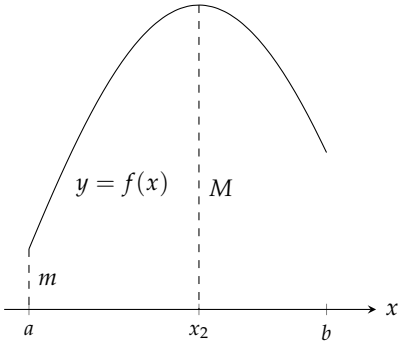
مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ

بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کا اس دائرہ کار پر مطلق بلند تر قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت ہو گا جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں ان انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ تکمل احصاء کی نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔

مسئلہ 4.1: **استمراری تفاعل کا مسئلہ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ**

بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کا I پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت M اور مطلق کم سے کم قیمت m پایا جائے گا۔یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1)=m$ اور $f(x_2)=M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے $m \le f(x) \le M$ ہو (شکل 4.1)۔

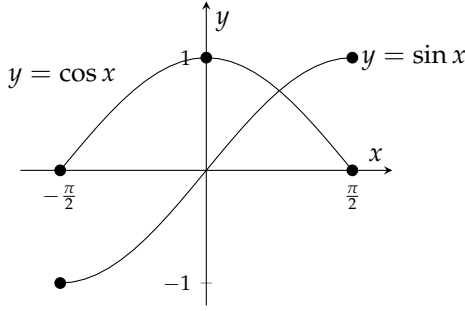
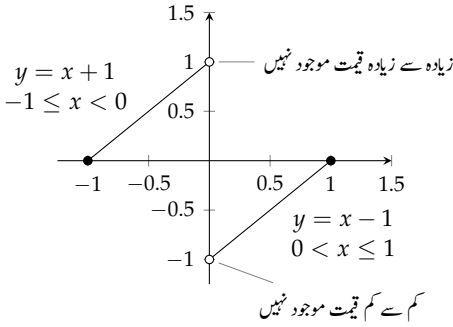
(ا) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔

(ب) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم آخری نقطوں پر ہے۔

(ج) کم سے کم اندرونی نقطہ جبکہ زیادہ سے زیادہ آخری نقطہ ہے۔

(د) زیادہ سے زیادہ اندرونی نقطہ جبکہ کم سے کم آخری نقطہ پر ہے۔

شکل 4.1: زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔

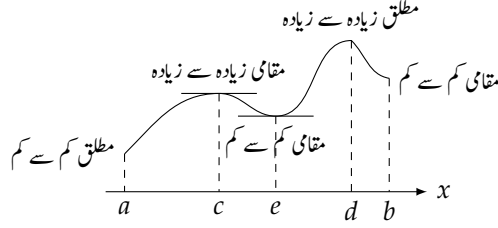
شکل 4.2: ترسیم برائے مثال 4.1

y
زیادہ سے زیادہ قیمت موجود نہیں
1
$y = x$
$0 < x < 1$
x
1
کم سے کم قیمت موجود نہیں

شکل 4.3: کھلا وقفہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں ہے۔

شکل 4.4: واحد ایک نقطہ عدم استمرار کی بنا زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں غیر یقینی ہو سکتے ہیں۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہٰذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال 4.1: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور دو بار کم سے کم قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک بار زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور ایک بار کم سے کم قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل 4.2)۔ □

جیسا شکل 4.3 اور شکل 4.4 واضح کرتے ہیں مسئلہ 4.1 میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

شکل 4.5: مقامی اور مطلق انتہا۔

شکل 4.4 میں تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی بنا تفاعل کا نا کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی اس کی کوئی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

شکل 4.5 میں تفاعل کے پانچ انتہا نقطے دکھائے گئے ہیں۔اس تفاعل کا کم سے کم نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم ہے۔نقطہ c پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔

تعریف : **مطلق انتہائی قیمتیں**
فرض کریں تفاعل f کا دائرہ کار D ہے۔نقطہ c پر تفاعل f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \le f(c)$$

اور D میں c پر تب f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \ge f(c)$$

□

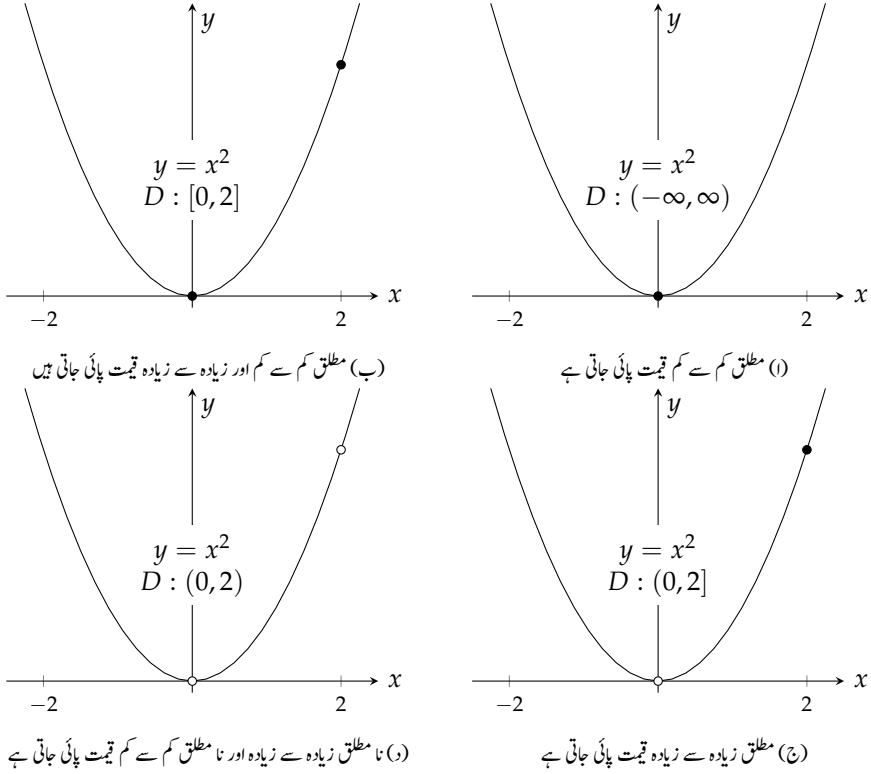
مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم کو مطلق **انتہا**[1] کہتے ہیں۔انہیں **عالمگیر**[2] انتہا بھی کہتے ہیں۔

---
[1] extrema
[2] global

(ا) مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے

(ب) مطلق کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہیں

(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے

(د) نا مطلق زیادہ سے زیادہ اور نا مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے

شکل 4.6: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال 4.2)۔

ایک جیسے تفاعل، جنہیں ایک جیسا تعریفی قاعدہ بیان کرتا ہو، کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

مثال 4.2:

	تعریفی تفاعل	دائرہ کار D	مطلق انتہا
(ا)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	مطلق زیادہ سے زیادہ نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ب)	$y = x^2$	$[0, 2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے
(ج)	$y = x^2$	$(0, 2]$	مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت موجود نہیں ہے
(د)	$y = x^2$	$(0, 2)$	کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے

شکل 4.6 دیکھیں۔ □

تعریف: **مقامی انتہا قیمت**

تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلا وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

$$f(x) \geq f(c)$$

□

ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفہ کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلا وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل 4.5 میں تفاعل f کا c اور d پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت جبکہ a ، e اور b پر اس کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہیں۔

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت بھی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اپنی پڑوس میں بھی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی۔یوں تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتوں کی جدول میں مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی کم سے کم قیمتوں کی جدول میں مطلق کم سے کم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

انتہا کا حصول

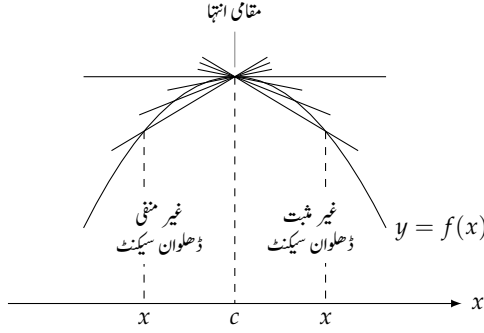
جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کے انتہا کی حصول کے لئے صرف چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہو گی۔

مسئلہ 4.2: **یک رتبی مسئلہ برائے مقامی انتہا** فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ c پر f کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہو گی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا ہے اور کہ $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا ہے۔صفر وہ واحد عدد ہے جو نا مثبت اور نا منفی ہے لہٰذا $f'(c)$ صفر ہو گا۔

فرض کریں کہ c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.7)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہو گا۔چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہٰذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہو گی۔

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

شکل 4.7: اندرونی نقطہ پر مقامی انتہا پر ڈھلوان صفر ہو گی (مسئلہ 4.2)۔

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔چونکہ c کے دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \le f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \le 0 \tag{4.1}$$

ہو گا۔اسی طرح c کے بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \le f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \ge 0 \tag{4.2}$$

ہو گا۔مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \ge f(c)$ استعمال کرنا ہو گا جس سے مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔

1. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

2. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

3. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو **نقطہ فاصل**[3] کہتے ہیں۔

□

خلاصہ
تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کی دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں۔

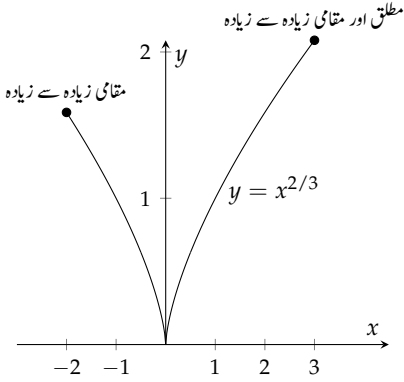
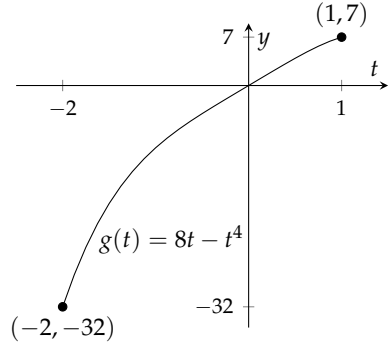
عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ 4.1 ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ 4.2 کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جا سکتا ہے کہ آیا نقطہ پر زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.3: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہو گا۔ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

نقطہ فاصل پر قیمت	$f(0) = 0$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(-2) = 4$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(1) = 1$

تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

مثال 4.4: دائرہ کار $[-2,1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہو گا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$g'(t) = 8 - 4t^3 = 0$$
$$t^3 = 2$$
$$t = 2^{1/3}$$

شکل 4.9: ترسیم برائے مثال 4.5

شکل 4.8: ترسیم برائے مثال 4.4

ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں ہے۔یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی: (شکل 4.8)

$$g(-2) = -32 \quad \text{مطلق کم سے کم قیمت}$$
$$g(1) = 7 \quad \text{مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت}$$

□

مثال 4.5: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2, -3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔

حل: یک رتبی تفرق

$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا ہے البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$h(0) = 0$$
$$h(-2) = (-2)^{2/3} = 4^{1/3}$$
$$h(3) = (3)^{2/3} = 9^{1/3}$$

مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق کم سے کم قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل 4.9)۔ □

critical point[3]

شکل 4.10: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

شکل 4.11: $x = 0$ پر $y = x^3$ کا کوئی انتہا نہیں پایا جاتا ہے اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔

اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں، ضروری نہیں ہے کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطہ پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل 4.10 اور شکل 4.11 اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے اور سوال 4.34 میں آپ سے ایسا تفاعل پیش کرنے کو کہا گیا ہے جو اپنے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر انتہائی قیمت اختیار نہیں رکھتا ہے۔

سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول

کیا سوال 4.1 تا سوال 4.6 میں $[a, b]$ کے بیچ تفاعل کے مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ سمجھائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ 4.1 میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا ہے۔

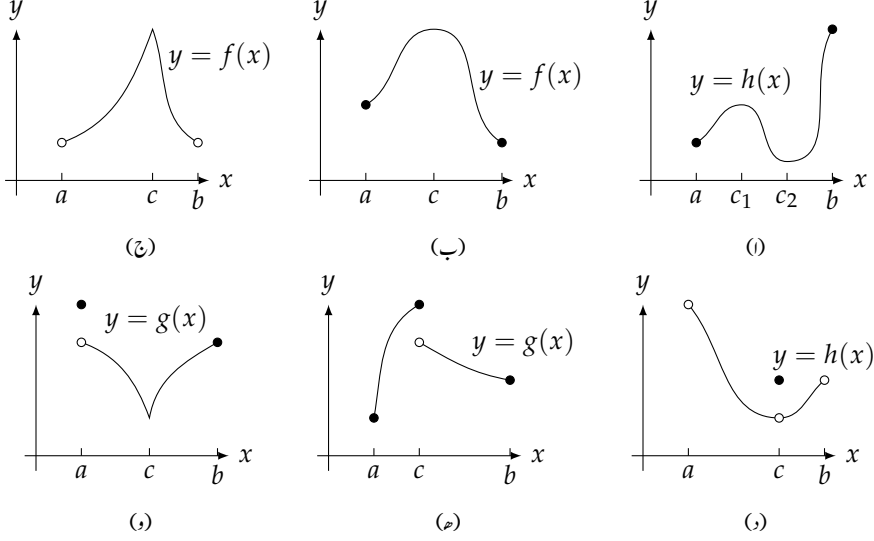
سوال 4.1: شکل 4.12-ا
جواب: $x = c_2$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = b$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 4.2: شکل 4.12-ب

سوال 4.3: شکل 4.12-ج
جواب: $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ؛ مطلق کم سے کم غیر موجود۔

سوال 4.4: شکل 4.12-د

سوال 4.5: شکل 4.12-ہ
جواب: $x = a$ پر مطلق کم سے کم؛ $x = c$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ۔

سوال 4.6: شکل 4.12-و

شکل 4.12: اشکال برائے سوال 4.1 تا سوال 4.6

بند وقفہ پر مطلق انتہا

سوال 4.7 تا سوال 4.22 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 4.7: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \le x \le 3$
جواب: $x = -3$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ؛ $x = -\frac{19}{3}$ پر مطلق کم سے کم۔ شکل 4.13-ا

سوال 4.8: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \le x \le 1$

سوال 4.9: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \le x \le 2$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 3 ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-ب

سوال 4.10: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \le x \le 1$

سوال 4.11: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$
جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: -0.25 ، مطلق کم سے کم: -4 ، شکل 4.13-ج

سوال 4.12: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

سوال 4.13: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-د

سوال 4.14: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 4.15: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم: 0 ، شکل 4.13-ہ

سوال 4.16: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

سوال 4.17: $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 1 ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-و

سوال 4.18: $f(x) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

سوال 4.19: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-ز

سوال 4.20: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

سوال 4.21: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

جواب: مطلق زیادہ سے زیادہ: 2 ، مطلق کم سے کم: -1 ، شکل 4.13-ح

سوال 4.22: $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \le t \le 7$

سوال 4.23 تا سوال 4.26 میں تفاعل کی مطلق کم سے کم اور مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال 4.23: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

جواب: $(0, 8)$ پر بڑھتا ہے، $(-1, 0)$ پر گھٹتا ہے، $x = 8$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16 اور $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.24: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

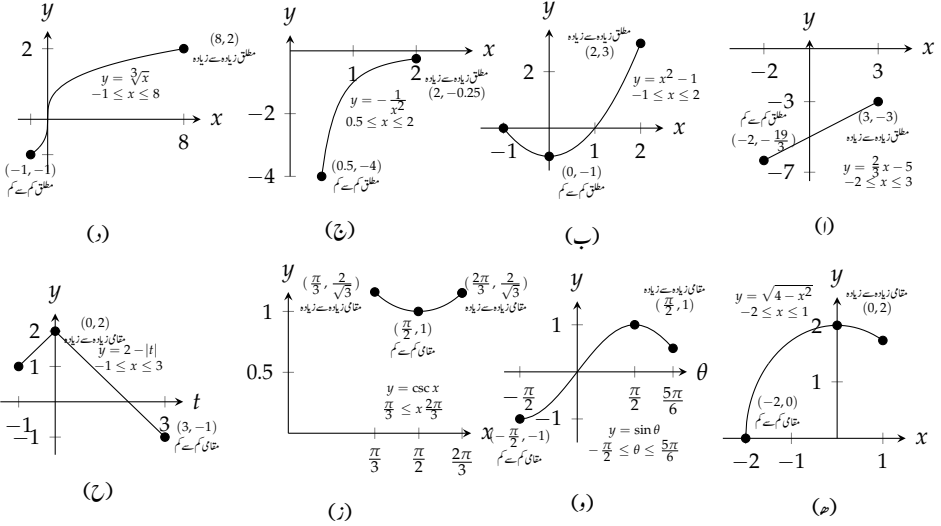
سوال 4.25: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

جواب: $(-32, 1)$ پر بڑھتا ہے، $\theta = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق کم سے کم -8 ہے۔

سوال 4.26: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال 4.27 تا سوال 4.27 میں دی گئے دائرہ کار پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال 4.27:

شکل 4.13: حل ترسیمات سوال 4.7 تا سوال 4.22

ا. $f(x)=x^2-4,\quad -2\le x\le 2$

ب. $g(x)=x^2-4,\quad -2\le x<2$

ج. $h(x)=x^2-4,\quad -2<x<2$

د. $k(x)=x^2-4,\quad -2\le x<\infty$

ہ. $l(x)=x^2-4,\quad 0<x<\infty$

جواب: (ا) $x=\mp 2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x=0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ب) $x=-2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x=0$ پر مقامی کم سے کم -4 ہے، مطلق زیادہ سے زیادہ 0 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ج) مقامی زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x=0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (د) $x=-2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے، $x=0$ پر مقامی کم سے کم -4 اور مطلق کم سے کم -4 ہے۔ (ہ) مقامی انتہا غیر موجود، مطلق انتہا غیر موجود۔

سوال 4.28:

ا. $f(x)=2-2x^2,\quad -1\le x\le 1$

ب. $g(x)=2-2x^2,\quad -1<x\le 1$

ج. $h(x)=2-2x^2,\quad -1<x<1$

د. $k(x)=2-2x^2,\quad -\infty<x\le 1$

ہ. $l(x)=2-2x^2,\quad -\infty<x<0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.29: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ نا قابل تفرق ہے نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔کیا یہ مسئلہ 4.2 کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 4.30: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ 4.2 کیوں نا قابل استعمال ہو گا؟

سوال 4.31: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.32: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی کم سے کم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.33: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونا کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.34: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نا کوئی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت اور نا ہی مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.35 تا سوال 4.40 میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ھ. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں اور جن نقطوں پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں تلاش کریں۔

سوال 4.35: $f(x) = x^4 - 8x62 + 4x + 2, \quad [-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

سوال 4.36: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-\frac{3}{4}, 3]$

سوال 4.37: $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

سوال 4.38: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, \frac{10}{3}]$

سوال 4.39: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

سوال 4.40: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

4.2 مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لمحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2\,\mathrm{m}$ کا فاصلہ طے کرے گا۔اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لمحہ t پر اس جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کی اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ ضمنی نتیجہ کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مشل رول $(1652 - 1719)$ کا 300 سال پرانا **مسئلہ رول** ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ 4.3: **مسئلہ رول**[4]
فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

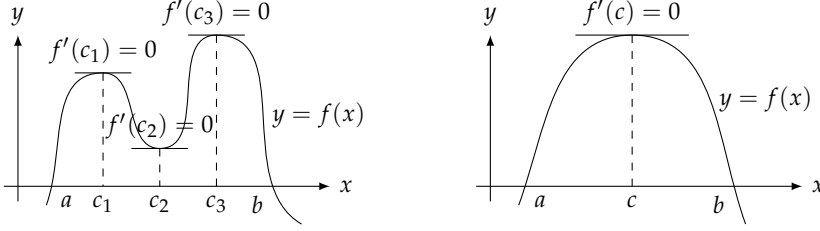
$$f(a) = f(b) = 0$$

تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل 4.14)۔

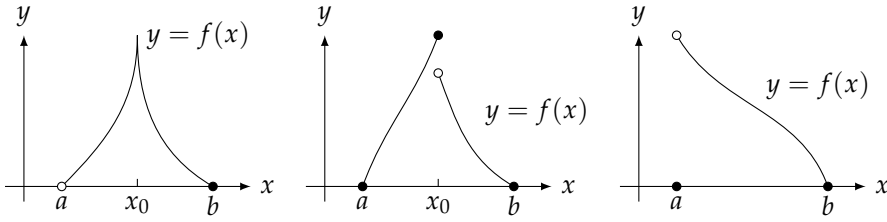
$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہٰذا $[a, b]$ پر f کے مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

1. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔
2. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔
3. تفاعل کے دائرہ کار کی آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

[4] Rolle's theorem

شکل 4.14: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

(ا) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری

(ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری

(ج) $[a, b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر نا قابل تفرق

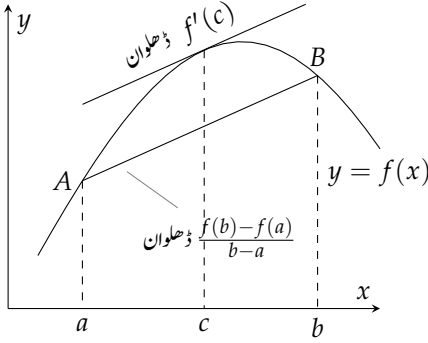
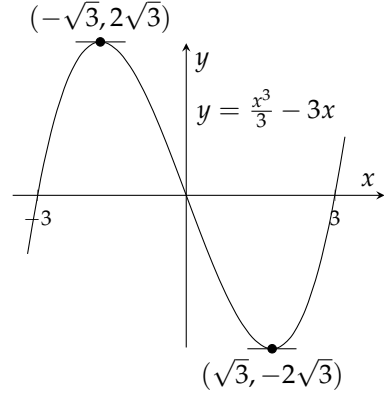
شکل 4.15: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے. یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ 4.2 کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت دونوں a یا b پر پائے جاتے ہوں تب f مستقل ہو گا۔یوں $f' = 0$ ہو گا لہٰذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جا سکتا ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ 4.3 میں دیے شرائط لازمی ہیں۔اگر صرف ایک نقطہ پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل 4.15)۔

شکل 4.17: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا مماس قطع AB کے متوازی ہو گا۔

شکل 4.16: ترسیم برائے مثال 4.6

مثال 4.6: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری ہے اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

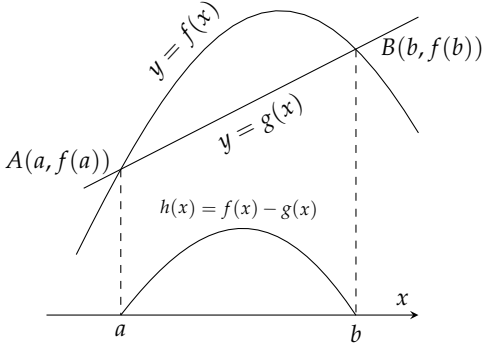
چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کھلا وقفہ کے بیچ کم سے کم ایک نقطہ پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل 4.16)۔ □

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل 4.17)۔ قطع AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کی ڈھلوان قطع کی ڈھلوان کے برابر ہو گی۔

مسئلہ 4.4: **مسئلہ اوسط قیمت**[5] فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کی اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{4.3}$$

[5] mean value theorem

(ا) وقفہ $[a, b]$ پر f اور قطع AB کے ترسیم۔ (ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔

شکل 4.18: مسئلہ اوسط قیمت۔

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل 4.18-ا)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہو گی۔

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{(نقطہ ڈھلوان صورت)} \tag{4.4}$$

نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned} \tag{4.5}$$

ہو گا۔ شکل 4.18-ب میں f ، g اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفہ پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہٰذا $h(a) = h(b) = 0$ ہے۔ یوں (a, b) میں کسی نقطہ c پر $h'(x) = 0$ ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات 4.3 میں درکار ہے۔

شکل 4.19: اگرچہ $y = \sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر نا قابل تفرق ہے یہ $[-1,1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔

شکل 4.20: نقطہ $c = 1$ پر مماس قطع AB کے متوازی ہے (مثال 4.7)

مساوات 4.3 کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات 4.5 کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x = c$ پر کرتے ہیں۔

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (\text{تفرق})$$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (x = c)$$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (h'(c) = 0)$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں ہے البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل 4.19)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔اگلی مثال کی طرح بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذونادر ہو گا۔

مثال 4.7: وقفہ $0 \leq x \leq 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری ہے اور $0 < x < 2$ پر یہ قابل تفرق ہے (شکل 4.20)۔ چونکہ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہٰذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0} = 2$ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □

طبعی تشریح

اگر ہم $[a,b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال 4.8: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی لمحہ رفتار پیما ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □

ضمنی نتائج اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا ضمنی نتیجہ اس کا جواب دیتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.1: **صفر تفرق کے تفاعل مستقل ہوں گے**
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x) = C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x) = 0$ ہو گا۔ ضمنی نتیجہ اس کا الٹ پیش کرتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1) = f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بائیں سے دائیں جانب ہے لہٰذا $x_1 < x_2$ ہو گا۔یوں $[x_1,x_2]$ پر f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ہو گا۔چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہٰذا اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

□

شکل 4.21: ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔

شکل 4.22: ترسیم برائے مثال 4.9

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا ہم اسراع سے پیچھے کی طرف چلتے ہوئے رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں۔ یہ کا جواب اگلا ضمنی نتیجہ پیش کرتا ہے۔

ضمنی نتیجہ 4.2: ایک جیسے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x)=g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x)=g(x)+C$ ہو۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h=f-g$ کا تفرق

$$h'(x)=f'(x)-h'(x)=0$$

ہو گا۔ یوں ضمنی نتیجہ 4.1 کے تحت I پر $h(x)=C$ ہو گا۔ یوں $f(x)-g(x)=C$ یا $f(x)=g(x)+C$ ہو گا۔

□

ضمنی نتیجہ 4.2 کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا مستقل فرق ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty,\infty)$ پر $f(x)=x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty,\infty)$ پر تفرق $2x$ ہو کا کلیہ لازماً x^2+C ہو گا (شکل 4.21)۔

مثال 4.9: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0,2)$ سے گزرتا ہو۔
حل: چونکہ $g(x)=-\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہٰذا $f(x)=-\cos x+C$ ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0)=-\cos(0)+C=2 \quad\implies\quad C=3$$

یوں درکار تفاعل $f(x)=-\cos x+3$ ہے (شکل 4.22)۔ □

اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاو کا حصول

سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لٰہذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لٰہذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \quad \implies \quad C = 0$$

ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لٰہذا ضمنی نتیجہ 4.2 کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ چونکہ لمحہ $t = 0$ پر ہٹاو صفر ہے لٰہذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \quad \implies \quad C = 0$$

یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا ضمنی نتیجہ جو اس کا جواب دیتا ہے کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ I پر تفاعل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی بھی دو نقطے ہیں۔

1. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f **بڑھتا**[6] تفاعل کہلاتا ہے۔
2. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f **گھٹتا**[7] تفاعل کہلاتا ہے۔

---

[6] increasing
[7] decreasing

□

ضمنی نتیجہ 4.3: **بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کا پہلا تفرقی پرکھ**
فرض کریں $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر f قابل تفرق ہے۔

- اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f بڑھتا ہے۔
- اگر (a, b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a, b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: فرض کریں $[a, b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل f کے لئے کہتا ہے کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{4.6}$$

ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہٰذا مساوات 4.6 کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو $f'(c)$ کی ہے۔یوں (a, b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a, b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال 4.10: وقفہ $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f گھٹے گا۔ وقفہ $(0, \infty)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل 4.23)۔
□

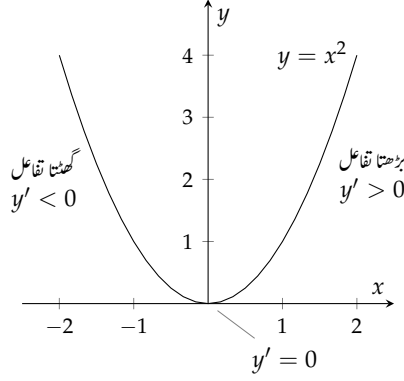
سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش

سوال 4.41 تا سوال 4.44 میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

سوال 4.41: $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$
جواب: $\frac{1}{2}$

شکل 4.23: ترسیم برائے مثال 4.10

سوال 4.42: $f(x) = x^{2/3}, \quad [0,1]$

سوال 4.43: $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$
جواب: 1

سوال 4.44: $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1,3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال 4.45 تا سوال 4.48 میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.45: $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1,8]$
جواب: نہیں کرتا؛ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = 0$ پر f نا قبل تفرق ہے۔

سوال 4.46: $f(x) = x^{4/5}, \quad [0,1]$

سوال 4.47: $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad [0,1]$
جواب: کرتا ہے۔

سوال 4.48:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

سوال 4.49: درج ذیل تفاعل $x=0$ اور $x=1$ پر صفر کے برابر ہے اور $(0,1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a,b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہے۔

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0,1)$ پر کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.50: وقفہ $[0,2]$ پر a ، m اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کی قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

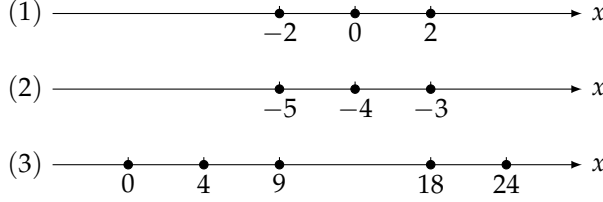
$$f(x)=\begin{cases} 3, & x=0\\ -x^2+3x+a, & 0<x<1\\ mx+b, & 1\le x\le 2\end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال 4.51:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ساتھ ہی ان کے یک رتبی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

1. $y=x^2-4$
2. $y=x^2+8x+15$
3. $y=x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2$
4. $y=x^3-33x^2+216x=x(x-9)(x-24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ کے ہر دو صفر کے بیچ $nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

شکل 4.24: حل ترسیم سوال 4.51

جواب: (ا) شکل 4.24

سوال 4.52: فرض کریں کہ وقفہ $[a, b]$ میں f''' استمراری ہے اور اس وقفہ پر f کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔دکھائیں کہ اس وقفہ پر f'' کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال 4.53: دکھائیں کہ اگر پورے $[a, b]$ پر $f'' > 0$ ہو تب $[a, b]$ میں f' کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔اگر $[a, b]$ پر $f'' < 0$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال 4.54: دکھائیں کہ کعبی کثیر رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.55: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کی صفر میں کسی لمحہ پر گاڑی کا رفتار پیما ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال 4.56: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پیما کو نکال کر ابلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت 14 سیکنڈوں میں $-19\,^\circ\mathrm{C}$ سے بڑھ کر $100\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی لمحے پر $8.5\,^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ ضرور ہو گی۔

سوال 4.57: فرض کریں کہ وقفہ $[0, 1]$ پر قابل تفرق تفاعل f کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا ہے۔دکھائیں کہ $f(0 \neq f(1)$ ہو گا۔

سوال 4.58: دکھائیں کہ a اور b کی کسی بھی قیمتوں کے لئے $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ہو گا۔

سوال 4.59: فرض کریں $[a, b]$ پر f قابل تفرق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔کیا $[a, b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال 4.60: فرض کریں $[a, b]$ پر f اور g قابل تفرق ہیں اور $f(a) = g(a)$ اور $f(b) = g(b)$ ہیں۔دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال 4.61: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لئے f قابل تفرق ہے۔مزید فرض کریں کہ $f(1) = 1$ ہے اور $(-\infty, 1)$ پر $f' < 0$ ہے اور $(1, \infty)$ پر $f' > 0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x) \geq 1$ ہو گا۔

ب. کیا $f'(1) = 0$ لازماً ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 4.62: فرض کریں $f(x) = px^2 + qx + r$ بند وقفہ $[a, b]$ پر معین ہے۔ دکھائیں کہ (a, b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ پر پورا اترتا ہے۔

سوال 4.63: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \sin x \sin(x+2) - \sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.64: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک جیسی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک جیسے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال 4.65:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x) = \frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (ا) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1) = 1$ کس طرح $g(-1) = -1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال 4.66: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$\text{کم سے کم } f' \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \text{زیادہ سے زیادہ } f'$$

جہاں کم سے کم f' اور زیادہ سے زیادہ f' سے مراد $[a, b]$ پر بالترتیب f' کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

سوال 4.67: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 + x^4 \cos x)$ ہو اور $f(0) = 1$ ہو تب سوال 4.66 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $1.09999 \leq f(0.1) \leq 1.1$

سوال 4.68: اگر $0 \leq x \leq 0.1$ پر $f'(x) = 1/(1 - x^4)$ ہو اور $f(0) = 2$ ہو تب سوال 4.66 کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال 4.69: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد a اور b کی **ہندسی اوسط**[8] سے مراد عدد $\sqrt{ab}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کے لئے c کی قیمت $\sqrt{ab}$ ہے۔

سوال 4.70: حسابی اوسط۔ دو اعداد a اور b کی **حسابی اوسط**[9] $\frac{a+b}{2}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x)=x^2$ کے لئے c کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

تفرق سے تفاعل کا حصول

سوال 4.71: فرض کریں $f(-1)=3$ اور تمام x کے لئے $f'(x)=0$ ہے۔ کیا تمام x کے لئے $f(x)=3$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: ہاں

سوال 4.72: فرض کریں $f(0)=5$ اور تمام x کے لئے $f'(x)=2$ ہیں۔ کیا تمام x کے لئے $f(x)=2x+5$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.73: فرض کریں تمام x کے لئے $f'(0)=2x$ ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $f(2)$ تلاش کریں۔

ا. $f(0)=0$ ب. $f(1)=0$ ج. $f(-2)=3$

جواب: (ا) 4، (ب) 3، (ج) 3

سوال 4.74: جن تفاعل کا تفرق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.75 تا سوال 4.80 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے۔

سوال 4.75: (ا) $y'=x$ ، (ب) $y'=x^2$ ، (ج) $y'=x^3$
جواب: (ا) $\frac{x^2}{2}+C$ ، (ب) $\frac{x^3}{3}+C$ ، (ج) $\frac{x^4}{4}+C$

سوال 4.76: (ا) $y'=2x$ ، (ب) $y'=2x-1$ ، (ج) $y'=3x^2+2x-1$

سوال 4.77: (ا) $y'=-\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $y'=1-\frac{1}{x^2}$ ، (ج) $y'=5+\frac{1}{x^2}$
جواب: (ا) $\frac{1}{x}+C$ ، (ب) $x+\frac{1}{x}+C$ ، (ج) $5x-\frac{1}{x}+C$

سوال 4.78: (ا) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ب) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، (ج) $y'=4x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

---

[8] geometric mean
[9] arithmetic mean

سوال 4.79: (ا) $y' = \sin 2t$ ، (ب) $y' = \cos \frac{t}{2}$ ، (ج) $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ ، (ب) $2\sin \frac{t}{2} + C$ ، (ج) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin \frac{t}{2} + C$

سوال 4.80: (ا) $y' = \sec^2 \theta$ ، (ب) $y' = \sqrt{\theta}$ ، (ج) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2 \theta$

سوال 4.81 تا سوال 4.84 میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال 4.81: $f'(x) = 2x - 1, \quad N(0,0)$
جواب: $f(x) = x^2 - x$

سوال 4.82: $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad N(-1,1)$

سوال 4.83: $r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta, \quad N(\frac{\pi}{4}, 0)$
جواب: $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

سوال 4.84: $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad N(0,0)$

صفروں کی گنتی

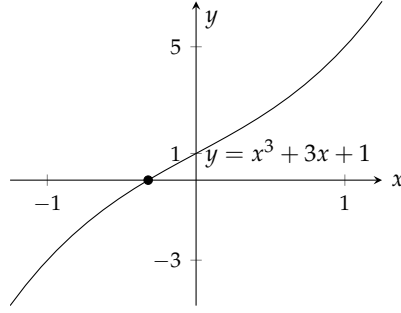
مساوات $f(x) = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کی متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات ضمنی نتیجہ 4.3 کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔

1. $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے۔
2. $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔
3. پورے (a, b) پر $f' > 0$ اور یا پورے (a, b) پر $f' < 0$ ہے۔

تب a اور b کے بیچ f کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے $[a, b]$ پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے $[a, b]$ پر گھٹ رہا ہے لہٰذا یہ x محور کو ایک ہی بار قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ 2.9 کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر $[-1, 1]$ پر $f(x) = x^3 + 3x + 1$ قابل تفرق ہے، $f(-1) = -3$ اور $f(1) = 5$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں، اور تمام x کے لئے $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ہے لہٰذا $[-1, 1]$ پر f کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل 4.25)۔

سوال 4.85 تا سوال 4.92 میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال 4.85: $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

شکل 4.25: کثیر رکنی $y = x^3 + 3x + 1$ کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

سوال 4.86: $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

سوال 4.87: $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

سوال 4.88: $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

سوال 4.89: $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 4.90: $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

سوال 4.91: $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

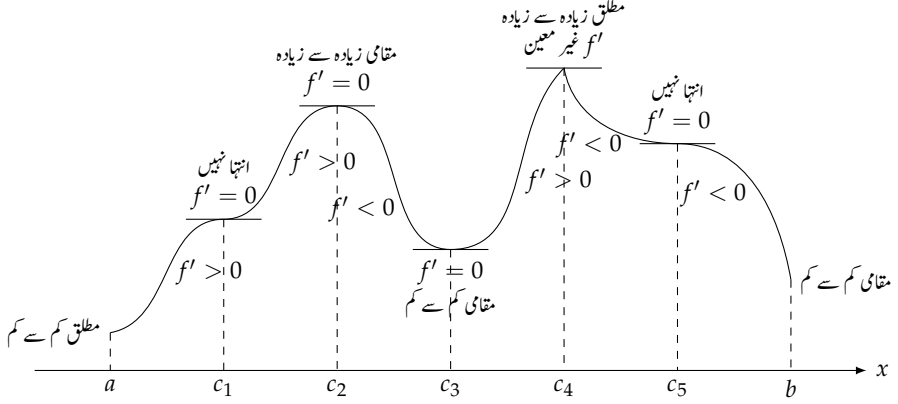
سوال 4.92: $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.93:

ا. ایسا کثیر رکنی $f(x)$ تشکیل دیں جس کے صفر $x = -2, -1, 0, 1, 2$ پر پائے جاتے ہوں۔

ب. $f(x)$ اور $f'(x)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

ج. کیا $g(x) = \sin x$ اور اس کا تفرق $g'(x)$ بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟

شکل 4.26: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

4.3 مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ

اس حصہ میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

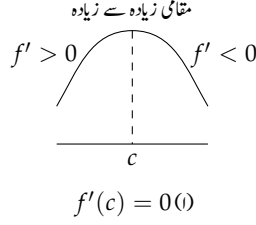
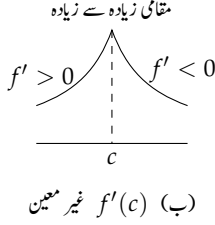
4.3.1 پرکھ

جیسا شکل 4.26 میں دکھایا گیا ہے تفاعل f کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب f' کی علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا x بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے f کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں $f' > 0$ ہو اور f کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں $f' < 0$ ہو۔

آپ (شکل 4.26 سے) دیکھ سکتے ہیں کہ مقامی کم سے کم نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' < 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' > 0$ ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر f' کی قیمت دیکھی جا سکتی ہے۔) یوں مقامی کم سے کم نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ پر نقطہ کے بالکل بائیں $f' > 0$ جبکہ نقطہ کے بالکل دائیں $f' < 0$ ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کا پرکھ حاصل ہوتا ہے۔

مسئلہ 4.5: **مقامی انتہائی قیمت کا یک رتبی تفرقی پرکھ**
درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل $f(x)$ کے لئے ہیں۔

نقطہ فاصل c پر:

شکل 4.27: پرکھ برائے مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

1. اگر c پر f' کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ($x < c$ پر $f' > 0$ اور $x > c$ پر $f' < 0$) تب c پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی (شکل 4.27)۔

2. اگر c پر f' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ($x < c$ پر $f' < 0$ اور $x > c$ پر $f' > 0$) تب c پر f کی مقامی کم سے کم قیمت ہو گی (شکل 4.28)۔

3. اگر c پر f' کی علامت تبدیل نہ ہو (c کے دونوں اطراف f' کی علامت ایک جیسی ہے) تب c پر f کی کوئی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے (شکل 4.29)۔

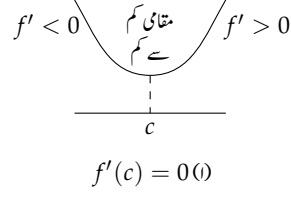
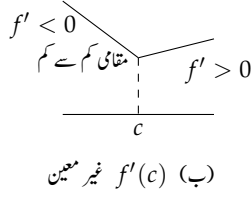
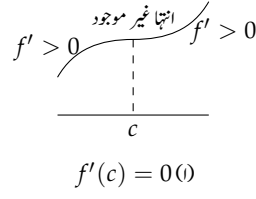
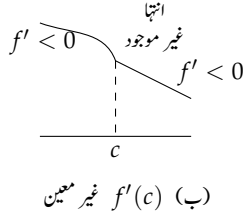
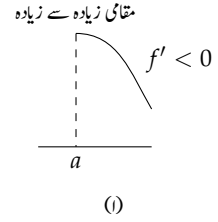
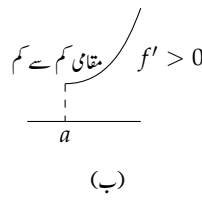
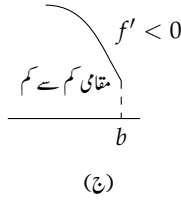
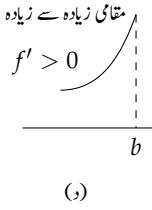
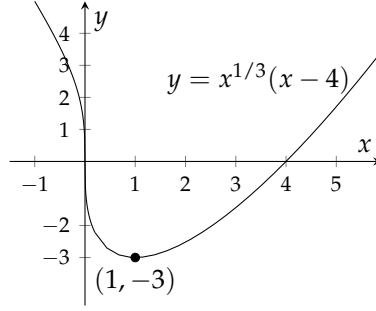
بائیں آخری نقطہ a پر:

اگر $x > a$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب a پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ (مقامی کم سے کم) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ا،ب)۔

دائیں آخری نقطہ b پر:

اگر $x < b$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب b پر f کا مقامی کم سے کم (مقامی زیادہ سے زیادہ) نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.30-ج،د)۔

مثال 4.11: درج ذیل تفاعل کے نقطہ فاصل تلاش کریں۔

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

شکل 4.28: پرکھ برائے مقامی کم سے کم قیمت۔

شکل 4.29: پرکھ برائے عدم موجودگی انتہائی قیمت۔

شکل 4.30: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔

شکل 4.31: ترسیم برائے مثال 4.11

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جس پر f بڑھتا ہے اور جس پر f گھٹتا ہے۔تفاعل کے مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔
حل: تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے ((شکل 4.31)۔)یک رتبی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

ہے جو $x = 1$ پر صفر اور $x = 0$ پر غیر معین ہے۔ f کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 1$ وہ نقطے ہیں جہاں تفاعل کے انتہائی قیمتیں ممکن ہیں۔

یہ نقطے فاصل x محور کو ان حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جس پر f' مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف f کی علامتوں کو دیکھ کر ہم انتہائی نقطہ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔وقفہ $(-\infty, 0)$ پر f گھٹتا ہے، وقفہ $(0, 1)$ پر گھٹتا ہے اور وقفہ $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ 4.5 کے تحت $x = 0$ (جہاں f' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہائی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جبکہ $x = 1$ (جہاں f' کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی کم سے کم نقطہ پایا جائے گا (شکل 4.32)۔

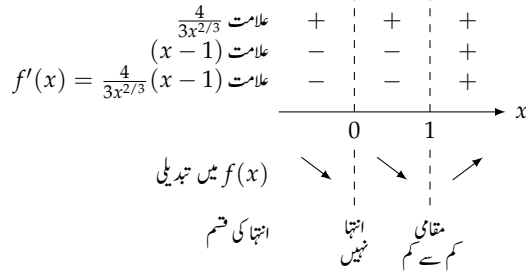
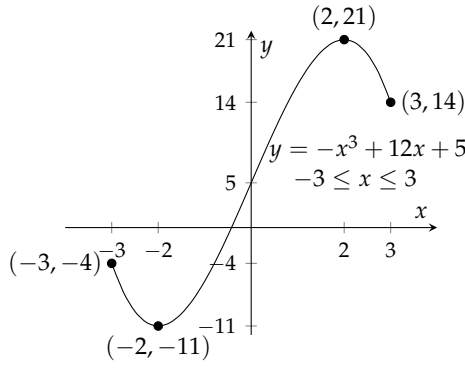
مقامی کم سے کم قیمت $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$ ہے جو تفاعل کی مطلق کم سے کم قیمت بھی ہے۔ □

مثال 4.12: درج ذیل کے لئے وہ وقفہ تلاش کریں جہاں f گھٹتا ہو اور جہاں f بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \le x \le 3$$

تفاعل کے انتہائی قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

حل: تفاعل اپنے دائرہ کار $[-3, 3]$ پر استمراری ہے (شکل 4.33)۔ اس کا یک رتبی تفرق

$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2)$$

شکل 4.32: ترسیم برائے مثال 4.11

شکل 4.33: ترسیم برائے مثال 4.12

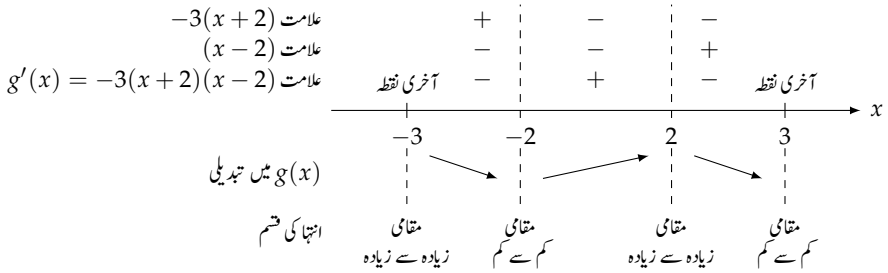
علامت $-3(x+2)$ $+$ $-$ $-$

علامت $(x-2)$ $-$ $-$ $+$

علامت $g'(x) = -3(x+2)(x-2)$ آخری نقطہ $-$ $+$ $-$ آخری نقطہ

x: -3 -2 2 3

$g(x)$ میں تبدیلی

انتہا کی قسم   مقامی زیادہ سے زیادہ   مقامی کم سے کم   مقامی زیادہ سے زیادہ   مقامی کم سے کم

شکل 4.34: تفرق کی علامتوں سے تفاعل کا رویہ (مثال 4.12)

وقفہ $[-3,3]$ کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ $x=-2$ اور $x=2$ پر صفر ہے۔ نقطے فاصل دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں g' کی قیمت منفی یا مثبت ہے (شکل 4.34)۔ ہم g' کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ 4.5 کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $x=-3$ اور $x=2$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ $x=-2$ اور $x=3$ پر مقامی کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ان نقطوں پر تفاعل $g(x)=-x^3+12x+5$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$g(-3)=-4,\quad g(2)=21 \qquad \text{مقامی زیادہ سے زیادہ}$$
$$g(-2)=-11,\quad g(3)=14 \qquad \text{مقامی کم سے کم}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہٰذا $g(-2)$ مطلق کم سے کم اور $g(2)$ مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہیں۔ □

سوالات

f' کی مدد سے f کا تجزیہ

سوال 4.94 تا سوال 4.101 میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔درج ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

ا. f کے نقطہ فاصل کیا ہیں؟

ب. f کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کی مقامی کم سے کم قیمت یا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟

سوال 4.94: $f'(x)=x(x-1)$

جواب: (ا) 0 ، 1 ؛(ب) $(-\infty,0)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا ہے، $(0.1,c)$ پر گھٹتا ہے، مقامی زیادہ سے زیادہ $x=0$ پر اور مقامی کم سے کم $x=1$ پر ہے۔

سوال 4.95: $f'(x)=(x-1)(x+2)$

سوال 4.96: $f'(x)=(x-1)^2(x+2)$

جواب: (ا) -2 ، 1 ؛(ب) $(-2,1)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا، $-\infty,-2$ پر گھٹتا؛(ج) مقامی زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $(x=-2)$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 4.97: $f'(x)=(x-1)^2(x+2)^2$

سوال 4.98: $f'(x)=(x-1)(x+2)(x-3)$

جواب: (ا) -2 ، 1 ، 3 ؛(ب) $(-2,1)$ اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(1,3)$ پر گھٹتا؛(ج) $(x=1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x=-2)$ اور $x=3$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 4.99: $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$

سوال 4.100: $f'(x) = x^{-1/3}(x+2)$
جواب: (ا) -2 ، 0 ؛(ب) $(-\infty,-2)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-2,0)$ پر گھٹتا؛(ج) $(x=-2)$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $(x=0)$ پر مقامی کم سے کم۔

سوال 4.101: $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

دیے گئے تفاعل کی انتہا

سوال 4.102 تا سوال 4.121 میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

سوال 4.102: $g(t) = -t^2 - 3t + 3$
جواب: (ا)0 $(-\infty,-1.5)$ پر بڑھتا، $(-1.5,\infty)$ پر گھٹتا؛(ب) $t=-1.5$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 5.25 ؛ (ج) $t=-1.5$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 5.25 ہے۔

سوال 4.103: $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

سوال 4.104: $h(x) = -x^3 + 2x^2$
جواب: (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{4}{3},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{4}{3})$ پر بڑھتا؛(ب) $x=0$ پر مقامی کم سے کم، $x=\frac{4}{3}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{4}{3},\frac{32}{27})$ ؛(ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.105: $h(x) = 2x^3 - 18x$

سوال 4.106: $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$
جواب: (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{1}{2},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{1}{2})$ پر بڑھتا؛(ب) $\theta=\frac{1}{2}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.107: $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

سوال 4.108: $f(r) = 3r^3 + 16r$
جواب: (ا) $(-\infty,\infty)$ پر بڑھتا ہے یعنی کبھی کم نہیں ہوتا؛(ب) مقامی انتہا عدم موجود؛(ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.109: $h(r) = (r+7)^3$

سوال 4.110: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
جواب: (ا) $(-2,0)$ اور $(2,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(0,2)$ پر گھٹتا؛(ب) $x = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 16 اور $x = \mp 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ؛(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ غیر موجود، $x = \mp 2$ پر مطلق کم سے کم 0

سوال 4.111: $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

سوال 4.112: $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$
جواب: (ا) $(-\infty,-1)$ اور $(0,1)$ پر بڑھتا، $(-1,0)$ اور $(1,\infty)$ پر گھٹتا؛(ب) $x = \mp 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(\mp 1, 0.5)$ ہے $x = 0$ پر مقامی کم سے کم $(0,0)$ ہے؛(ج) $x = \mp 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 4.113: $K(t) = 15t^3 - t^5$

سوال 4.114: $g(x) = x\sqrt{8-x^2}$
جواب: (ا) $(-2\sqrt{2},-2)$ اور $(2,2\sqrt{2})$ پر گھٹتا $(-2,2)$ پر بڑھتا ہے؛(ب) مقامی کم سے کم $g(-2) = -4$ ، $g(2\sqrt{2} = 0$ ؛ مقامی زیادہ سے زیادہ $g(-2\sqrt{2} = 0$ ، $g(2) = 4$ (ج) $x = 2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 4 اور $x = -2$ پر مطلق کم سے کم -4 ہے۔

سوال 4.115: $g(x) = x^2\sqrt{5-x}$

سوال 4.116: $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$
جواب: (ا) $(-\infty,1)$ پر بڑھتا $1 < x < 2$ اور $2 < x < 3$ پر گھٹتا ہے۔ $x = 2$ پر غیر استمراری اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا ہے۔(ب) $x = 3$ پر مقامی کم سے کم $(3,6)$ اور $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $(1,2)$ ؛(ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.117: $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$

سوال 4.118: $f(x) = x^{1/3}(x+8)$
جواب: (ا) $(-2,0)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ پر گھٹتا؛(ب) $x = -2$ پر مقامی کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ؛(ج) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x = -2$ پر مطلق کم سے کم $-6\sqrt[3]{2}$ ہے۔

سوال 4.119: $g(x) = x^{2/3}(x+5)$

سوال 4.120: $h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$
جواب: (ا) $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{7}})$ اور $(\frac{2}{\sqrt{7}}, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}})$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ $\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^{7/6}} \approx 3.12$ جبکہ $x = \frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی کم سے کم $-3.12 \approx -\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^6}$ ہے؛ (ج) مطلق انتہا عدم موجود۔

سوال 4.121: $k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$

نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا

سوال 4.122 تا سوال 4.129 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کے مقامی انتہا تلاش کریں۔ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. کون سے انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

سوال 4.122: $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \le 2$
جواب: (ا) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) $x = 1$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1 جبکہ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 4.123: $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \le 0$

سوال 4.124: $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \le x < \infty$
جواب: (ا) $x = 1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 1 اور $x = 2$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے؛ (ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود، $x = 2$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.125: $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \le x < \infty$

سوال 4.126: $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \le t < \infty$
جواب: (ا) $t = -3$ پر -9 اور $t = 2$ پر 16 مقامی زیادہ سے زیادہ ہیں۔ $t = -2$ پر مقامی کم سے کم -16 ہے۔(ب) $t = 2$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 16 ؛ مطلق کم سے کم عدم موجود۔

سوال 4.127: $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \le 3$

سوال 4.128: $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \le x < \infty$
جواب: (ا) $x = 0$ پر مقامی کم سے کم 0 ؛(ب) مطلق زیادہ سے زیادہ عدم موجود؛ $x = 0$ پر مطلق کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.129: $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \le 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.130 تا سوال 4.133 میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطہ کی نشاندہی کریں جہاں انتہا پایا جاتا ہو۔

ب. تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f پر تبصرہ کریں۔

سوال 4.130: $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2\pi$
جواب: (ا) $x = \frac{2\pi}{3}$ پر مقامی کم سے کم $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ جبکہ $x = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 0 ہے اور $x = 2\pi$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ π ہے۔

سوال 4.131: $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$

سوال 4.132: $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$
جواب: (ا) $x = \frac{\pi}{4}$ پر مقامی کم سے کم 0 ہے۔

سوال 4.133: $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال 4.134 اور سوال 4.135 میں دیے گئے θ پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ اس انتہا کی قسم دریافت کریں۔

سوال 4.134: $h(\theta) = 3\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad \theta = 0, 2\pi$
جواب: (ا) $\theta = 0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ 3 اور $\theta = 2\pi$ پر مقامی کم سے کم -3 ہے۔

سوال 4.135: $h(\theta) = 5\sin\frac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \theta = 0, \pi$

سوال 4.136: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتا ہے اور $f'(1) = 0$ ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

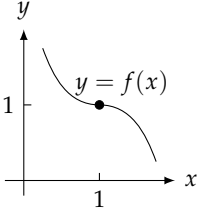
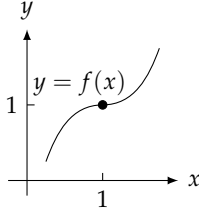
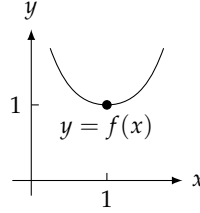
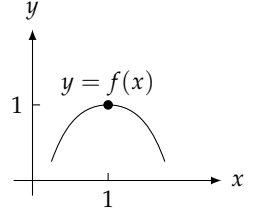
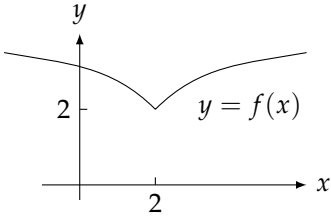
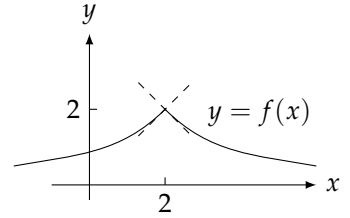
ا. $x < 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے۔

ب. $x < 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

ج. $x \ne 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

د. $x \ne 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے

جواب: شکل 4.35

سوال 4.137: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔

شکل 4.35: حل ترسیمات سوال 4.136

شکل 4.36: حل ترسیمات سوال 4.138

ا. $(1,1)$ پر مقامی کم سے کم اور $(3,3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

ب. $(1,1)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $(3,3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

ج. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

د. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہے۔

سوال 4.138: درج ذیل استمراری تفاعل $y = g(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $0 < g' < 1$ ہے، $x \to 2^-$ کے لئے $g'(x) \to 1^-$ ، $x > 2$ کے لئے $-1 < g' < 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to -1^+$ ہے۔

ب. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $g' < 0$ ، $x \to 2^-$ کے لئے $g' \to -\infty$ ، $x > 2$ کے لئے $g' > 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to \infty$ ہے۔

ب: شکل 4.36

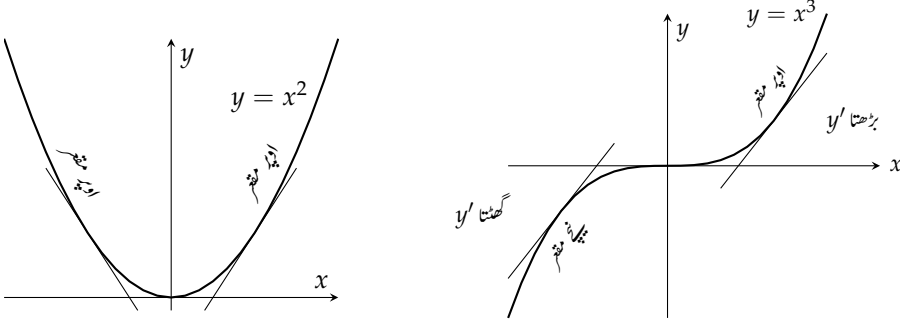
سوال 4.139: درج ذیل استمراری تفاعل $y = h(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \le h(x) \le 2$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

ب. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \le h(x) \le 0$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

سوال 4.140: جب x بائیں سے دائیں جانب نقطہ $c = 2$ سے گزرے تب $f(x) = x^3 - 3x + 2$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.141: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں $a \neq 0$ ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 4.37: $(-\infty, 0)$ پر منحنی دائیں جھکتی ہے جبکہ $(0, \infty)$ پر مبدا بائیں مڑتی ہے۔

شکل 4.38: ترسیم برائے مثال 4.13

4.4 y' اور y'' کے ساتھ ترسیم

ہم نے حصہ 4.1 میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش میں یک رتبی تفرق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے انتہائی نقطے صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں ہے۔ہم نے حصہ 4.2 میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفرق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کی تفرق میں سمیٹی گئی ہے۔مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطہ پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2 ہو گا۔اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہو اور تفاعل نقطہ $(0, 4)$ سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً $x^2 + 4$ ہو گا۔

ہم نے حصہ 4.3 میں نقطہ فاصل پر تفاعل کے رویہ جانتے ہوئے اس کی تفرق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔موجودہ حصہ میں ہم جانتے ہیں کہ تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات y' کے اندر ضرور پائی جائے گی۔دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی صورت میں y' اور اس کا تفرق y'' مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔باب 5 میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔

مقعر

x بڑھنے سے تفاعل $y = x^3$ کا ترسیم اوپر اٹھتا ہے لیکن $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر اس کے حصے مختلف طریقہ سے مڑتے ہیں (شکل 4.37)۔اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبدا کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہماری دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبدا سے دور چلیں تب منحنی ہماری بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کے بالائی طرف رہتی ہے۔

اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبدا کی طرف چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان گھٹتی ہے جبکہ ربع اول میں مبدا سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کی ڈھلوان بڑھتی ہے۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم اس وقفہ پر **اوپر مقعر**[10] ہو گی جہاں y' بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر **نیچے مقعر**[11] ہو گی جہاں y' گھٹتا ہو۔

□

اگر $y = f(x)$ کا دو رتبی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3 استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ $y'' > 0$ کی صورت میں y' کی قیمت بڑھے گی اور $y'' < 0$ کی صورت میں y' کی قیمت گھٹے گی۔

مقعر کا دو رتبی تفرق پرکھ

فرض کریں وقفہ I پر $y = f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

ا. اگر I پر $y'' > 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی۔

ب. اگر I پر $y'' < 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی۔

مثال 4.13:

ا. $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $y = x^3$ کا دو رتبی تفرق $y'' = 6x < 0$ ہے لہٰذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی جبکہ $(0, \infty)$ پر $y'' = 6x > 0$ ہے لہٰذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہو گی (شکل 4.37)۔

ب. چونکہ قطع مکافی $y = x^2$ کا دو رتبی تفرق $y'' = 2 > 0$ ہے لہٰذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہو گا (شکل 4.38)۔

□

---

[10] concave up
[11] concave down

شکل 4.39: ترسیم برائے مثال 4.14

شکل 4.40: ترسیم برائے مثال 4.15

نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دو رتبی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہو گا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف : وہ نقطہ جہاں تفاعل کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو **نقطہ تصریف**[12] کہلاتا ہے۔

□

یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف y'' مثبت اور دوسری طرف منفی ہو گا۔ عین نقطہ تصریف پر y'' کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہو گی اور یا y'' غیر معین ہو گا۔

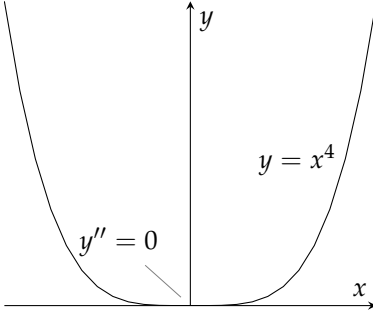
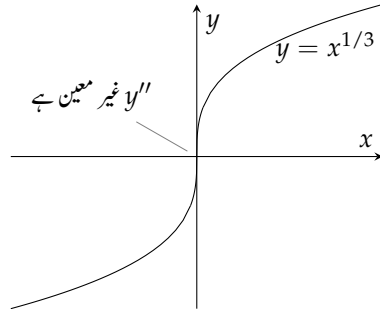
دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر $y'' = 0$ ہو گا۔

مثال 4.14: سادہ ہارمونی حرکت
تفاعل $y = 2\cos t$ کی ترسیم نقطہ $t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع $s'' = -\cos t$ صفر ہے (شکل 4.39)۔ □

مثال 4.15: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔فرض کریں کہ کسی چیز کی x اکائیاں پیدا کرنے پر $y = c(x)$ لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف N ہو گا (شکل 4.40)۔ □

---

[12] inflection point

شکل 4.41: نقطہ تصریف پر y'' غیر معین ہے (مثال 4.16)

شکل 4.42: اگرچہ مبدا پر $y'' = 0$ ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے (مثال 4.17)

مثال 4.16: ایسا نقطہ تصریف جہاں y'' غیر موجود ہے۔
تفاعل $y = x^{1/3}$ کا نقطہ تصریف $x = 0$ پر ہے لیکن یہاں y'' غیر معین (لا متناہی) ہے (شکل 4.41)۔

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{1/3}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tfrac{1}{3}x^{-2/3}) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

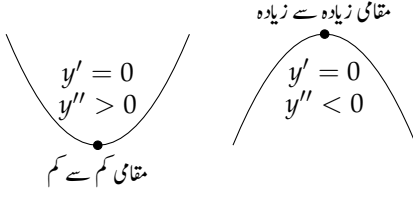
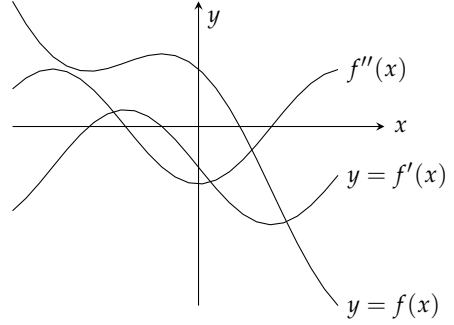
□

مثال 4.17: $y'' = 0$ ہے لیکن نقطہ تصریف نہیں ہے
تفاعل $y = x^4$ کا $x = 0$ پر $y'' = 12x^2 = 0$ پایا جاتا ہے لیکن یہاں y'' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے۔
□

فنیات تفاعل اور تفاعل کے تفرق کا ترسیم
کبھی کبھار تفاعل کی ترسیم سے نقطہ تصریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔ $-4 \le x \le 3$ کی $f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔اس کے ساتھ f' کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تصریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔ f کے ساتھ f'' ترسیم کرنے سے نقطہ تصریف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل 4.43)۔ نقطہ تصریف پر f'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی f'' محور x کو قطع کرتا ہے۔ f ، f' اور f'' تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

مقامی انتہائی قیمت کا دو رتبی تفرقی پرکھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر y' کی علامت کی تبدیلی کی بجائے درج ذیل پرکھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مقامی انتہا کا دو رتبی تفرقی پرکھ

شکل 4.44: دو رتبی تفرقی پرکھ برائے مقامی انتہا

شکل 4.43: تفاعل $y = f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق۔

- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔
- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 4.44)۔

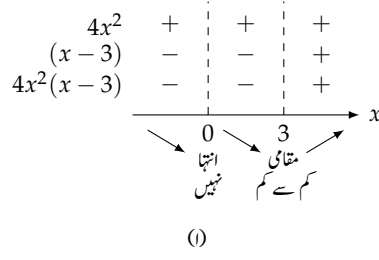
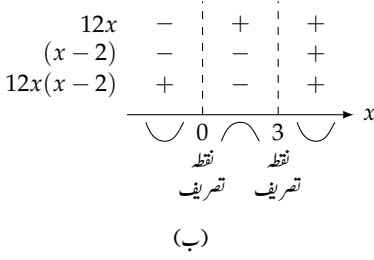
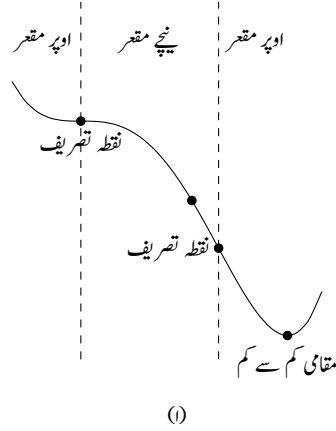
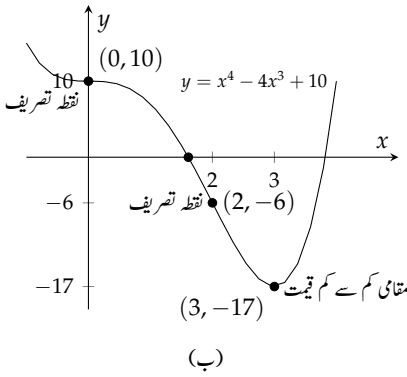
مذکورہ بالا پرکھ میں ہمیں صرف $x = c$ پر y'' درکار ہے نا کہ c پر کسی وقفہ پر۔یوں پرکھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔ $y'' = 0$ یا غیر معین y'' کی صورت میں پرکھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ایسی صورت میں ہمیں یک رتبی تفرق پرکھ استعمال کرنی ہو گی۔

y' اور y'' کے ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

مثال 4.18: قلم و کاغذ سے تفاعل کا ترسیم
تفاعل $y = x^4 - 4x^3 + 10$ ترسیم کریں۔
حل: **پہلا قدم:** ہم y' اور y'' ڈھونڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= x^4 - 4x^3 + 10 \\
y' &= 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) && \text{نقطہ فاصل } x = 0 \text{ اور } x = 3 \text{ ہیں} \\
y'' &= 12x^2 - 24x = 12x(x-2) && \text{ممکنہ نقطہ تصریف } x = 0 \text{ اور } x = 2 \text{ ہیں}
\end{aligned}$$

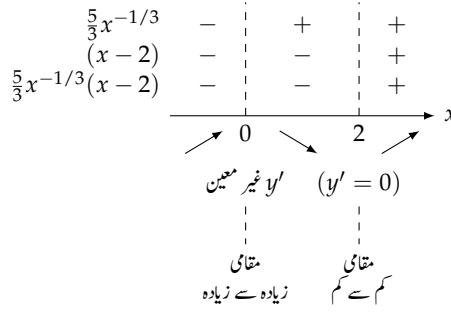
دوسرا قدم: اتر اور چڑھاو دیکھنے کے لئے y' کی علامتوں کو دیکھ کر y کا رویہ جانتے ہیں۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 0$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔یوں نقطہ $x = 0$ پر y' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 3$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی

شکل 4.45: اشکال برائے مثال 4.18

شکل 4.46: اشکال برائے مثال 4.18

ہے۔ یوں $x = 3$ پر y' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے (شکل 4.45-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ $x = 0$ اور $x = 2$ دونوں پر y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل 4.45-ب)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46-ا)۔

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ x اور y محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں y' اور y'' صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل 4.46-ب)۔ □

$\frac{5}{3}x^{-1/3}$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2)$	$-$	$-$	$+$

شکل 4.47: اتار اور چڑھاو (مثال 4.19)

$y=f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. y' اور y'' حاصل کریں۔
2. منحنی کی اتار اور چڑھاو تعین کریں۔
3. منحنی کی مقعر کا تعین کریں۔
4. اجمال کرتے ہوئے مختلف خطوں میں ترسیم کا عمومی خاکہ بنائیں۔
5. ان اشکال کو ملا کر تفاعل ترسیم کریں۔

مثال 4.19: تفاعل $y=x^{5/3}-5x^{2/3}$ ترسیم کریں۔
حل: **پہلا قدم:** y' اور y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y=x^{5/3}-5x^{2/3}=x^{2/3}(x-5) \qquad \text{قطع محدد } x=0 \text{ اور } x=5$$

$$y'=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{10}{3}x^{-1/3}=\frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2) \qquad \text{نقطہ فاصل } x=0 \text{ اور } x=2$$

$$y''=\frac{10}{9}x^{-1/3}+\frac{10}{9}x^{-4/3}=\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1) \qquad \text{ممکنہ نقطہ تصریف } x=0 \text{ اور } x=-1$$

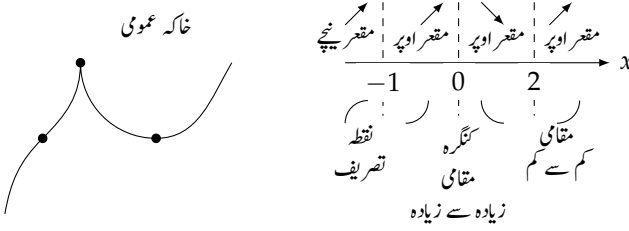
دوسرا قدم: اتار اور چڑھاو۔ (شکل 4.47)

تیسرا قدم: مقعر (شکل 4.48)

y'' کی علامت کی نقش سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x=-1$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے لیکن $x=0$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔البتہ یہ جانتے ہوئے کہ

	$x<-1$	$-1<x<0$	$x>0$
$\frac{10}{9}x^{-4/3}$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$\frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1)$	$-$	$+$	$+$
	مقعر نیچے	مقعر اوپر	مقعر اوپر

x: -1 (نقطہ تصریف)، 0

شکل 4.48: مقعر (مثال 4.19)

شکل 4.49: اجمال اور خاکے (مثال 4.19)

1. تفاعل $y=x^{5/3}-5x^{2/3}$ استمراری ہے۔

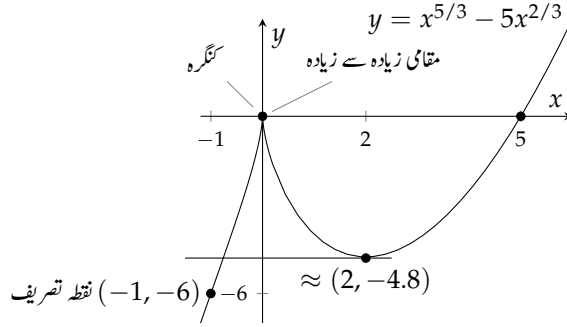
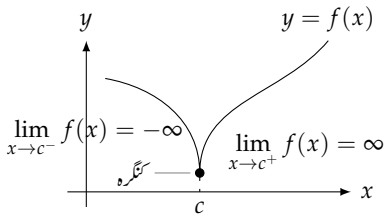
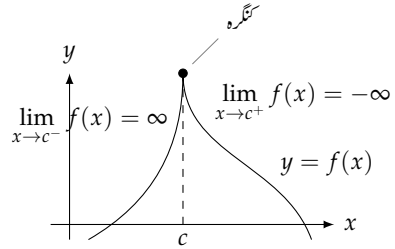
2. $x\to0^-$ کرنے سے $y'\to\infty$ اور $x\to0^+$ کرنے سے $y'\to-\infty$ ہوتا ہے (دوسرے قدم میں y' کا کلیہ دیکھیں)۔

3. $x=3$ پر مقعر تبدیل نہ ہونے (تیسرا قدم) سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $x=0$ پر کنگرہ پایا جاتا ہے۔

چوتھا قدم: اجمال (شکل 4.49)

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور ترسیم (شکل 4.50) □

کنگرہ

تفاعل $y=f(x)$ کا $x=c$ پر اس صورت کنگرہ پایا جاتا ہے جب x کے دونوں اطراف تفاعل کا مقعر ایک جیسا ہو اور یا (ا) $\lim_{x\to c^-}f'(x)=\infty$ اور $\lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty$ ہوں (شکل 4.51-ا)، اور یا (ب) $\lim_{x\to c^-}f'(x)=-\infty$ اور $\lim_{x\to c^+}f(x)=\infty$ ہوں (شکل 4.51-ب)۔

شکل 4.50: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ کی ترسیم (مثال 4.19)۔

شکل 4.51: کنگرہ، مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم نقطہ ہو سکتا ہے۔

(ا) قابل تفرق: ہموار اور جڑی۔ اتر، چڑھاو پایا جا سکتا ہے۔

(ب) $y' > 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے اوپر اٹھتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔

(ج) $y' < 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے نیچے اترتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔

(د) $y'' > 0$: اوپر مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(ھ) $y'' < 0$: نیچے مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(و) y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: نقطہ تصریف (اگر f دو مرتبہ قابل تفرق ہو)۔

(ز) y' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: مقامی زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم قیمت۔

(ح) $y' = 0, y'' < 0$: مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت۔

(ط) $y' = 0, y'' > 0$: مقامی کم سے کم قیمت۔

شکل 4.52: ترسیم کے بارے میں تفرق کیا بتلاتا ہے۔

تفرق سے تفاعل کی معلومات کا حصول

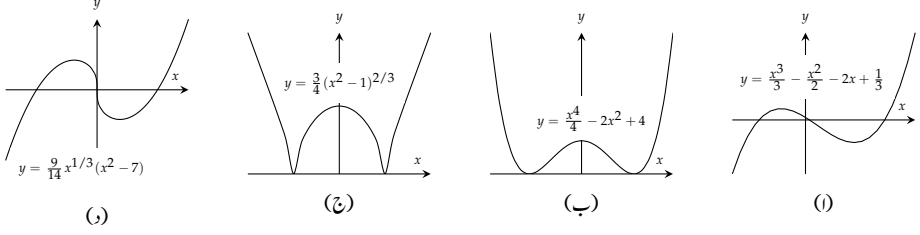
آپ نے مثال 4.18 اور مثال 4.19 میں دیکھا کہ y' کو دیکھ کر قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی تقریباً تمام اہم معلومات دریافت کی جا سکتی ہیں۔ ہم ترسیم کی اتار اور چڑھاو، اور مقامی انتہا جان سکتے ہیں۔ ہم y' کا تفرق لے کر اترا ور چڑھاو کے وقفوں میں تفاعل کی مقعر دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعل کی ترسیم کی عمومی شکل جان سکتے ہیں۔ ہم صرف xy مستوی میں ترسیم کا مقام نہیں جان سکے ہیں۔ یہ معلومات مختلف x پر تفاعل کی مساوات کو حل کرتے ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ حقیقت میں جیسا ہم نے حصہ 4.2 میں دیکھا، y' کے علاوہ ہمیں f کی قیمت صرف ایک نقطہ پر چاہیے۔

شکل 4.52 میں تفرق اور ترسیم کے تعلق دکھائے گئے ہیں۔

سوالات

ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ

سوال 4.142 تا سوال 4.149 میں دیے ترسیم کی نقطہ تصریف، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطہ کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کہ نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔

سوال 4.142: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$ ، شکل 4.53-ا

شکل 4.53: ترسیمات برائے سوال 4.142 تا سوال 4.145

جواب: $x = -1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = 2$ پر -3 مقامی کم سے کم، نقطہ تصریف $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$، چڑھاو $(-\infty, -1)$ اور $(2, \infty)$ پر، اتار $(-1, 2)$ پر، اوپر مقعر $(\frac{1}{2}, \infty)$ پر جبکہ نیچے مقعر $(-\infty, \frac{1}{2})$ پر۔

سوال 4.143: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$، شکل 4.53-ب

سوال 4.144: $y = \frac{3}{4}(x^2-1)^{2/3}$، شکل 4.53-ج

جواب: $x = 0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = \mp 1$ پر 0 مقامی کم سے کم، $(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ اور $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ پر نقطہ تصریف، چڑھاو $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر، اتار $(-\infty, -1)$ اور $(0, 1)$ پر، $(-\infty, -\sqrt{3})$ ور $(\sqrt{3}, \infty)$ پر مقعر اوپر، $(-\sqrt{3}, 3)$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4.145: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2-7)$، شکل 4.53-د

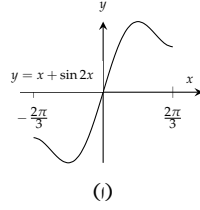
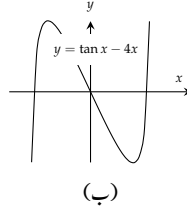
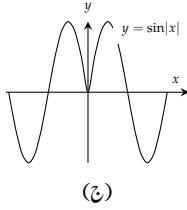
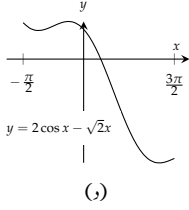
سوال 4.146: $y = x + \sin 2x,\ -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$، شکل 4.54-ا

جواب: $x = -\frac{2\pi}{3}$ پر $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x = \frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی کم سے کم، $(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})$، $(0, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ پر نقطہ تصریف، $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ پر چڑھاو، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$ اور $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ پر اتار، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ پر مقعر اوپر، $(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$ اور $(0, \frac{\pi}{2})$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4.147: $y = \tan x - 4x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، شکل 4.54-ب

سوال 4.148: $y = \sin|x|,\ -2\pi \le x \le 2\pi$، شکل 4.54-ج

جواب: $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی زیادہ سے زیادہ، $x = -2\pi$، $x = 0$ اور $x = 2\pi$ پر صفر، $x = -\frac{3\pi}{2}$ اور $x = \frac{3\pi}{2}$ پر -1 مقامی کم سے کم، $(-\pi, 0)$ اور $(\pi, 0)$ نقطہ تصریف، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$، $(0, \frac{\pi}{2})$ اور $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ پر چڑھاو، $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ پر اتار، $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔

سوال 4.149: $y = 2\cos x - \sqrt{2}x,\ -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$، شکل 4.54-د

شکل 4.54: ترسیمات برائے سوال 4.146 تا سوال 4.149

مساوات کی ترسیم

صفحہ 371 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال 4.150 تا سوال 4.181 میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ مقامی انتہا اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔

سوال 4.150: $y = x^2 - 4x + 3$
جواب: شکل 4.55-ا

سوال 4.151: $y = 6 - 2x - x^2$

سوال 4.152: $y = x^3 - 3x + 3$
جواب: شکل 4.55-ب

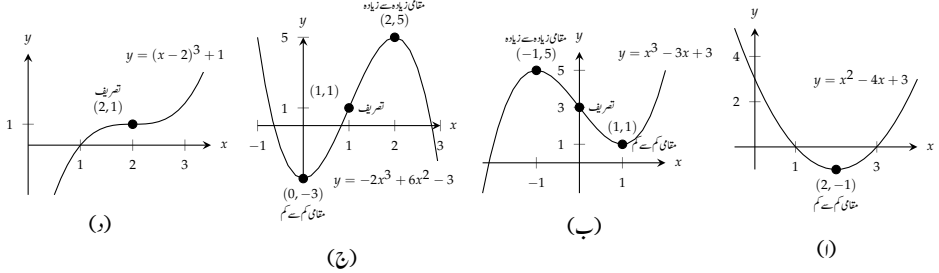
سوال 4.153: $y = x(6 - 2x)^2$

سوال 4.154: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$
جواب: شکل 4.55-ج

سوال 4.155: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

سوال 4.156: $y = (x - 2)^3 + 1$
جواب: شکل 4.55-د

سوال 4.157: $y = 1 - (x + 1)^3$

سوال 4.158: $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$
جواب: شکل 4.56-ا

شکل 4.55: حل ترسیمات برائے سوال 4.150 تا سوال 4.156

سوال 4.159: $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

سوال 4.160: $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$
جواب: شکل 4.56-ب

سوال 4.161: $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

سوال 4.162: $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$
جواب: شکل 4.56-ج

سوال 4.163: $y = x(\frac{x}{2} - 5)^4$

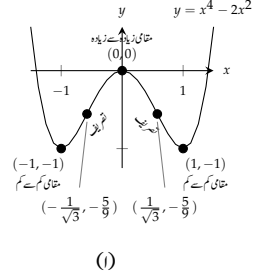
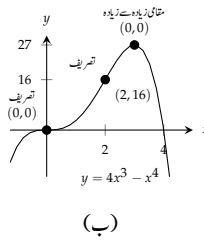
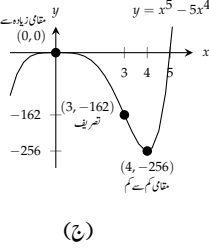
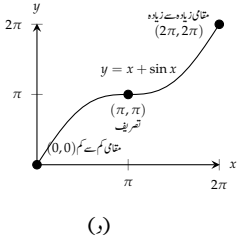
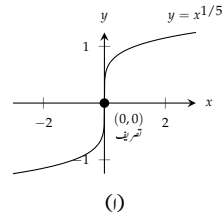
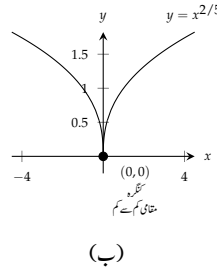
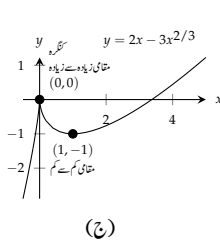
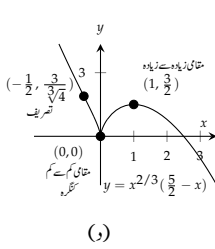
سوال 4.164: $y = x + \sin x, \; 0 \le x \le 2\pi$
جواب: شکل 4.56-د

سوال 4.165: $y = x - \sin x, \; 0 \le x \le 2\pi$

سوال 4.166: $y = x^{1/5}$
جواب: شکل 4.57-ا

سوال 4.167: $y = x^{3/5}$

سوال 4.168: $y = x^{2/5}$
جواب: شکل 4.57-ب

سوال 4.169: $y = x^{4/5}$

شکل 4.56: حل ترسیمات برائے سوال 4.158 تا سوال 4.164

شکل 4.57: حل ترسیمات برائے سوال 4.166 تا سوال 4.172

سوال 4.170: $y = 2x - 3x^{2/3}$
جواب: شکل 4.57-ج

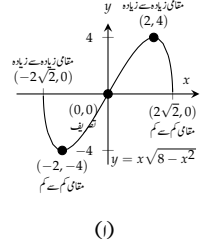
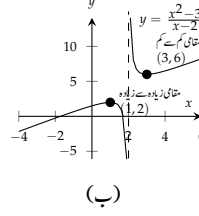
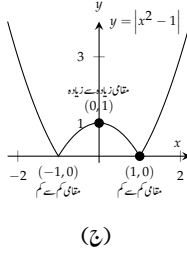
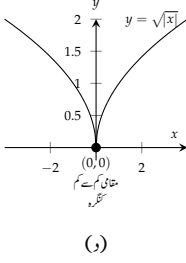
سوال 4.171: $y = 5x^{2/5} - 2x$

سوال 4.172: $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$
جواب: شکل 4.57-د

سوال 4.173: $y = x^{2/3}(x - 5)$

سوال 4.174: $y = x\sqrt{8 - x^2}$
جواب: شکل 4.58-ا

سوال 4.175: $y = (2 - x^2)^{3/2}$

سوال 4.176: $y = \frac{x^2-3}{x-2},\ x \neq 2$
جواب: شکل 4.58-ب

شکل 4.58: ترسیمات برائے سوال 4.174 تا سوال 4.180

سوال 4.177: $y = \frac{x^3}{3x^2+1}$

سوال 4.178: $y = \left|x^2 - 1\right|$

جواب: شکل 4.58-ج

سوال 4.179: $y = \left|x^2 - 2x\right|$

سوال 4.180: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

جواب: شکل 4.58-د

سوال 4.181: $y = \sqrt{|x-4|}$

y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ

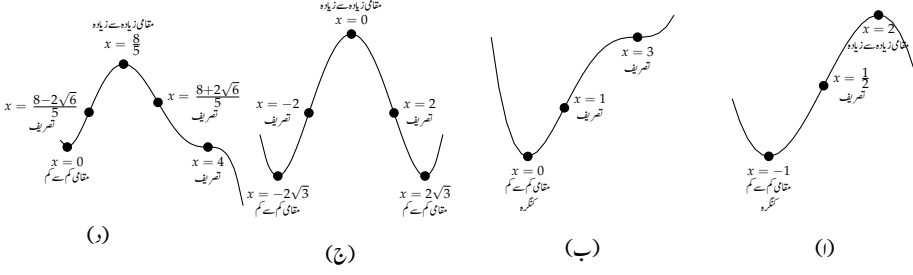
سوال 4.182 تا سوال 4.203 میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ 371 پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

سوال 4.182: $y' = 2 + x - x^2$

جواب: شکل 4.59-ا

سوال 4.183: $y' = x^2 - x - 6$

سوال 4.184: $y' = x(x-3)^2$

جواب: شکل 4.59-ب

شکل 4.59: ترسیمات برائے سوال 4.182 تا سوال 4.188

سوال 4.185: $y' = x^2(2-x)$

سوال 4.186: $y' = x(x^2-12)$
جواب: شکل 4.59-ج

سوال 4.187: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

سوال 4.188: $y' = (8x-5x^2)(4-x)^2$
جواب: شکل 4.59-د

سوال 4.189: $y' = (x^2-2x)(x-5)^2$

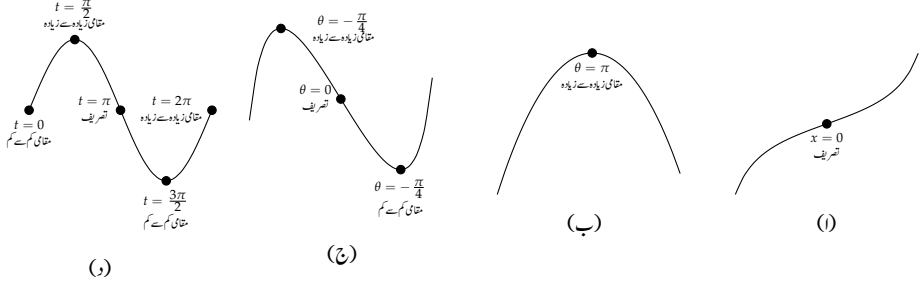
سوال 4.190: $y' = \sec^2 x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.60-ا

سوال 4.191: $y' = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 4.192: $y' = \cot\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$
جواب: شکل 4.60-ب

سوال 4.193: $y' = \csc^2\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

سوال 4.194: $y' = \tan^2\theta - 1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.60-ج

سوال 4.195: $y' = 1 - \cot^2\theta,\ 0 < \theta < \pi$

شکل 4.60: حل ترسیمات برائے سوال 4.190 تا سوال 4.196

سوال 4.196: $y'=\cos t,\ 0\le t\le 2\pi$

جواب: شکل 4.60-د

سوال 4.197: $y'=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$

سوال 4.198: $y'=(x+1)^{-2/3}$

جواب: شکل 4.61-ا

سوال 4.199: $y'=(x-2)^{-1/3}$

سوال 4.200: $y'=x^{-2/3}(x-1)$

جواب: شکل 4.61-ب

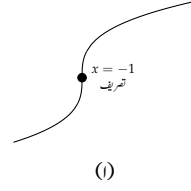
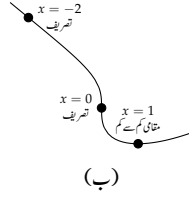
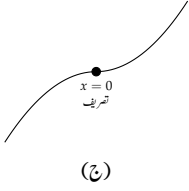
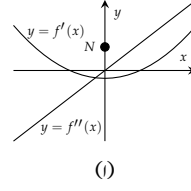
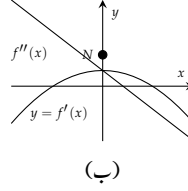
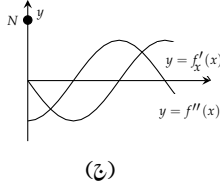
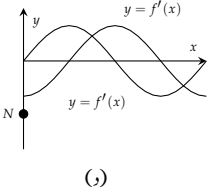
سوال 4.201: $y'=x^{-4/5}(x+1)$

سوال 4.202: $y'=2|x|=\begin{cases}-2x, & x\le 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

جواب: شکل 4.61-ج

سوال 4.203: $y'=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$

y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا

سوال 4.204 تا سوال 4.207 میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے تفاعل $y=f(x)$ کے یک رتبی تفرق y' اور دو رتبی تفرق y'' کی ترسیم دی گئیں ہیں۔ ان کی نقل کر کے اس پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

شکل 4.61: حل ترسیمات برائے سوال 4.198 تا سوال 4.202

شکل 4.62: ترسیمات برائے سوال 4.204 تا سوال 4.207

سوال 4.204: ترسیمات شکل 4.62-ا میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ا

سوال 4.205: ترسیمات شکل 4.62-ب میں دیے گئے ہیں۔

سوال 4.206: ترسیمات شکل 4.62-ج میں دیے گئے ہیں۔
جواب: حل ترسیم شکل 4.63-ب

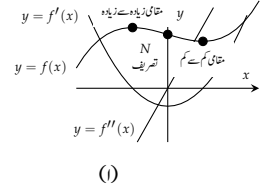
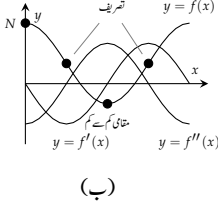
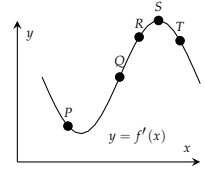
سوال 4.207: ترسیمات شکل 4.62-د میں دیے گئے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.208: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کو شکل 4.64 میں دکھایا گیا ہے۔دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y' اور y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔
جواب:

	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

(ب)

(ا)

شکل 4.63: حل ترسیمات برائے سوال 4.204 تا سوال 4.207

شکل 4.65: ترسیم برائے سوال 4.211

شکل 4.64: ترسیم برائے سوال 4.208

سوال 4.209: درج ذیل پر پورا اترتا ہوا ہموار ترسیم کھینچیں۔

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= 8, & f'(2) &= f'(-2) = 0 \\
f(0) &= 4, & f'(x) &< 0, |x| < 2 \\
f(2) &= 0, & f''(x) &< 0,\ x < 0 \\
f'(x) &> 0, |x| > 2, & f''(x) &> 0,\ x > 0
\end{aligned}
$$

سوال 4.210: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\ y'' < 0$

شکل 4.66: ترسیم برائے سوال 4.212

شکل 4.67: ترسیم برائے سوال 4.213

جواب: شکل 4.70

سوال 4.211: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2,2)$ ، $(-1,1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتا ہے اور جس کے یک رتبی تفرق کی علامت کا نقش شکل 4.65 میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

سوال 4.212: سمتی رفتار اور اسراع
محددی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.66 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 4.213: سمتی رفتار اور اسراع
محددی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل 4.67 میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟ (ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟ (ج) کب اسراع صفر ہے؟ (د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال 4.214: حاشیہ لاگت
x اشیاء پیدا کرنے پر لاگت $c = f(x)$ کو شکل 4.68 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟
جواب: تقریباً 60 پیداوار پر۔

سوال 4.215: ماہوار آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل ماہ کو شکل 4.69 میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟

سوال 4.216: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟(اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

جواب: $x = 2$ پر مقامی کم سے کم، $x = 1$ اور $x = \frac{5}{3}$ پر تصریف۔

شکل 4.68: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال 4.214)

شکل 4.69: آمدن بالمقابل سال (سوال 4.215)

سوال 4.217: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔کہاں مقامی کم سے کم، مقامی زیادہ سے زیادہ یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟(اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

سوال 4.218: $x > 0$ کے لئے ایسا تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا تفاعل کی مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.219: تفاعل $y = f(x)$ کا دو رتبی تفرق استمراری اور غیر صفر ہے۔کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.220: مستقل b ، c اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لئے منحنی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $b = -3$

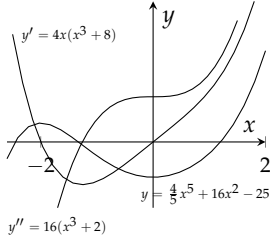
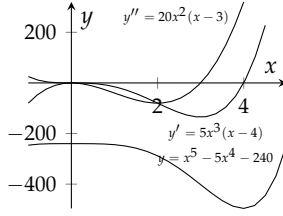
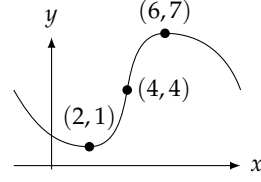
سوال 4.221: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

1. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

2. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال 4.222: قطع مکافی

1. قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

2. قطع مکافی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 4.72: حل ترسیم سوال 4.228

شکل 4.71: حل ترسیم سوال 4.226

شکل 4.70: حل ترسیم برائے سوال 4.210

جواب: (ا) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ؛(ب) $a > 0$ کی صورت میں اوپر مقعر جبکہ $a < 0$ کی صورت میں نیچے مقعر۔

سوال 4.223: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی مقعر ہر ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتی ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال 4.224: دو درجی منحنی۔ آپ دو درجی منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.225: کعبی منحنی۔ آپ کعبی منحنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.226 تا سوال 4.236 میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطے تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا یک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جہاں یہ ترسیمات x محدد کو قطع کرتی ہیں، ان کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ تفرق کے تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال 4.226: $y = x^5 - 5x^4 - 240$

جواب: $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ شکل 4.71

سوال 4.227: $y = x^3 - 12x^2$

سوال 4.228: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

جواب: $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ تصریف $x = -\sqrt[3]{2}$ پر اور مقامی زیادہ سے زیادہ $x = -2$ پر ہیں۔ شکل 4.72

سوال 4.229: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال 4.230: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 4.231: تفاعل $f(x) = x\cos x$ اور اس کے پہلے دو تفرق کو $0 \leq x \leq 2\pi$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال 4.232:

1. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کا ترسیم کی صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

2. $f''(x)$ تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

3. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \to \infty$ اور $k \to -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

جواب: (ب) $f'(x) = 3x^2 + k; -12k$ ؛ مثبت اگر $k < 0$ ، منفی اگر $k > 0$ ہو، 0 اگر $k = 0$ ہو؛ اگر $k < 0$ ہو تب f' کے دو صفر ہوں گے، $k = 0$ کی صورت میں ایک صفر اور $k > 0$ کی صورت میں کوئی صفر نہیں ہو گا۔

سوال 4.233:

ا. $k = -4$ اور اس کے قریبی قیمتوں کے لئے ایک ساتھ $-1 \leq x \leq 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال 4.234:

ا. $-3 \leq x \leq 3$ کے لئے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔اس کے بعد احصاء کی استعمال سے مقعر، اٹھان اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر منحنی کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

جواب: (ب) چونکہ $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ اور $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ ہیں للذا کنگرہ ہو گا۔

سوال 4.235:

ا. $-0.5 \le x \le 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x-1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی کم سے کم اور مقامی زیادہ سے زیادہ نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبدا کے بائیں جانب کون سی مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال 4.236: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3\sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: y' کی ترسیم $x = -3$ کے قریب محور کو قطع کرتی ہے للذا $x = -3$ کے قریب y کا افقی مماس ہو گا۔

4.5 $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

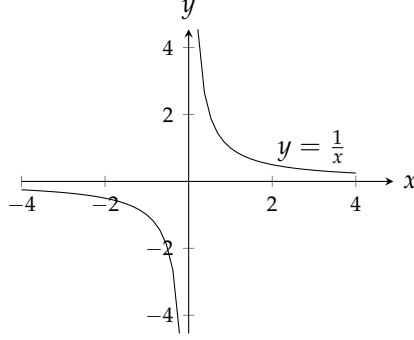
$x \to \mp\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

تعریف:

1. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

شکل 4.73: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

2. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

لکھتے ہیں۔

□

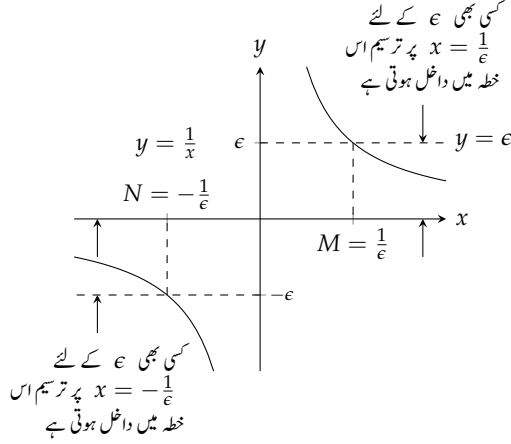
لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$x \to \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ 2.2 میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کے حد حاصل کیے۔اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کے حد حاصل کیے گئے۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کی بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$\lim_{x \to \mp\infty} k = k, \quad \lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{4.7}$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال 4.323 اور سوال 4.324 کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال 4.20: درج ذیل دکھائیں۔

شکل 4.74: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال 4.20)

ا. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

ب. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \implies \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل 4.74)۔

□

مساوات 4.7 کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 4.6: $x \to \mp\infty$ **پر حل کے خواص**
اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

یہ خواص بالکل مسئلہ 2.1 (صفحہ 111) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

مثال 4.21:

ا.

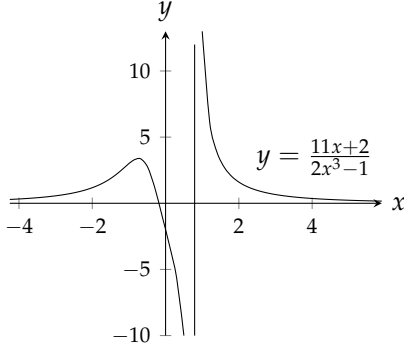
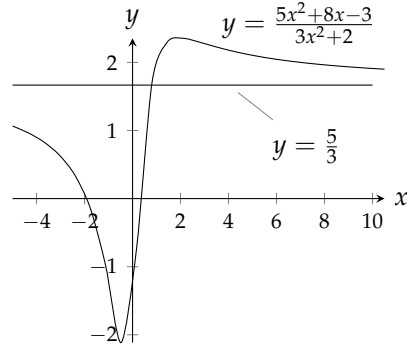
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(5+\tfrac{1}{x}) &= \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ}\\ &= 5+0=5 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب}\\ &= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

شکل 4.75: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.22)

شکل 4.76: ترسیم تفاعل اور حد (مثال 4.23)

□

مثال 4.22: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک جیسے ہیں (شکل 4.75)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}\qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$

□

مثال 4.23: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل 4.76)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}\qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$=\frac{0+0}{2-0}=0$$

□

مثال 4.24: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل 4.77

شکل 4.77: ترسیم برائے مثال 4.24

شکل 4.78: محددی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

ا.

شمار کنندہ اور نسب نما کو x سے تقسیم کریں

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} = -\infty$$

ب.

شمار کنندہ اور نسب نما کو x^2 سے تقسیم کریں

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

□

مثال 4.22 تا مثال 4.24 سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک جیسی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا **متقارب**[13] کہتے ہیں۔

مثال 4.25: محددی محور تفاعل $y=\frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل 4.78)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

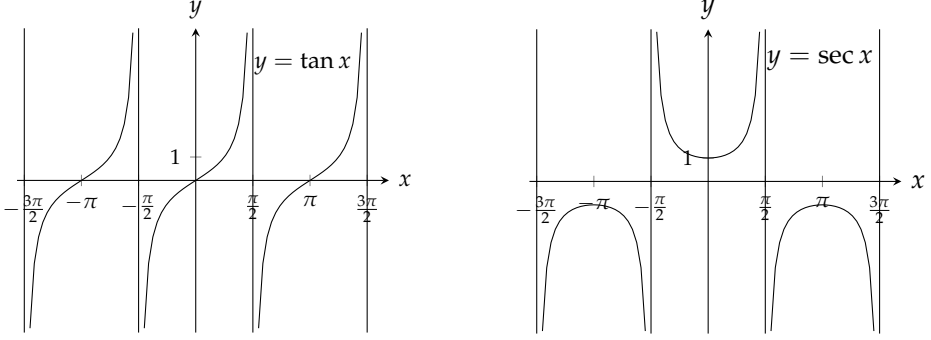
ہیں لہٰذا x محور $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

ہیں لہٰذا y محور بھی $y=\frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

یاد رہے کہ $x=0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

---

[13] asymptote

شکل 4.79: انتصابی متقارب (مثال 4.26)

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$ ہو۔

تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$ ہو۔

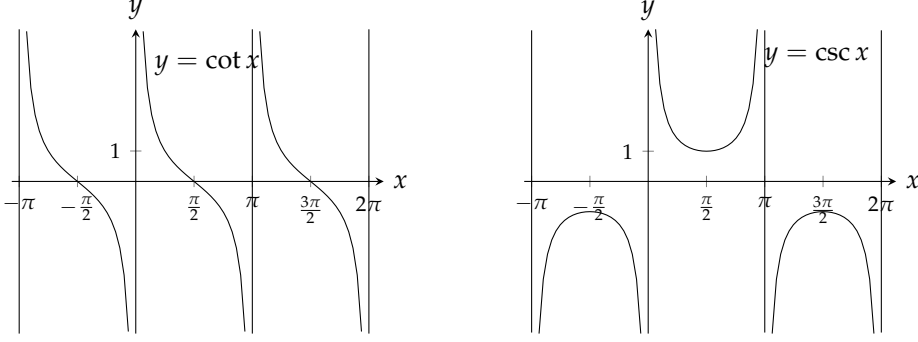
□

مثال 4.26: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.79)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل 4.80)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

□

شکل 4.80: انتصابی متقارب (مثال 4.26)

مثال 4.27: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to -2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ہم $x+3$ کو $x+2$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ x+2\overline{\big)\ x+3} \\ -x-2 \\ \hline 1 \end{array}$$

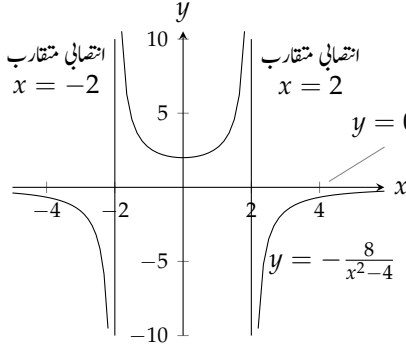
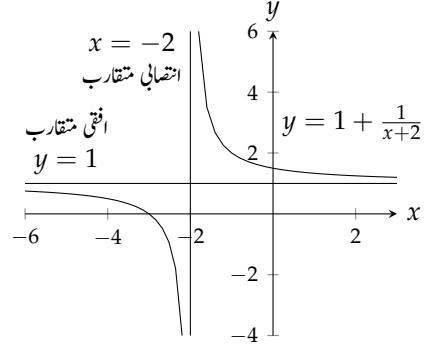
یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔یوں محددی محور کی بجائے خط $y = 1$ اور خط $x = -2$ متقارب خط ہوں گے۔

□

مثال 4.28: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2-4}$$

شکل 4.81: انتصابی متقارب (مثال 4.27)

شکل 4.82: انتصابی متقارب (مثال 4.28)

حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x = \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ لہٰذا افقی متقارب خط $y = 0$ ہے (شکل 4.82)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح $x = -2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔ □

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

مثال 4.29: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاو عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار قابل ہٹاو ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل 4.83)۔ □

مسئلہ 2.4 (صفحہ 116 مسئلہ بیچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

شکل 4.83: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاو ہے لہٰذا اس کی صرف $x = -1$ پر متقاربی خط ہو گا۔

شکل 4.84: منحنی اپنے متقاربی خط کو لا متناہی بار قطع کر سکتی ہے (مثال 4.30)۔

مثال 4.30: مسئلہ بیچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

حل: ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

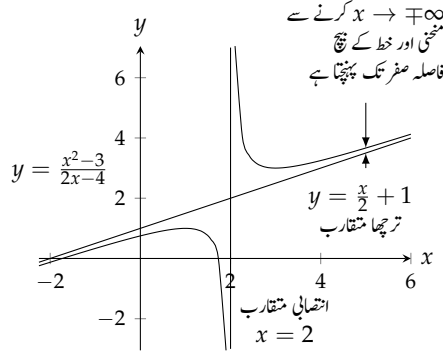
$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

اور $\lim_{x\to\mp\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty} (2 + \frac{\sin x}{x}) = 2 + 0 = 2$$

ہو گا لہٰذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل 4.84)۔ □

ترچھے متقارب

اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتصابی ہو گا۔

شکل 4.85: ترچھا متقارب (مثال 4.31)

مثال 4.31: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x \to 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ہم $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + 1 \\ 2x - 4 & x^2 \qquad - 3 \\ & -x^2 + 2x \\ & \quad 2x - 3 \\ & \quad -2x + 4 \\ & \qquad 1 \end{array}$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

چونکہ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل 4.85)۔ □

متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم

درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad x \text{ کی بڑی قیمتوں کے لئے}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \qquad 2 \text{ کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لئے}$$

بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہٰذا $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا **غلبہ**[14] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ **غالب**[15] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

مثال 4.32: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاو، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

دوسرا قدم: غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{4.8}$$

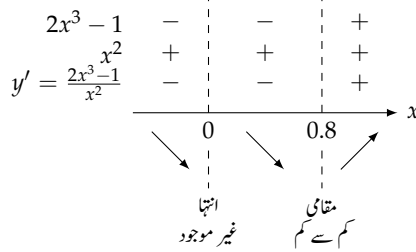
---

[14] dominates
[15] dominant

$|x|$ کی بڑی قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات 4.8 میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں نسب نما صفر ہو گا۔

تیسرا قدم: انتہا، اتار اور چڑھاو۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - 1 &= 0 \\ x^3 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8 \end{aligned}$$

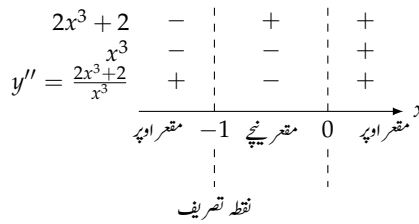
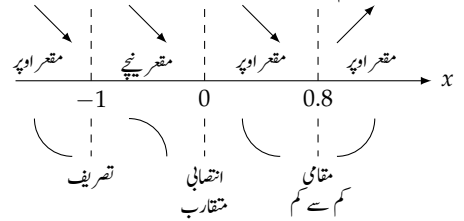
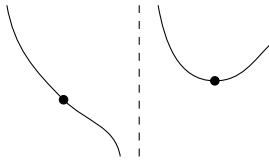
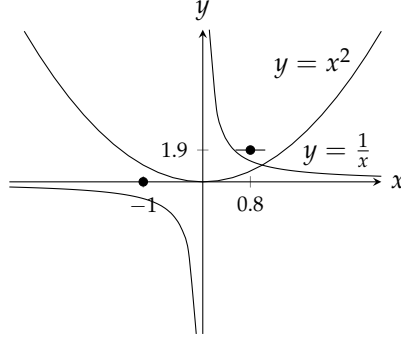
چوتھا قدم: مقعر۔ دو رتبی تفرق

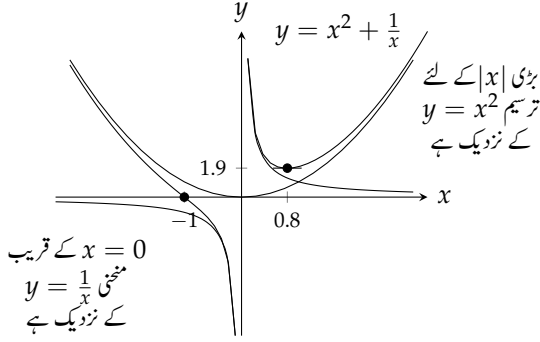
$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3 + 2}{x^3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$2x^3 + 2$	$-$	$+$	$+$
x^3	$-$	$-$	$+$
$y'' = \frac{2x^3+2}{x^3}$	$+$	$-$	$+$
x	مقعر اوپر	مقعر نیچے	مقعر اوپر

$x = -1$: نقطہ تصریف

$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 + 2 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

پانچواں قدم: درج بالا معلومات کو اکٹھا کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔

چھٹا قدم: غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔

ساتواں قدم: ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔

□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

1. تشاکل کی نشاندہی کریں۔
   کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

2. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

3. غالب اجزاء تلاش کریں۔
   ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

4. متقارب خطوط اور قابل ہٹاو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

5. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاو دریافت کریں۔

6. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

7. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

8. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

9. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب

سوال 4.237 تا سوال 4.242 میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال 4.237: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$
جواب: (ا) -3، (ب) -3

سوال 4.238: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال 4.239: $g(x) = \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$
جواب: (ا) $\frac{1}{2}$، (ب) $\frac{1}{2}$

سوال 4.240: $g(x) = \frac{1}{8-\frac{5}{x^2}}$

سوال 4.241: $h(x) = \frac{-5+\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}$
جواب: (ا) $-\frac{5}{3}$، (ب) $-\frac{5}{3}$

سوال 4.242: $h(x) = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال 4.243 تا سوال 4.246 میں حد تلاش کریں۔

سوال 4.243: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

جواب: 0

سوال 4.244: $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\cos\theta}{3\theta}$

سوال 4.245: $\lim_{t\to-\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

جواب: -1

سوال 4.246: $\lim_{r\to\infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد

سوال 4.247 تا سوال 4.260 میں دیے ناطق تفاعل کی (ا) $x\to\infty$ اور (ب) $x\to-\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال 4.247: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

جواب: (ا) $\frac{2}{5}$، (ب) $\frac{2}{5}$

سوال 4.248: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال 4.249: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

جواب: (ا) 0، (ب) 0

سوال 4.250: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال 4.251: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

جواب: (ا) $-\infty$، (ب) ∞

سوال 4.252: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال 4.253: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

جواب: (ا) 7، (ب) 7

سوال 4.254: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال 4.255: $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$
جواب: (ا) $-\infty$، (ب) ∞

سوال 4.256: $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال 4.257: $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$
جواب: (ا) ∞، (ب) $-\infty$

سوال 4.258: $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال 4.259: $h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$
جواب: (ا) $-\frac{2}{3}$، (ب) $-\frac{2}{3}$

سوال 4.260: $h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت

ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔ نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال 4.261 تا سوال 4.266 میں حد تلاش کریں۔

سوال 4.261: $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$
جواب: 0

سوال 4.262: $\lim_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

سوال 4.263: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$
جواب: 1

سوال 4.264: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

سوال 4.265: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$
جواب: ∞

شکل 4.86: ایک ممکنہ حل برائے سوال 4.267

شکل 4.87: ایک ممکنہ حل برائے سوال 4.269

شکل 4.88: ایک ممکنہ حل برائے سوال 4.271

شکل 4.89: ایک ممکنہ حل برائے سوال 4.273

سوال 4.266: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال 4.267 تا سوال 4.270 میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہٰذا کار تیسی محدد پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔(ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہٰذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال 4.267: $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim_{x\to-\infty} = -1, \lim_{x\to\infty} = 1$

جواب: شکل 4.86

سوال 4.268: $f(0) = 0, \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to0^+} = 2, \lim_{x\to0^-} = -2$

سوال 4.269: $f(0) = 0, \lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

جواب: شکل 4.87

سوال 4.270: $f(2) = 1, f(-1) = 0, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \lim_{x\to0^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

تفاعل کی ایجاد

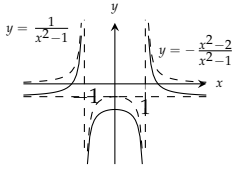
سوال 4.271 تا سوال 4.274 میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل

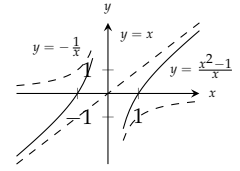
شکل 4.90: ترسیم سوال 4.275

شکل 4.91: ترسیم سوال 4.277

شکل 4.92: ترسیم سوال 4.279

شکل 4.93: ترسیم سوال 4.281

شکل 4.94: ترسیم سوال 4.283

شکل 4.95: ترسیم سوال 4.285

شکل 4.96: ترسیم سوال 4.287

شکل 4.97: ترسیم سوال 4.289

ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہٰذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

سوال 4.271: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \infty$

جواب: شکل 4.88

سوال 4.272: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} g(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \infty$

سوال 4.273: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1,\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$

جواب: شکل 4.89

سوال 4.274: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} k(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 1^-} k(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x) = -\infty$

ناطق تفاعل کی ترسیم

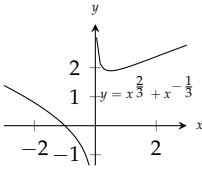
سوال 4.275 تا سوال 4.302 میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

شکل 4.98: ترسیم سوال 4.291

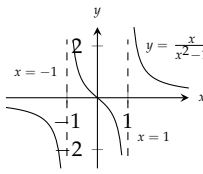
شکل 4.99: ترسیم سوال 4.293

شکل 4.100: ترسیم سوال 4.295

شکل 4.101: ترسیم سوال 4.297

شکل 4.102: ترسیم سوال 4.299

شکل 4.103: ترسیم سوال 4.301

شکل 4.104: ترسیم سوال 4.303

شکل 4.105: ترسیم سوال 4.305

سوال 4.275: $y = \frac{1}{x-1}$

جواب: شکل 4.90

سوال 4.276: $y = \frac{1}{x+1}$

سوال 4.277: $y = \frac{1}{2x+4}$

جواب: شکل 4.91

سوال 4.278: $y = \frac{-3}{x-3}$

سوال 4.279: $y = \frac{x+3}{x+2}$

جواب: شکل 4.92

سوال 4.280: $y = \frac{2x}{x+1}$

سوال 4.281: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

جواب: شکل 4.93

سوال 4.282: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال 4.283: $y = \frac{x^2-1}{x}$
جواب: شکل 4.94

سوال 4.284: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

سوال 4.285: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$
جواب: شکل 4.95

سوال 4.286: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

سوال 4.287: $y = \frac{1}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.96

سوال 4.288: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

سوال 4.289: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.97

سوال 4.290: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

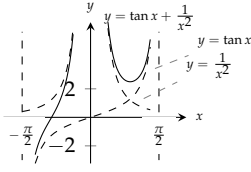
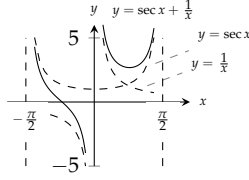
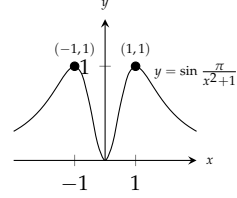
سوال 4.291: $y = \frac{x^2}{x-1}$
جواب: شکل 4.98

سوال 4.292: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

سوال 4.293: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$
جواب: شکل 4.99

سوال 4.294: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

سوال 4.295: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$
جواب: شکل 4.100

سوال 4.296: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

شکل 4.106: ترسیم سوال 4.307

شکل 4.107: ترسیم سوال 4.309

شکل 4.108: ترسیم سوال 4.311

سوال 4.297: $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$
جواب: شکل 4.101

سوال 4.298: $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

سوال 4.299: $y = \frac{x}{x^2-1}$
جواب: شکل 4.102

سوال 4.300: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

سوال 4.301: $y = \frac{8}{x^2+4}$
جواب: شکل 4.103

سوال 4.302: $y = \frac{4x}{x^2+4}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.303 تا سوال 4.308 کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

سوال 4.303: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
جواب: شکل 4.104

سوال 4.304: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

سوال 4.305: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$
جواب: شکل 4.105

سوال 4.306: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

سوال 4.307: $y = \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$
جواب: شکل 4.106

سوال 4.308: $y = -\cos(\frac{\pi}{x^2+1})$

اجزاء کی ترسیمات

سوال 4.309 تا سوال 4.312 میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 4.309: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.107

سوال 4.310: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 4.311: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 4.108

سوال 4.312: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.313: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال 4.314: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

سوال 4.315: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟
جواب: بڑھتا

سوال 4.316: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال 4.317: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔کیا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بین کریں۔

سوال 4.318: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.319: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: 2

سوال 4.320: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.321:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال 4.30) متقاربی خط کو لامتناہی بار قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \to \infty$ پر اس ترسیم کی ڈھلوان متقاربی خط کی ڈھلوان تک پہنچتی ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

1) $x > 0$ پر f قابل تفرق ہے۔

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

3) $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ غیر موجود ہے۔

جواب: (ب) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\sin x^2$ ممکن ہے۔

سوال 4.322: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = x + 1 + \frac{5}{x+2}$$

جس کی ترچھی متقارب $y = x + 1$ ہے۔

اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = \frac{x+3+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

ملتا ہے جس کی متقارب $y = x + 3$ ہے۔

ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.323 اور سوال 4.324 میں حد کی با ضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \to \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

سوال 4.323: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

سوال 4.324: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے

سوال 4.325 تا سوال 4.328 میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.325: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$
جواب: $x = -1,\ y = 1 - x$

سوال 4.326: $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

سوال 4.327: $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$
جواب: $x = 1,\ x = -1,\ y = x - 1$

سوال 4.328: $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

سوال 4.329 تا سوال 4.334 میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

سوال 4.329: $y = x^3 + \frac{3}{x}$

سوال 4.330: $y = x^3 - \frac{3}{x}$

سوال 4.331: $y = 2\sin x + \frac{1}{x}$

سوال 4.332: $y = 2\cos x - \frac{1}{x}$

سوال 4.333: $y = \frac{x^2}{2} + 3\sin 2x$

سوال 4.334: $y = (x-1)^{11} + 2\sin 2\pi x$

سوال 4.335 اور سوال 4.336 کا تفاعل ترسیم کریں۔اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

ا. $x \to 0^+$ اور $x \to 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ب. $x \to \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \to 1$ اور $x \to -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.335: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$
جواب: (ا) $y \to \infty$ (ب)، $y \to \infty$ (ج)، $x = \mp 1$ پر کنگرہ

سوال 4.336: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال 4.337: تفاعل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-9 \le x \le 9$ ب. $-90 \le x \le 90$ ج. $-900 \le x \le 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟
جواب: جزو-ج میں فاصلے اتنے زیادہ ہیں کہ چھوٹی حرکت نظر نہیں آتی ہے۔

سوال 4.338: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا

بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جا سکتا ہے۔ سوال 4.339 تا سوال 4.344 میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تا کہ ترسیم پر حد کو دیکھا جا سکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال 4.339: $\lim_{x\to\mp\infty} x\sin\frac{1}{x}$
جواب: 1

سوال 4.340: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

سوال 4.341: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$
جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 4.342: $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{1/x}$

سوال 4.343: $\lim_{x\to\mp\infty} (3+\frac{2}{x})(\cos\frac{1}{x})$
واب: 3

سوال 4.344: $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2}-\cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

4.6 بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ $30\,\text{cm}$ قطر لکڑ سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی کم سے کم یا زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

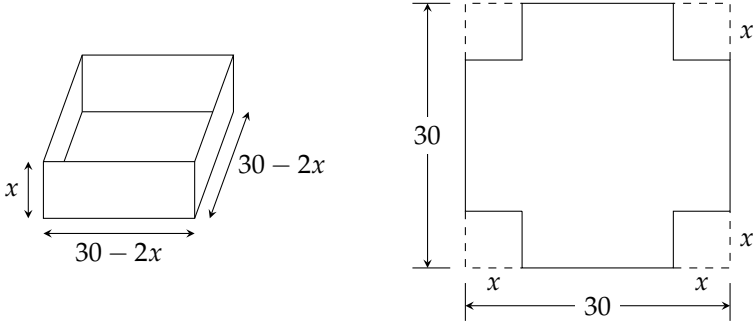
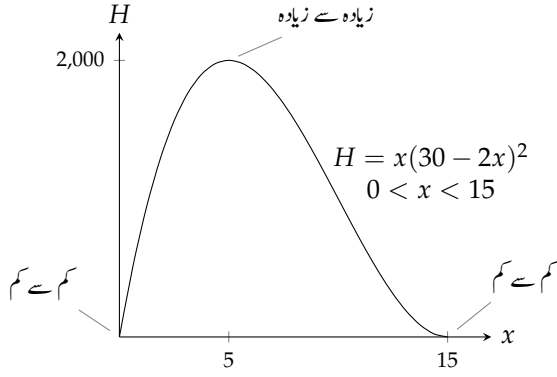
مثال 4.33: دھاتی چادر کا استعمال
ایک چکور چادر جس کا ضلع $30\,\text{cm}$ ہے کے کونوں سے چھوٹے چکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل: شکل 4.109 میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x)=x(30-2x)^2=4x^3-120x^2+900x$$

ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع $30\,\text{cm}$ ہے لہٰذا $0\le x\le 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل 4.110 میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x=0$ اور $x=15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{dH}{dx}=12x^2-240x+900=12(x-15)(x-5)=0,$$

شکل 4.109: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال 4.33)۔

شکل 4.110: حجم بالمقابل x (مثال 4.33)۔

یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$H(5) = 2000, \quad \text{نقطہ فاصل}$$
$$H(0) = 0, \quad H(15) = 0 \quad \text{آخری نقطے}$$

یوں زیادہ سے زیادہ حجم $2000\,\text{cm}^3$ ہے جو $5\,\text{cm}$ ضلع چکور کاٹنے سے ملے گا۔ □

مثال 4.34: بیلن
آپ کو ایک لٹر تیل کا بلبینی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل 4.111)۔اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$H = \pi r^2 * h = 1000 \qquad (1000\,\text{cm}^3 = \text{ایک لٹر}) \tag{4.9}$$

درکار ہے۔کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظر انداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال 4.362 میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے۔) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دو سر}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{بیلنی دیوار}} \tag{4.10}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات 4.10 میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات 4.9 اور مساوات 4.10 کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات 4.9 کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات 4.10 میں پر کرتے ہوئے h سے چھٹکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نلکی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی بنا S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہٰذا کم سے کم S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
4\pi r^3 &= 2000 && r \text{ کے لئے حل کریں} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصل}
\end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی کم سے کم قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہٰذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کا دو رتبی تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل 4.111)۔یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42\,\mathrm{cm}, \quad h \approx 10.84\,\mathrm{cm}$$

□

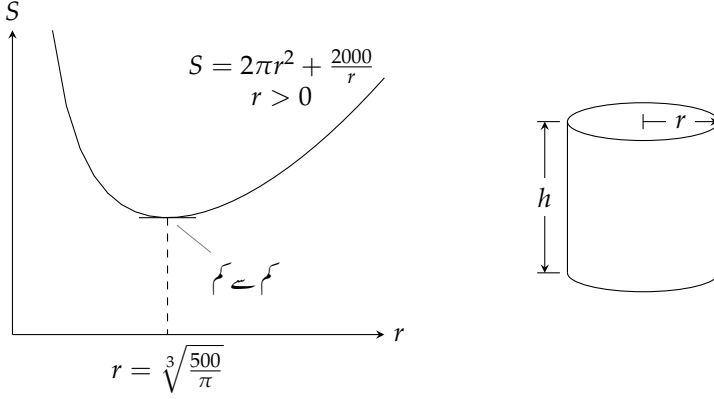
کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

1. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟

2. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

3. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔

4. نا معلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نا معلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

5. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتبی اور دو رتبی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہو گا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔

شکل 4.111: ٹین کا ڈبہ (مثال 4.34)

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال 4.35: اعداد کا حاصل ضرب
ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \le x \le 20$ ہے۔

ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

پورے وقفہ $0 \le x \le 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہوں گے (شکل 4.112)۔
□

مثال 4.36: جیومیٹری
رداس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

شکل 4.112: x اور $(20-x)$ کے حاصل ضرب کی زیادہ سے زیادہ قیمت 100 ہے (مثال 4.35)۔

شکل 4.113: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال 4.36)۔

حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل 4.113 میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\text{لمبائی}: 2x, \quad \text{چوڑائی}: \sqrt{4-x^2}, \quad \text{رقبہ}: 2x\sqrt{4-x^2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4-x^2}$$

کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت وقفہ $[0,2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$$

نقطہ $x=2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0$$
$$-2x^2 + 2(4-x^2) = 0 \qquad \text{دونوں اطراف کو } \sqrt{4-x^2} \text{ سے ضرب دیں}$$
$$8 - 4x^2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \mp\sqrt{2}$$

$x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔ دائرہ کار کی آخری نقطوں اور اس اکلوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4 \qquad \text{نقطہ فاصل پر قیمت}$$

$$S(0) = 0, \quad S(2) = 0 \qquad \text{آخری نقطوں پر قیمت}$$

یوں مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ہو گی۔ □

پیئغ د فغما اور قانون ابن سہل

خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں **اصول فغما**[16] کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال 4.37: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہو گا (شکل 4.114)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہو گی۔پہلا خط A سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$$

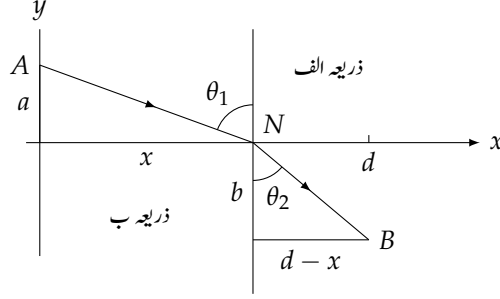
یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

---

[16] Fermat's principle

شکل 4.114: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال 4.37)

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2} \tag{4.11}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے اور تفاعل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ہم تفرق

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \tag{4.12}$$

لیتے ہیں جس کو شکل 4.114 کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.13}$$

مساوات 4.12 سے ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} < 0$ اور $x = d$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} > 0$ ہو گا۔یوں اند نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا۔چونکہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ مسلسل بڑھتا تفاعل ہے (سوال 4.396) لہٰذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{4.14}$$

مساوات 4.14 کو **ابن سہل کا قانون انعطاف**[17] کہتے ہیں[18]۔ □

---

[17] Ibn Sahl's law of relection

[18] مغربی دنیا میں اس کو Snell's law کہتے ہیں۔

معاشیات میں لاگت اور آمدنی

نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

فرض کریں کہ

x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\text{حاشیہ آمدنی} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}$$
$$\text{حاشیہ لاگت} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}$$

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

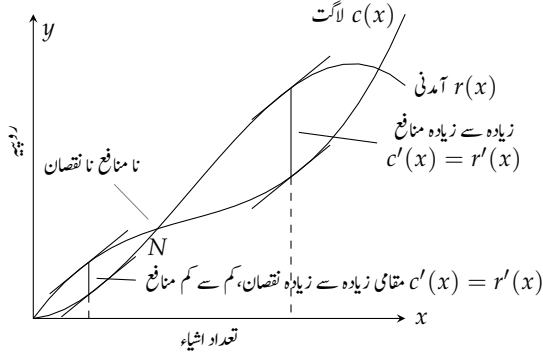
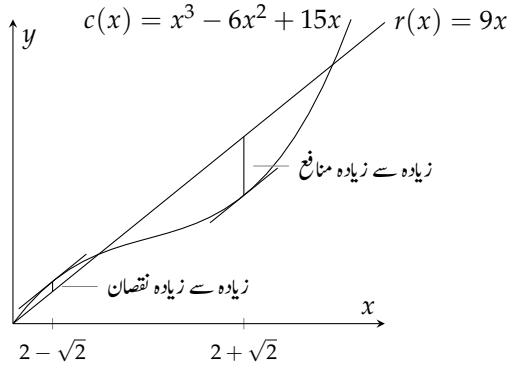
مسئلہ 4.7: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہٰذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہٰذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \quad r'(x) = c'(x)$$

ہے۔یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل 4.115)۔

□

ہمیں مسئلہ 4.7 سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر زیادہ سے زیادہ منافع یا زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشنگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔اگر زیادہ سے زیادہ منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

شکل 4.115: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نا منافع نا نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

شکل 4.116: لاگت بالمقابل منافع (مثال 4.38)

مثال 4.38: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟

حل:

$$\begin{aligned}
r(x) &= 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x \\
r'(x) &= 9, \quad c'(x) = 3x^2 - 12x + 15 && r' \text{ اور } c' \text{ تلاش کریں} \\
3x^2 - 12x + 15 &= 9 && \text{ایک دوسرے کے برابر پر کریں} \\
3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{ترتیب دیں} \\
x^2 - 4x + 2 &= 0 \\
x &= \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} && \text{دو درجی مساوات حل کریں} \\
&= \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2} \\
&= 2 \mp \sqrt{2}
\end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل 4.116)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر زیادہ سے زیادہ نقصان ہو گا۔
□

بہترین سطح پیداوار کو کم سے کم اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

مسئلہ 4.8: اوسط کم سے کم لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

$c(x)$ اشیاء کی لاگت پیداوار $x > 0$

$\frac{c(x)}{x}$ اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار x

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 0 \\
\frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\
\underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}}
\end{aligned}$$

□

ہمیں دھیان سے مسئلہ 4.8 استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ کم سے کم اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا کم سے کم اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال 4.39: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\
c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0 \\
x &= 0, \quad x = 3
\end{aligned}$$

چونکہ $x > 0$ ہے لٰہذا کم سے کم اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$\frac{c(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \qquad \text{اوسط لاگت}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2x - 6$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2 > 0$$

دو رتبی تفرق مثبت ہے لہٰذا $x = 3$ پر مطلق کم سے کم ہو گا۔ □

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفرق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہو گی، جیسا مثال 4.38 میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

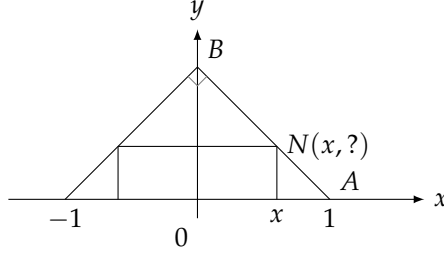
سوالات

ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

جیومیٹری کے مسائل

سوال 4.345: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے وسط تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے جو $100\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟
جواب: $r = 25\,\mathrm{m}, s = 50\,\mathrm{m}$

سوال 4.346: ایک قائمہ مثلث کا وتر $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 4.347: ایک مستطیل جس کا رقبہ $16\,\mathrm{cm}^2$ ہے کا کم سے کم محیط کتنا ہو گا؟
جواب: $16\,\mathrm{cm}$

شکل 4.117: مثلث میں محصور مستطیل (سوال 4.349)

سوال 4.348: دکھائیں کہ ایک محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چکور ہو۔

سوال 4.349: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔اس میں محصور مستطیل کو شکل 4.117 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. N کے محدد کو x کی صورت میں لکھیں۔(خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

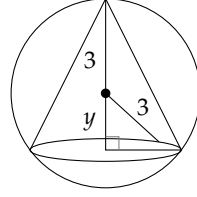
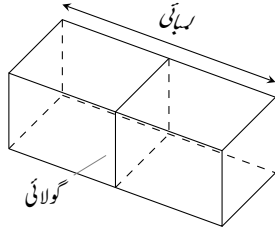
جواب: (ا) $(x, 1-x)$ ، (ب) $A(x) = 2x(1-x)$ ، (ج) $\frac{1}{2}$ مربع اکائیاں

سوال 4.350: ایک مستطیل کا تلا x محور پر ہے جبکہ اس کے بالائی دو راس قطع مکافی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال 4.351: آپ $15\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$ چادر کے کونوں سے چکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟
جواب: $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\,\text{cm}^3$

سوال 4.352: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ربع اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $a = b$ ہو۔

سوال 4.353: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے $800\,\text{m}$ کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟
جواب: $80\,000\,\text{m}^2$

شکل 4.119: ڈبہ برائے سوال 4.363

شکل 4.118: کرہ میں مخروط (سوال 4.358)

سوال 4.354: $216\,\mathrm{m}^2$ مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

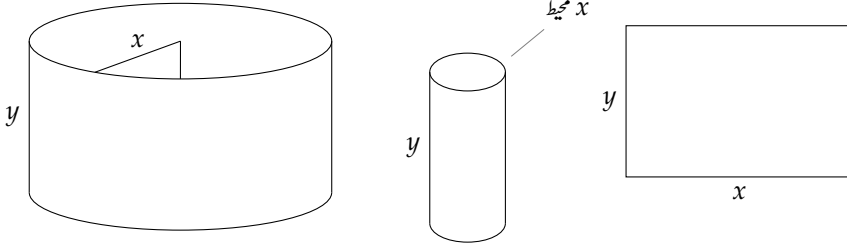
سوال 4.355: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی
بغیر ڈھکن ٹینکی جس کا تلا چکور ہو درکار ہے جس کا حجم $256\,\mathrm{m}^3$ ہو۔ یہ ٹینکی $1\,\mathrm{cm}$ موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجنیئر آپ کا کام ہے کہ ہلکی ترین ٹینکی بنانے کے لئے ٹینکی کا اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $8 \times 8 \times 4\,\mathrm{m}^3$

سوال 4.356: بارش کا پانی
بارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لئے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن $1125\,\mathrm{m}^3$ حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا تلا چکور ہے۔ٹینکی کی گہرائی y میٹر جبکہ تلا کی ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا تلا اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے راست متناسب ہے۔اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کی ہوں گے؟

سوال 4.357: ایک مستطیل اشتہار میں $50\,\mathrm{cm}^2$ رقبے پر لکھائی ہو گی۔بالائی اور نچلے جانب $4\,\mathrm{cm}$ اور اطراف پر $2\,\mathrm{cm}$ خالی جگہ ہو گی۔کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لئے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟
جواب: $9\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm}$

سوال 4.358: رداس $r = 3$ کی کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل 4.358)؟

سوال 4.359: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کی زیادہ سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$)
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 4.360: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔تفاعل $s = 2x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

شکل 4.120: چادر اور بیلن (سوال 4.365)

سوال 4.361: $1000\,\mathrm{cm}$ حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ کم سے کم بیلن کی جسامت تلاش کریں۔
جواب: $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\,\mathrm{cm}$

سوال 4.362: $1000\,\mathrm{cm}$ حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا ہے البتہ بالائی اور نچلے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لئے $S = 8r^2 + 2\pi rh$ رقبے کی چادر درکار ہو گی نا کہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال 4.34)۔ مثال 4.34 میں کم سے کم لاگت کے لئے h اور r کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہو گا؟

سوال 4.363: (ا) ایک مستطیل ڈبہ کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ $108\,\mathrm{cm}$ ہے (شکل 4.119)۔ اس ڈبے کے سر چکور ہیں۔ اس ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $18\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm} \times 36\,\mathrm{cm}$

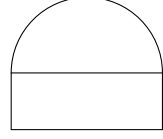
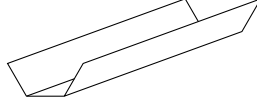
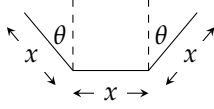
سوال 4.364: گزشتہ سوال میں چکور سروں کی بجائے چکور اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہو گی۔ اب ڈبے کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گی؟

سوال 4.365: (ا) ایک مستطیل چادر جس کا محیط $36\,\mathrm{cm}$ اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے سر کھلے ہیں۔ اس بیلن کی زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتی ہے؟ (ب) اس مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟ (شکل 4.120)
جواب: (ا) $12\,\mathrm{cm}$ ، $6\,\mathrm{cm}$؛ (ب) $12\,\mathrm{cm}$ ، $6\,\mathrm{cm}$

سوال 4.366: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ اس مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کا رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال 4.367: دائرہ بالمقابل چکور

ا. $4\,\mathrm{m}$ لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چکور اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی کہ دائرے اور چکور کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو؟

شکل 4.121: کھڑکی (سوال 4.369)

شکل 4.122: پانی کی نالی (سوال 4.371)

ب. چکور اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کی رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. اب کل رقبے کو چکور کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزو الف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

جواب: (ا) دائرے کا محیط $4\,\mathrm{m}$ ہے۔

سوال 4.368: مکعب اور کرہ کی سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (ا) کم سے کم، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

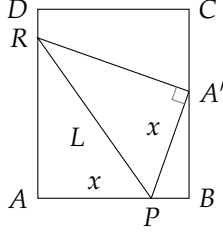
سوال 4.369: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل 4.121)۔ مستطیل شیشہ شفاف ہے جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لئے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔
جواب: اگر نصف دائرے کا رداس r ، مستطیل کا قاعدہ $2r$ اور اس کی بلندی h ہوں تب $\frac{2r}{h}=\frac{8}{4+\pi}$ ہو گا۔

سوال 4.370: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کروی ہو گی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لئے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں نچلی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

سوال 4.371: ایک پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل 4.122 میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لئے θ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 4.372: ایک مستطیل $8.5\,\mathrm{cm}\times 11\,\mathrm{cm}$ کاغذ کو مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل 4.123)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔

ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔

ب. دکھائیں $L^2=\frac{2x^3}{2x-8.5}$

شکل 4.123: کاغذ برائے سوال 4.372

ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو کم سے کم بناتی ہے؟

د. x کی کم سے کم قیمت کیا ہے؟

ھ. x بالمقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

طبعی استعمال

سوال 4.373: انتصابی حرکت کرتی ایک جسم کی اونچائی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,\ g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ اونچائی کیا ہو گی؟
جواب: $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

سوال 4.374: ایک عمارت سے $9\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $2.5\,\mathrm{m}$ اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیڑھی لگائی جاتی ہے۔ سیڑھی کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

سوال 4.375: شہتیر کہ مضبوطی لکڑی کی شہتیر کی مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $M = kwd^2$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. $30\,\mathrm{cm}$ قطر کے لکڑ سے کس جسامت کی مضبوط سے مضبوط شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟

ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

جواب: (ا) $\frac{30}{\sqrt{3}}\,\text{cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\text{cm}$

سوال 4.376: شہتیر کی سختی شہتیر کی سختی S اس کی چوڑائی w ضرب مکعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. $30\,\text{cm}$ قطر کی لکڑ سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہو گی؟

ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

سوال 4.377: لمحہ t پر ایک بلب میں برقی رو $i = 2\cos t + 2\sin t$ ہے۔ رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہو گی؟
جواب: $2\sqrt{2}\,\text{A}$

سوال 4.378: بے رگڑ ریڑھی کو افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھا جاتا ہے (شکل 4.124)۔ لمحہ $t = 0$ پر ساکن مقام سے اس کو $10\,\text{cm}$ دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تاکہ یہ 4 سیکنڈوں کے لئے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10\cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہو گی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کی اسراع کیا ہو گی؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کی اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحہ ریڑھی کا مقام کیا ہو گا؟ تب اس کی رفتار کیا ہو گی؟

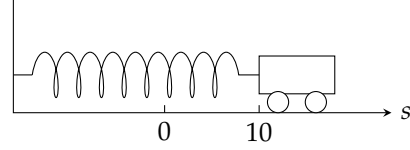
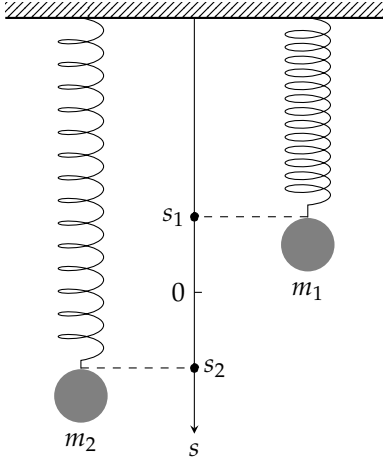
سوال 4.379: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے (شکل 4.125)۔ ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2\sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

ا. کس لمحہ کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$)

ب. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتصابی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہو گی؟ (اشارہ: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)

جواب: (ا) جب π کا عدد صحیح مضرب t ہو۔ (ب) $t = \frac{2\pi}{3}$ ، $t = \frac{4\pi}{3}$ ، $t = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 4.380: s محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

شکل 4.125: چھت سے آویزاں دو اسپرنگ (سوال 4.379)

شکل 4.124: افقی سطح پر ریڑھی کو دیوار کے ساتھ باندھا گیا ہے (سوال 4.378)

ا. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کم ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟

ج. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلہ کی تبدیلی تیز ترین ہو گی؟

سوال 4.381: لمحہ t پر x محور پر ایک ذرے کا مقام $x = (t-1)(t-4)^4$ ہے۔

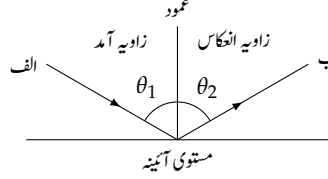
ا. ذرہ ساکن کب ہو گا؟

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہو گی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لئے x بالمقابل t ترسیم کریں۔اسی وقفہ کے لئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (ا) $t = \frac{8}{5}$ ، $t = 4$ ؛ (ب) $\frac{8}{5} < t < 4$ ؛ (ج) $\frac{2187}{125}$ اکائی فی وقت

سوال 4.382: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔ بحری جہاز الف $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں ہے جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف $16\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے رواں ہے۔

شکل 4.126: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال 4.383)

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

ج. اس دن حد نظر $10\,\mathrm{km}$ تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہو گا؟

د. $0 \le t \le 3$ کے لئے s بالمقابل t اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ ترسیمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

ہ. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی ترسیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔اس کا مطلب ہے کہ $t \to \infty$ کرنے سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ اس حد کو تلاش کریں۔ اس حد کا انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 4.383: بصریات میں **اصول فغا** کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل 4.126 میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فغما کو مطمئن کرتا ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔)

سوال 4.384: عمل انگیز: **عمل انگیز**[19] اس مادہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا توں رہتا ہے۔ **خود عمل انگیز**[20] کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال $13\,^\circ\mathrm{C}$ سے کم درجہ پر پڑا ہوا دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید برادہ میں تبدیل ہونا ہے۔یہ برادہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی بنا دوبارہ آہستہ ہوتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کے راست متناسب ہو گی، یعنی

$$v = kx(a-x) = kax - kx^2$$

catalyst[19]
autocatalyst[20]

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دیگا؟ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال 4.385: کیا تفاعل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔
جواب: نہیں۔ تفاعل کی مطلق کم سے کم قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔

سوال 4.386: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تفاعل $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لئے تفاعل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال 4.387: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (ا) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔
جواب: (ا) $(c - \frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{2}})$؛ (ب) $(0, 0)$

سوال 4.388: a کی کس قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کا (ا) $x = 2$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال 4.389: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ کی (ا) $x = -1$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ اور $x = 3$ پر مقامی کم سے کم قیمت ہو گی، (ب) $x = 4$ پر مقامی کم سے کم اور $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔
جواب: (ا) $a = -3, b = -9$؛ (ب) $a = -3, b = -24$

سوال 4.390: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی کم سے کم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

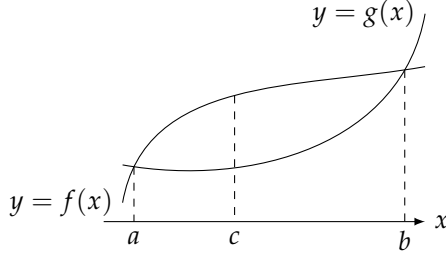
سوال 4.391:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تفاعل $y = \cos x - \sqrt{2}\csc x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (ا) $y = -1$

سوال 4.392:

ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تفاعل $y = \tan x + 3\cot x$ کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

شکل 4.127: ترسیمات برائے سوال 4.394

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 4.393: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟
جواب: $\frac{7\sqrt{17}}{2}$

سوال 4.394: فرض کریں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل 4.127 میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطے پر ان تفاعل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.395: دکھائیں کہ مثبت عدد صحیح a ، b ، c اور d کی صورت میں $16 \le \frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd}$ ہو گا۔

سوال 4.396: (مثال 4.37 کا $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$)

ا. دکھائیں کہ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

ب. دکھائیں کہ $g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا گھٹتا تفاعل ہے۔

ج. دکھائیں کہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

دوا

سوال 4.397: حساسیت دوا۔ (سوال 3.115 دیکھیں)
دوا کی وہ مقدار جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو معلوم کرنے کی خاطر M کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر تفرق $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $R = M^2(\frac{C}{2} - \frac{M}{3})$ اور C مستقل ہے۔
جواب: $M = \frac{c}{2}$

سوال 4.398: کھانسی

ا. کھانسی کے دوران سانس کی نالی سکڑ کر ہوا کی رفتار کو تیز کرتی ہے۔کیا سانس کی نالی اتنی سکڑتی ہے کہ ہوا کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہو؟

سانس کی نالی کی لچک اور اس کی دیوار کا ہوا کی بہاو کو مزاحمت کی مناسب قیمتیں لیتے ہوئے ہوا کی اوسط رفتار v کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$v = c(r_0 - r)r^2\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

جہاں آرام کی صورت میں سانس کی نالی کا رداس r_0 سنٹی میٹر ہے اور c مثبت مستقل جس کی قیمت سانس کی لمبائی پر (بھی) منحصر ہے۔

دکھائیں کہ v کی زیادہ سے زیادہ قیمت $r = \frac{2}{3}r_0$ پر حاصل ہو گی یعنی جب سانس کی نالی $33\,\%$ سکڑے۔ کھانسی کے دوران سانس کی نالی کی ایکس رے ثابت کرتی ہے کہ کھانسی کے دوران سانس کی نالی اتنی ہی سکڑتی ہے۔

ب. $r_0 = 0.5$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے وقفہ $0 \leq r \leq 0.5$ پر v ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ آیا زیادہ سے زیادہ رفتار $r = \frac{2}{3}r_0$ پر نظر آتی ہے۔

اقتصادیات اور کاروبار

سوال 4.399: ایک قمیض تیار کرنے پر c روپیہ لاگت آتی ہے اور اس کی قیمت فروخت x روپیہ ہے۔ فروخت قمیضوں کی تعداد $n = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{100-x}$ ہے جہاں a اور b مثبت مستقل ہیں۔ زیادہ سے زیادہ منافع کس قیمت فروخت پر ہو گا؟

جواب: $\frac{c}{2} + 50$

سوال 4.400: آپ سیر و سیاحت کا کاروبار کرتے ہیں۔ آپ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

ا. اگر 50 افراد (جو کم سے کم تعداد ہے) سیر و سیاحت پر جائیں تب ہر فرد 200 روپیہ ادا کرے گا۔

ب. 80 افراد کی حد تک ہر اضافی فرد کی صورت میں تمام افراد کو 2 روپیہ کم ادا کرنے ہوں گے۔

کل لاگت 6000 روپیہ کی مستقل مقدار اور فی فرد 32 روپیہ ہے۔زیادہ سے زیادہ منافع کے لئے کتنے افراد درکار ہیں؟

سوال 4.401: انتظام تجارت مال کا ایک کلیہ کہتا ہے کہ مال کی فرمائش، ادائیگی اور رکھوالی پر فی ہفتہ $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ لاگت آتی ہے جہاں q کھیپ میں اشیاء کی تعداد ہے، k لمحہ فرمائش پر ادائیگی ہے (جو ہر فرمائش پر ادا کرنی ہو گی)، c فی رکن قیمت ہے، m ایک ہفتہ میں فروخت اشیاء کی تعداد ہے، اور h فی رکن ہفتہ وار رکھوالی کا خرچ ہے جس میں کرایہ وغیرہ شامل ہے ۔ q کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $A(q)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

جواب: $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

سوال 4.402: (تسلسل سوال 4.401)
خرچ ترسیل بعض اوقات کھیپ کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔جب ایسا ہو تب k کی جگہ $k + bq$ استعمال کیا جاتا ہے جہاں b مستقل ہے۔ اب کھیپ کی بہترین جسامت کیا ہو گی؟

سوال 4.403: اگر تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ اور تفاعل آمدنی $r(x) = 6x$ ہوں تب دکھائیں کہ آپ نا منافع نا نقصان سے زیادہ بہتر صورت حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔

سوال 4.404: فرض کریں x اشیاء کی پیداوار میں لاگت $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ ہے۔ کتنی پیداوار اوسط لاگت پیداوار کو کم سے کم کرے گی؟

4.7 خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی **خط بندی**[21] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

خطی تخمین

آپ شکل 4.128 میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

شکل 4.129 کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات

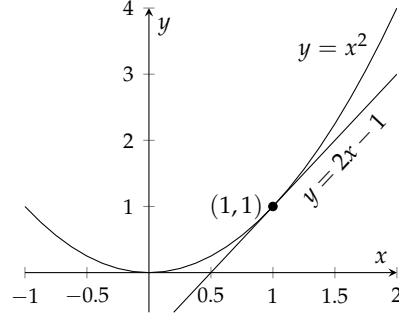
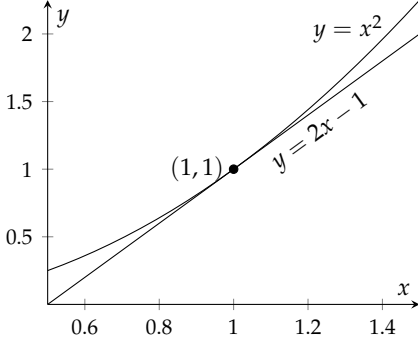
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

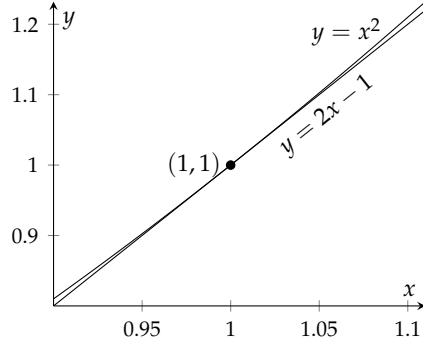
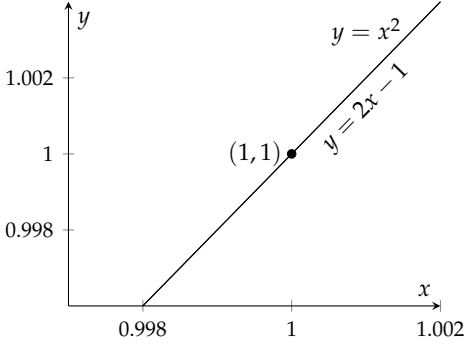
ہے۔یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

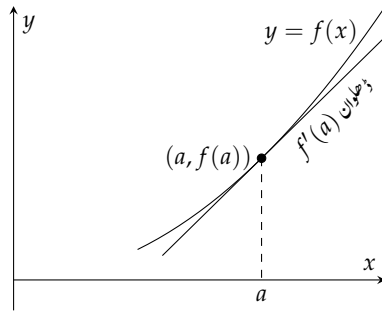
کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔

---

[21] linearization

(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1,1)$ پر مماس

(ب) نقطہ $(1,1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب ہیں

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

شکل 4.128: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

شکل 4.129: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ہو گا

تعریف:
اگر $x=a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a) \tag{4.15}$$

نقطہ a پر f کی **خط بندی**[22] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x)\approx L(x)$$

نقطہ a پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[23] ہے۔ نقطہ $x=a$ اس تخمین کا **وسط**[24] ہے۔

□

مثال 4.40: $x=0$ پر $f(x)=\sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔
حل: ہم $a=0$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

لیتے ہوئے $f(0)=1$ اور $f'(0)=\frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

$$L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{x}{2}$$

ہو گا۔ شکل 4.130-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔
□

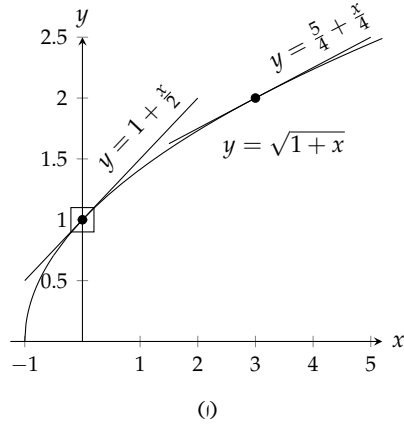
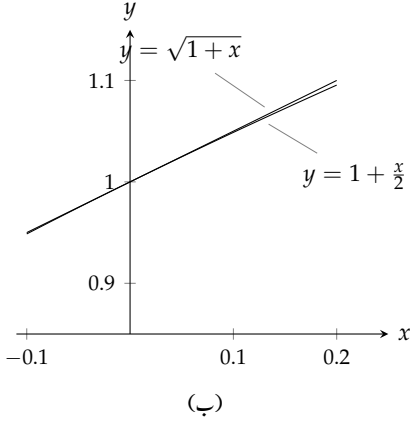
تخمین $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}$ (شکل 4.130-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2}\approx 1+\frac{0.2}{2}=1.10$$ 2 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{0.05}{2}=1.025$$ 3 اعشاریہ درست

$$\sqrt{1.005}\approx 1+\frac{0.005}{2}=1.00250$$ 5 اعشاریہ درست

---

[22] linearization
[23] standard linear approximation
[24] center

شکل 4.130: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

ان حساب سے اس غلط فہمی میں مبطلا مت ہونا کہ خط بندی استعمال کرتے ہوئے جو بھی کرنا ممکن ہو، کیلکولیٹر کا استعمال اس سے بہتر ہو گا۔ حقیقت میں ہم کبھی بھی خط بندی سے جذر تلاش نہیں کریں گے۔ خط بندی کی افادیت اس حقیقت میں ہے کہ وقفہ دلچسپی پر ہم پیچیدہ کلیہ کی جگہ سادہ کلیہ استعمال کر پاتے ہیں۔ اگر ہمیں 0 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے $\sqrt{1+x}$ کے ساتھ کام کرنا ہو اور ہم معمولی خلل کو برداشت کر سکتے ہوں تب بہتر ہو گا کہ اس کی بجائے ہم $1 + \frac{x}{2}$ کے ساتھ کام کریں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا کرنے سے کتنا خلل پیدا ہو گا۔ ایسے خلل پر باب 9 میں غور کیا جائے گا۔

وسط سے دور خط بندی میں خلل نا قابل نظر انداز ہو گا۔یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ آپ کو $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہو گی۔

مثال 4.41: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔

حل: ہم $a = 3$ پر مساوات 4.15 کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\bigg|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

ہے لہٰذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

ہو گا (شکل 4.130-ا)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے $0.000\,61$ ہٹ کر ہے۔

اگر ہم مثال 4.40 میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

حاصل ہو گا جس میں $25\,\%$ خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 4.42: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے (سوال 4.424)۔

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad x \approx 0; \text{کوئی عدد ہے } k \tag{4.16}$$

$x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ □

مساوات 4.16 سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} && k = \frac{1}{2}\\
\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x && k = -1\\
\sqrt[3]{1+5x^4} &= (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 && k = \frac{1}{3}\\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\tfrac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} && k = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x\\
\cos x &\approx 1\\
\tan x &\approx x
\end{aligned}$$

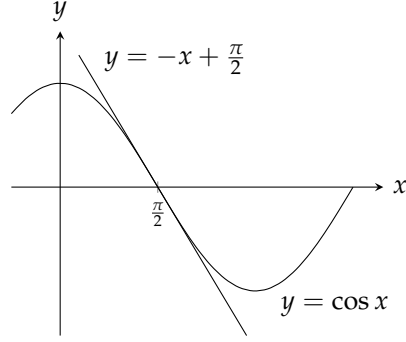
مثال 4.43: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔

حل: درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل 4.131)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

□

شکل 4.131: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

تفرقات

تعریف:
فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ **تفرق** $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ **تفرق** $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

عموماً تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہو گی۔ البتہ تعریف میں ہم $\mathrm{d}x$ پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

مثال 4.44: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔
حل:

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

□

اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہو گا۔

بعض اوقات ہم $\mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x$ کی بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا **تفرق** کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔

تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

حاصل ہو گی۔ چند تفرقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

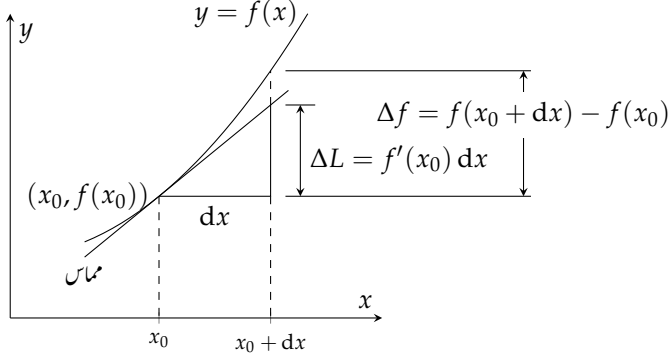
$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}c = 0, && \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v,\\
&\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\tfrac{u}{v}) = \tfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, && \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u,\\
&\mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u,\\
&\mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, && \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

مثال 4.45:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\tan 2x) &= \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x\\
\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) &= \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

□

تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہٰذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

شکل 4.132: چھوٹے $\mathrm{d}x$ کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہو گی۔

شکل 4.132 میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0)\\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)}\\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

تفرق $\mathrm{d}x$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ ہو گا یعنی خط بندی میں تبدیل $\mathrm{d}f = \Delta L$ کے برابر ہو گی۔ **تفرقی تبدیلی کی اندازاً قیمت**
فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

مثال 4.46: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے ہوئے اس کے رقبہ S میں تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔
حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

جدول 4.1: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

ہو گی۔ حقیقی تبدیل درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

□

مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی

x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول 4.1 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 4.47: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

□

مثال 4.48: زمین کا سطحی رقبہ
زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\mathrm{km}$ ہے۔ زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟
حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی بنا S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\mathrm{km}^2$$

□

مثال 4.49: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟
حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم اس عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

پر کرتے ہیں۔یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \implies |\mathrm{d}r| \leq \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رداس میں خلل اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

مثال 4.50: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاسٹی[25])

جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ 1830 کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہو گا؟
حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4} = 4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہو گی۔ □

---

[25] angioplasty

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال 4.51: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟
حل: مساوات $\mathrm{d}s = 9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s = 9.8(2)(0.1) = 1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s = 9.8(5)(0.1) = 4.9\,\mathrm{m}$$

□

تخمین $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\ \mathrm{d} &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ} \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{خلل تخمین} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\ &= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ در حقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}$$

اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا (جسے جاننے کے لئے ہمیں باب 9 کا انتظار کرنا ہو گا) یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{4.17}$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات (مساوات 4.17) کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

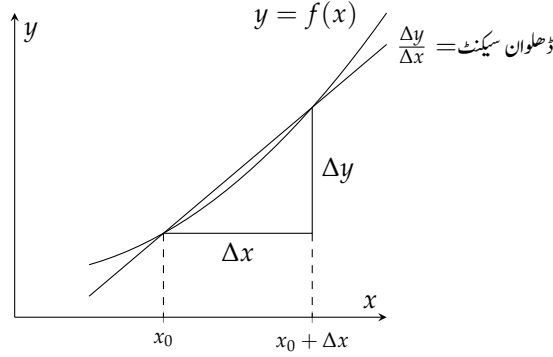
زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ 3.5 میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ آئیں مساوات 4.17 کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل 4.133 میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ہو گا لہٰذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

شکل 4.133: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

مساوات 4.17 کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1 \Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2 \Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$

ہو گا جہاں $\Delta u \to 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے لہٰذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

کمیت کا توانائی میں تبادل

نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$

کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}(\tfrac{v^2}{c^2})$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0[1 + \frac{1}{2}(\tfrac{v^2}{c^2})] = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\tfrac{1}{c^2})$$

یعنی

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0v^2(\tfrac{1}{c^2}) \tag{4.18}$$

ہو گا۔ مساوات 4.18 رفتار کی بنا کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2}m_0v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات 4.18 کو

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2$$

لکھیں تب

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی}) \tag{4.19}$$

ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات 4.19 میں $c = 3 \times 10^8 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,\Delta m$$

توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times 10^7 \,\mathrm{kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی[26]) کے دھماکہ کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

[26] TNT, trinitrotoluene

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 4.405 تا سوال 4.410 میں $x=a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال 4.405: $f(x)=x^4, \quad x=1$

سوال 4.406: $f(x)=x^{-1}, \quad x=2$

سوال 4.407: $f(x)=x^3-x, \quad x=1$

سوال 4.408: $f(x)=x^3-2x+3, \quad x=2$

سوال 4.409: $f(x)=\sqrt{x}, \quad x=4$

سوال 4.410: $f(x)=\sqrt{x^2+9}, \quad x=-4$

آپ سوال 4.411 تا سوال 4.416 میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال 4.411: $f(x)=x^2+2x, \quad x_0=0.1$

سوال 4.412: $f(x)=x^{-1}, \quad x_0=0.6$

سوال 4.413: $f(x)=2x^2+4x-3, \quad x_0=-0.9$

سوال 4.414: $f(x)=1+x, \quad x_0=8.1$

سوال 4.415: $f(x)=\sqrt[3]{x}, \quad x_0=8.5$

سوال 4.416: $f(x)=\frac{x}{x+1}, \quad x_0=1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال 4.417 تا سوال 4.420 میں $x=a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 4.417: $f(x)=\sin x, \quad x=0,\, x=\pi$

سوال 4.418: $f(x)=\cos x, \quad x=0,\, x=-\frac{\pi}{2}$

سوال 4.419: $f(x)=\sec x, \quad x=0,\, x=-\frac{\pi}{3}$

سوال 4.420: $f(x)=\tan x, \quad x=0,\, x=\frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$

سوال 4.421: x کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کریں۔

ا. $f(x) = (1+x)^2$ ج. $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ھ. $h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}}$

ب. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$ د. $g(x) = (1-x)^6$ و. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

سوال 4.422: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1+kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

ا. $(1.0002)^{50}$ ب. $\sqrt[3]{1.009}$

سوال 4.423: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال 4.424: ہم طاقتی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم باب 7 میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x = 0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1+kx$ ہے۔

تفرقات

سوال 4.425 تا سوال 4.436 میں $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

سوال 4.425: $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

سوال 4.426: $y = x\sqrt{1-x^2}$

سوال 4.427: $y = \frac{2x}{1+x^2}$

سوال 4.428: $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

سوال 4.429: $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

سوال 4.430: $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

سوال 4.431: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال 4.432: $y = \cos(x^2)$

سوال 4.433: $y = 4\tan(\frac{x^3}{3})$

سوال 4.434: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال 4.435: $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال 4.436: $y = 2\cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین

سوال 4.437 تا سوال 4.442 میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہونے کی بنا تفاعل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل 4.132)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

ج. خلل تخمین $\left|\Delta f - \mathrm{d}f\right|$

سوال 4.437: $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 4.438: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3,\ x_0 = -1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 4.439: $f(x) = x^3 - x,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 4.440: $f(x) = x^4,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 4.441: $f(x) = x^{-1},\ x_0 = 0.5,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال 4.442: $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 2,\ \mathrm{d}x = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال 4.443 تا سوال 4.448 میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال 4.443: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے۔

سوال 4.444: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتی ہے۔

سوال 4.445: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتا ہے۔

سوال 4.446: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال 4.447: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + \mathrm{d}r$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال 4.448: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi rh$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + \mathrm{d}h$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال 4.449: ایک دائرے کا رداس $2\,\mathrm{m}$ سے بڑھ کر $2.02\,\mathrm{m}$ ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 4.450: ایک درخت کا قطر $30\,\mathrm{cm}$ تھا۔اگلے سال اس کا محیط $2\,\mathrm{cm}$ بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال 4.451: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی $10\,\mathrm{cm}$ ہے جس میں $1\,\%$ خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال 4.452: ایک چکور کے رقبہ میں $2\,\%$ سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 4.453: ایک کرہ کا قطر $100 \mp 1\,\mathrm{cm}$ ناپا جاتا ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 4.454: ایک کرہ کے حجم میں $3\,\%$ تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال 4.455: ایک قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔اس کے حجم میں $1\,\%$ خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال 4.456: ایک قائمہ ٹینکی کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے۔اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں $1\,\%$ کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال 4.457: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق $\mathrm{d}r$ قابل قبول ہو گا تا کہ اس کی کمیت میں فرق اصل کمیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال 4.458: خون کے بہاو میں $50\,\%$ اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال 4.50 میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال 4.459: دکھائیں کہ مثال 4.51 میں t میں $5\,\%$ خلل کی بنا s میں $10\,\%$ خلل پیدا ہو گا۔

سوال 4.460: دل پر خلائی مشق کے اثرات
اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباو خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V ، δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = a + \frac{b}{g} \qquad (a, b \text{ مستقل}) \tag{4.20}$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی $\mathrm{d}g$ اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی $\mathrm{d}g$ کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔چاند پر $g = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور زمین پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہیں۔مساوات 4.20 سے $\mathrm{d}W_{\text{چاند}}$ اور $\mathrm{d}W_{\text{زمین}}$ کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال 4.461: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $\mathrm{d}H = 3x^2\,\mathrm{d}x$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

سوال 4.462: گھڑیال کی لٹکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت برقرار رکھا جاتا ہے۔ لٹکن کا دوری عرصہ T لٹکن کی لمبائی L اور کروی اسراع g پر منحصر ہے۔یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیلی کی بنا T میں معمولی تبدیلی پیدا ہو گی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے $\mathrm{d}T$ کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال کم وقت یا زیادہ وقت دے گا؟

ج. $100\,\mathrm{cm}$ لٹکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی بنا دوری عرصہ $\Delta T = 0.001\,\mathrm{s}$ بڑھ جاتا ہے۔ $\mathrm{d}g$ حاصل کرتے ہوئے نئے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 4.463: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \to 0$ کرنے سے بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال 4.464: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $x \to 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال 4.465: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.466: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نما نظر آتا ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کی ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر اس سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کی ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 4.467: نقاط تصریف پر خط بندی۔ جیسا شکل 4.131 سے واضح ہے، نقاط تصریف پر خط بندی بالخصوص بہتر بیٹھتی ہے۔اس کی وضاحت سوال 9.549 میں کی جائے گی۔ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کی ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال 4.468: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔ (خط بندی استعمال کرنے کی وجہ۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور $g(x) = m(x - a) + c$ ایک خطی تفاعل ہے جہاں m اور c مستقل ہیں۔ اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ کی بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ حاصل ہو گا۔

ا. $E(a) = 0$ $\quad x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے

ب. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ $\quad x - a$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال 4.469: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔ آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{}$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال 4.470: گزشتہ سوال کو 2 کی بجائے 0.5 کے لئے دہرائیں۔ اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 4.471 تا سوال 4.474 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کی بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔ درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $\left|f(x) - L(x)\right|$ ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔

ھ. جزو-د کی ترسیم سے $0 < \delta$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں جو $|x - a| < \delta \implies \left|f(x) - L(x)\right| < \epsilon$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں۔ $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینی δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال 4.471: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

سوال 4.472: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad [-\frac{3}{4}, 1], \quad a = \frac{1}{2}$

سوال 4.473: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x - 2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

سوال 4.474: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$

4.8 ترکیب نیوٹن

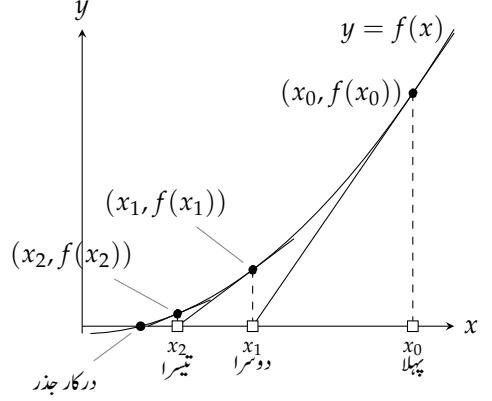
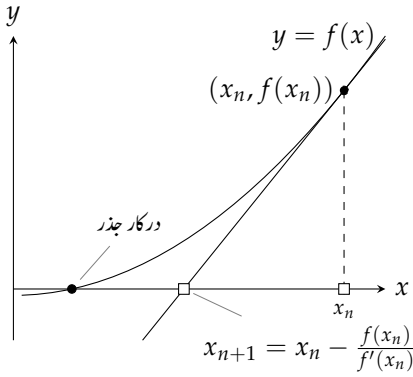
ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری ایبل ($1802 - 1829$) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا ہے۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے حل کی تخمین حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینی قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتا ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے۔ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم با قدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتا ہے۔ x_0 پر f کا مماس x محور کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل 4.134)۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جا سکتا ہے۔یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل کے مماس کو تفاعل کا تخمین لیتے ہوئے مماس اور x محور کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ x_1 عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تفاعل کا مماس x محور کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ x_2 عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔اسی طرح قدم با قدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

شکل 4.134: ترکیب نیوٹن ابتدائی قیاس x_0 سے شروع ہو کر (موزوں صورت میں) بتدریج بہتر جواب دیتی ہے۔

شکل 4.135: x_n سے منحنی تک جا کر مماس کے ساتھ چلتے ہوئے x_{n+1} تک پہنچتے ہیں۔

ہم یک بعد دیگرے تخمینی قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمین x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{4.21}$$

جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گا جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات 4.21 میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے نقطہ قطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad \implies x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے (شکل 4.135)۔

ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل

ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمین سے دوسری تخمین، دوسری تخمین سے تیسری تخمین، وغیرہ، حاصل کریں

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0) \tag{4.22}$$

جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x)=x^2-2=0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

مثال 4.52: مساوات $f(x)=x^2-2=0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔
حل: $f(x)=x^2-2$ اور $f'(x)=2x$ لیتے ہوئے مساوات 4.22 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-2}{2x_n}$$

کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=x_n-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\\&=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\end{aligned}$$

ہم $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$$

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	خلل	درست ہندسوں کی تعداد
$x_0=1$	-0.41421	1
$x_1=1.5$	0.08579	1
$x_2=1.41667$	0.00246	3
$x_3=1.41422$	0.00001	5

□

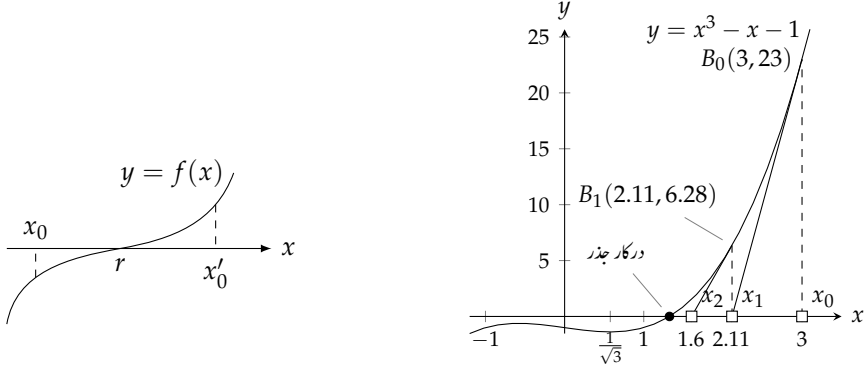
چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکوزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) لہٰذا عموماً کیلکولیٹر جذر کا حصول ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔اگر درج بالا جدول میں 5 کی بجائے 13 اعشاریہ درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ درست حاصل ہوتی۔

مثال 4.53: اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جس پر منحنی $y=x^3-x$ افقی خط $y=1$ کو قطع کرتی ہے۔
حل: منحنی اس خط کو اس نقطے پر قطع کرتی ہے جہاں $x^3-x=1$ یعنی $x^3-x-1=0$ ہو۔کہاں $f(x)=x^3-x-1$ صفر ہو گا؟ شکل 4.136 میں ترسیم کا ایک جذر $x=1$ اور $x=2$ کے بیچ دیکھا جا سکتا ہے۔ہم $x_0=1$ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن کو f پر لاگو کرتے ہیں۔ نتائج جدول 4.2 اور شکل 4.137 میں دیے گئے ہیں۔ □

جدول 4.2: ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^3 - x - 1$ پر ترکیب نیوٹن کی اطلاق کے نتائج۔

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.347 826 087
2	1.347 826 087	0.100 682 173	4.449 905 482	1.325 200 399
3	1.325 200 399	0.002 058 362	4.268 468 293	1.324 718 174
4	1.324 718 174	0.000 000 924	4.264 634 722	1.324 717 957
5	1.324 717 957	-1.0437×10^{-9}	4.264 632 997	1.324 717 957

شکل 4.136: منحنی $f(x) = x^3 - x - 1$ محور x کو $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔

شکل 4.137: جدول 4.2 کی پہلی تین قیمتیں۔

شکل 4.138: جذر حاصل کرنے کی خاطر $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ x_0 سے شروع کیا جا سکتا ہے۔

شکل 4.139: جذر r کے دونوں اطراف ابتدائی نقطہ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن r کو مرکوز ہو گا۔

جیسا شکل 4.138 میں دکھایا گیا ہے ہم $B_0(3, 23)$ کو ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے تھے جہاں $x_0 = 3$ ہو گا۔ اگرچہ B_0 افقی محور سے بہت دور ہے لیکن $x_0 = 3$ پر منحنی کا مماس افقی محور کو $x_1 = 2.11$ پر قطع کرتا ہے جو x_0 سے بہتر نقطہ ہے۔ اب $f(x) = x^3 - x - 1$ اور $f'(x) = 3x^2 - 1$ لیتے ہوئے پہلے کی طرح مساوات 4.22 کی بار بار استعمال سے چھٹے قدم پر 9 اعشاریہ جواب $x_6 = x_5 = 1.324\,717\,957$ حاصل ہو گا۔

شکل 4.138 میں منحنی کا مقامی زیادہ سے زیادہ $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور مقامی کم سے کم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر پایا جاتا ہے۔ اگر ہم ان نقطوں کے بیچ ابتدائی نقطہ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن استعمال کریں تب ہمیں اچھے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ البتہ ہم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ سے شروع کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا بہتر نہیں ہو گا لیکن ہم B_0 سے بھی زیادہ دور، مثلاً $x_0 = 10$ کو، ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ یوں زیادہ قدموں کے بعد اصل جواب حاصل ہو گا۔

ارتکاز عموماً یقینی ہو گا

ترکیب نیوٹن بہت تیزی سے مرکوز ہوتا ہے، لیکن چونکہ مرکوزیت لازمی نہیں ہوتی لہٰذا یہ دیکھنا لازمی ہو گا کہ آیا ترکیب مرتکز ہے یا نہیں۔ مرکوزیت یقینی بنانے کی خاطر ہم تفاعل ترسیم کر کے موزوں ابتدائی نقطہ x_0 منتخب کر سکتے ہیں۔ صفر کے قریب ہونے کو $|f(x_n)|$ کی قیمت سے دیکھا جا سکتا ہے جبکہ مرکوزیت کو $|x_n - x_{n+1}|$ سے پرکھا جا سکتا ہے۔

اس زمرے میں نظریہ بھی کچھ مدد مہیا کرتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جذر r پر وقفہ (جس میں r پایا جاتا ہو) میں تمام x

کے لئے

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \tag{4.23}$$

کی صورت میں اس وقفہ کے اندر کسی بھی ابتدائی نقطہ x_0 کے لئے ترکیب مرتکز ہو گی۔حقیقتاً اس مسئلے کا اطلاق مشکل ثابت ہوتا ہے لہٰذا $f(x_n)$ اور $|x_n - x_{n+1}|$ کی قیمتوں سے مرکوزیت دیکھی جاتی ہے۔

عدم مساوات 4.23 مرکوزیت کے لئے **کافی** نا کہ لازمی شرط ہے۔ایسی مثالیں پائی جاتی ہیں جہاں جذر r پر ایسا کوئی وقفہ نہیں پایا جاتا ہے جس پر عدم مساوات 4.23 مطمئن ہوتی ہو لیکن ترکیب نیوٹن مرتکز ہوتی ہے۔ ایسے تمام وقفے پر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو گی جس میں x_0 اور درکار جذر کے بیچ وقفے پر منحنی $y = f(x)$ محور x کی طرف محدب (جھکا) ہو (شکل 4.139)۔

سازگار حالات میں ترکیب نیوٹن کی جذر r کو ارتکاز کی رفتار درج ذیل اعلٰی احصاء کا کلیہ دیتا ہے

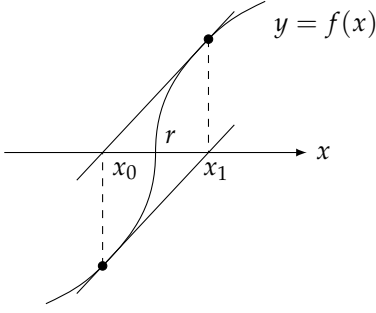
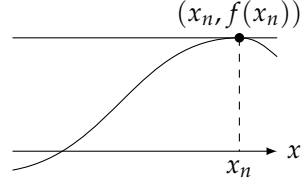
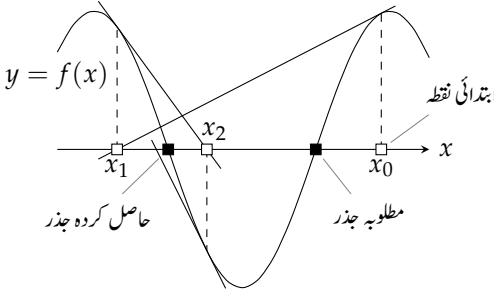
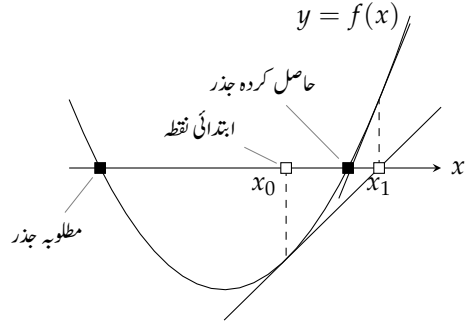
$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{e_{n+1}\text{خلل}} \leq \frac{|f''|_{\text{زیادہ سے زیادہ}}}{|f'|_{\text{کم سے کم}}}|x_n - r|^2 = c \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{e_n\text{خلل}} \tag{4.24}$$

جہاں c مستقل ہے، اور زیادہ سے زیادہ قیمت اور کم سے کم قیمت r پر وقفہ میں پائی جاتی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں ہیں۔ درج بالا کلیہ کہتا ہے کہ قدم $n + 1$ میں خلل کی قیمت قدم n میں خلل کی قیمت کے مربع ضرب مستقل سے زیادہ نہیں ہو گی۔ اس بات کی گہرائی سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ $c \leq 1$ ہے اور $|x_n - r| < 10^{-3}$ ہے تب $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ ہو گا۔یوں ایک ہی قدم میں درستگی 3 اعشاریہ سے 6 اعشاریہ ہو گئی ہے۔ عدم مساوات 4.23 اور عدم مساوات 4.24 میں ہم فرض کرتے ہیں کہ f "اچھا" تفاعل ہے۔ عدم مساوات 4.24 میں اس سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کا r پر واحد ایک جذر پایا جاتا ہو لہٰذا $f'(r) \neq 0$ ہو گا۔ اگر r پر ایک سے زیادہ جذر پائے جاتے ہوں تب ارتکاز کی رفتار کم ہو سکتی ہے۔

لیکن چیزیں غلطی کی طرف جا سکتی ہیں

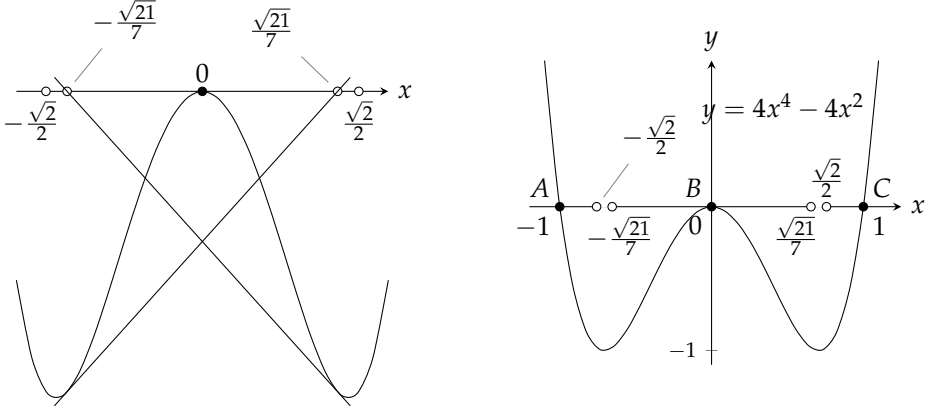
اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب x_n پر منحنی کا مماس x محور کو قطع نہیں کرے گا لہٰذا x_{n+1} نا قابل معلوم ہو گا اور ترکیب نیوٹن رک جائے گا (شکل 4.140)۔ ایسی صورت میں نئے ابتدائی نقطہ سے شروع کریں۔ اب عین ممکن ہے کہ f اور f' دونوں کا مشترک جذر پایا جاتا ہو۔یہ جاننے کے لئے کہ آیا ایسا ہے آپ $f'(x) = 0$ کا حل تلاش کر کے ان قیمتوں پر f کی قیمتیں دیکھ سکتے ہیں یا f اور f' کو ایک ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔

ترکیب نیوٹن بعض اوقات غیر مرتکز ہوتا ہے۔مثال کے طور پر

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

شکل 4.141: ترکیب نیوٹن کی عدم مرکوزیت۔

شکل 4.140: اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب نقطہ قطع نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا ترکیب نیوٹن رک جاتی ہے اور x_{n+1} نا قابل معلوم ہو گا۔

شکل 4.142: ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو سکتا ہے۔

جس کو شکل 4.141 میں دکھایا گیا ہے لیتے ہیں۔ اگر ہم $x_0 = r - h$ سے شروع کریں تب $x_1 = r + h$ ہو گا اور ہر قدم پر یہی دو قیمتیں دہرائی جاتی ہیں۔ ہم جتنے قدم بھی لیں، حاصل تخمین ابتدائی قیاس سے زیادہ بہتر نہیں ہو گا۔

اگر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ جذر پر مرکوز ہو گا۔ حقیقت میں عموماً ایسا ہی ہو گا البتہ بعض اوقات یہ کسی ایسے نقطے پر مرکوز ہو گا جہاں کوئی جذر نہ پایا جائے گا۔ ہماری خوش قسمتی سے ایسے مواقع بہت کم پائے جاتے ہیں۔

بعض اوقات آپ ایک جذر کو تلاش کرنا چاہیں گے جبکہ ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو گا۔ شکل 4.142 میں ایسے دو مثالیں دی گئی ہیں۔

ایسی صورت میں، کمپیوٹر پر تفاعل کی ترسیم یا احصاء کے تراکیب استعمال کرتے ہوئے درکار جذر کے قریب ابتدائی نقطہ تلاش کرتے ہوئے حل کریں۔ امید کی جاتی ہے کہ اس سے مسئلہ حل ہو جائے گا۔

شکل 4.143: ترکیب نیوٹن ابتری کا شکار ہے۔

ترکیب نیوٹن میں ابتری

ترکیب نیوٹن سے جذر کا حصول ابتری کا شکار ہو سکتا ہے یعنی کئی مساوات کے لئے حاصل جذر کی قیمت ابتدائی نقطے کی مقام کو بہت حساس ہو گی۔

مساوات $4x^4 - 4x^2 = 0$ ایسی ایک مثال ہے جس کو شکل 4.143 میں دکھایا گیا ہے۔ وقفہ $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$ اور $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ میں ابتدائی نقطہ منتخب کرنے سے بالترتیب جذر A ، B اور C ملتا ہے۔ نقطے $x = \mp\frac{\sqrt{21}}{7}$ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ نقطوں کے ایسے لامتناہی کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر A کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان وقفوں کے بیچ، نقطوں کے ایسے کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر C کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان کھلے وقفوں کے آخری سر (جن کی تعداد لا متناہی ہے) کوئی جذر نہیں دیتے ہیں بلکہ یہ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔ یہی عمل وقفہ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{7})$ میں بھی پایا جاتا ہے۔

$\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ (یا $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) کے بیچ ابتری کی بہترین مثال دیکھنے کو ملتی ہے۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ تک دائیں سے پہنچتے ہوئے ان نقطوں کے بیچ فرق کرنا مشکل ہو جاتا ہے جو جذر A اور جذر C دیتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ کے ایک ہی طرف رہتے ہوئے انتہائی قریب قریب ایسے نقطے پائے جاتے ہیں جن سے حاصل جذر ایک دوسرے سے بہت دور پائے جاتے ہیں۔

سوالات

حصول جذر

سوال 4.475: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے مساوات $x^2 + x - 1 = 0$ کا حل حاصل کریں۔ اب $x_0 = 1$ لیتے ہوئے دوسرا حل تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔
جواب: $x_2 = \frac{13}{21}, -\frac{4}{3}$

سوال 4.476: $x_0 = 0$ لیتے ہوئے $x^3 + 3x + 1 = 0$ کا ایک حقیقی حل ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ اس کے بعد x_2 تلاش کریں۔

سوال 4.477: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے تفاعل $f(x) = x^4 + x - 3$ کا بایاں صفر اور $x_0 = 1$ لیتے ہوئے اس کا دایاں صفر تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔
جواب: $x_2 = \frac{5763}{4945}, -\frac{51}{31}$

سوال 4.478: تفاعل $f(x) = 2x - x^2 + 1$ کے دونوں جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے بائیں ہاتھ صفر اور $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے دائیں ہاتھ صفر حاصل کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال 4.479: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل ترکیب نیوٹن سے کرتے ہوئے 2 کا مثبت چوتھا جذر تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟
جواب: $x_2 = \frac{2387}{2000}$

سوال 4.480: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل کرتے ہوئے 2 کا منفی چوتھا جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = -1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال 4.481: x کی کس قیمت پر $\cos x = 2x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔
جواب: $x \approx 0.45$

سوال 4.482: x کی کس قیمت پر $\cos x = -x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال 4.483: متوسط قیمت مسئلہ (صفحہ 171) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $f(x) = x^3 + 2x - 4$ کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس جذر کو ترکیب نیوٹن کی مدد سے 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: 1.17951

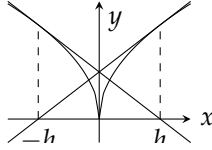
سوال 4.484: π کی قیمت کا تخمینہ مساوات $\tan x = 0$ کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ $x_0 = 3$ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے، کیلکولیٹر کی استعمال کے ساتھ، π کی قیمت جتنے اعشاریہ درستگی تک ممکن ہو حاصل کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال 4.485: فرض کریں آپ کا منتخب کردہ ابتدائی نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہوتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f'(x_0)$ معین اور غیر صفر ہے۔ ایسی صورت میں x_1 اور دیگر تخمین کیا حاصل ہوں گے؟

سوال 4.486: آپ $\frac{\pi}{2}$ کی قیمت 5 اعشاریہ درست ترکیب نیوٹن سے $\cos x = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ کیا ابتدائی نقطہ کی کوئی اہمیت ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 4.487: ارتعاش۔ اگر $h > 0$ ہو تب ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x_0 = h$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل تفاعل کے لئے $x_1 = -h$ حاصل ہو گا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

شکل 4.144: ترسیم برائے سوال 4.487

اور $x_0 = -h$ منتخب کرنے سے $x_1 = h$ حاصل ہو گا۔اس مسئلے کی ترسیم کھینچ کر اس عمل کی وضاحت کریں۔
جواب: شکل 4.144

سوال 4.488: بگڑتی ہوئی تخمین تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے x_1 ، x_2 ، x_3 اور x_4 تلاش کریں۔ $|x_n|$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ $n \to \infty$ کرنے سے $|x_n|$ کو کیا ہو گا؟ تصویر کشی کر کے وضاحت کریں۔

سوال 4.489: سمجھائیں کہ درج ذیل چار فقرے ایک ہی معلومات پوچھ رہی ہیں۔

ا. تفاعل $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کا جذر تلاش کریں۔

ب. منحنی $y = x^3$ اور خط $y = 3x + 1$ کی نقطہ تقاطع کا x محدد تلاش کریں۔

ج. منحنی $y = x^3 - 3x$ جہاں $y = 1$ کو قطع کرتی ہے اس نقطے کا x محدد تلاش کریں۔

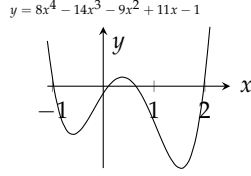
د. x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + 5$ کا تفرق صفر ہو گا۔

جواب: چاروں فقرے جزو-الف کا جذر تلاش کرنے کو کہتے ہیں۔

سوال 4.490: ایک سیارے کا مقام تلاش کرنے کی خاطر ہمیں $x = 1 + 0.5\sin x$ حل کرنا ہو گا۔ تفاعل $f(x) = x - 1 - 0.5\sin x$ کو ترسیم کرتے ہوئے ایک جذر $x = 1.5$ کے قریب حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطہ سے شروع کرتے ہوئے بہتر حل x_1 تلاش کریں۔(5 اعشاریہ درست حل $x = 1.49870$ ہے۔)

سوال 4.491:

ا. ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے دو منفی جذر 5 اعشاریہ درست تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2.5 \leq x \leq -2$ پر $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیم کو جذر کے قریب بڑا کرتے ہوئے جذر کو 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔

شکل 4.145: ترسیم برائے سوال 4.497

ج. تفاعل $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x + 5$ کو ترسیم کریں۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے x کی 5 اعشاریہ درست وہ قیمت تلاش کریں جہاں ترسیم کا مماس افقی ہو۔

جواب: $-1.532\,09, \ -0.347\,30$

سوال 4.492: ترسیم $y = \tan x$ خط $y = 2x$ کو $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔ ترکیب نیوٹن سے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔
جواب: $1.165\,561\,185\,207\,211$

سوال 4.493: ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ کے دو حقیقی جذر تلاش کریں۔
جواب: $0.630\,115\,396\,163\,843\,2, \ 2.573\,271\,963\,535\,193$

سوال 4.494: $\sin 3x = 0.99 - x^2$ کے کتنے حل ہوں گے؟ ترکیب نیوٹن سے ان حل کو تلاش کریں۔
جواب: $0.350\,035\,015, \ -1.026\,173\,161\,530\,1$

سوال 4.495: کیا $\cos 3x$ کبھی x کو قطع کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔
جواب: $0.390\,040\,316\,667\,547$

سوال 4.496: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ کے چار حقیقی صفر تلاش کریں۔
جواب: $\mp 1.306\,562\,964\,876\,4, \mp 0.541\,196\,100\,146\,19$

سوال 4.497: تجزی $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ میں r_1، r_2، r_3 اور r_4 تلاش کریں (شکل 4.145)۔
جواب: $-0.976\,823\,589, \ 0.100\,363\,332, \ 0.642\,746\,671, \ 1.983\,713\,87$

باب 5

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل درست کلیات، بذریعہ یک بعد دیگرے تخمین، دریافت کرتے ہیں۔ ان دونوں اعمال کو تکمل کہتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق تمام ریاضیات میں اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے۔ لیبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس تعلق کو دریافت کیا۔

5.1 غیر قطعی تکملات

کسی جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے اس کے مستقبل کے مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کے دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ہم احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لئے درکار رفتار یا تابکار مادہ کی موجودہ عملیت اور شرح تابکاری تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگا سکتے ہیں۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعل حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ ان تفاعل کو f کے الٹ تفرقات کہتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے اس کو f کا غیر قطعی تکمل کہتے ہیں۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے الٹ تفرقات میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام الٹ تفرقات حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے پہلا اور دوسرا ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک الٹ تفرق سے اس کے تمام الٹ تفرقات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

الٹ تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمل

تعریف: تفاعل $f(x)$ کا الٹ تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

f کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا **غیر قطعی تکمل**[1] ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

علامت $\int$ کو **علامت تکمل** کہتے ہیں۔ تفاعل f کو **متکمل**[2] اور x کو **تکمل کا متغیر**[3] کہتے ہیں۔

□

مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) کے دوسرے ضمنی نتیجہ کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ الٹ تفرق F اور اس کے کسی دوسرے الٹ تفرق میں صرف مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکملی علامتیت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{5.1}$$

مستقل C کو **تکمل کا مستقل**[4] یا **اختیاری مستقل**[5] کہتے ہیں۔ ہم مساوات 5.1 کو یوں پڑھتے ہیں: "x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ ہے۔" $F(x) + C$ کے حصول کو f کے **تکمل** کا حصول کہتے ہیں۔

مثال 5.1: $\int 2x\,\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

حل:

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$$

$2x$ کا الٹ تفرق x^2 ہے اور C تکمل کا مستقل ہے۔کلیہ $x^2 + C$ تفاعل $2x$ کے تمام تفرقات دیتا ہے۔یوں $x^2 + 1$، $x^2 - \pi$ اور $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ الٹ تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

ہم عموماً تفرق کے کلیات سے الٹ تفرقات کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔جدول 5.1 میں غیر قطعی تکملات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے۔

مثال 5.2:

---

[1] indefinite integral
[2] integrand
[3] variable of integration
[4] constant of integration
[5] arbitrary constant

جدول 5.1: تکمل کے کلیات

	غیر قطعی تکمل	تفرقی کلیات کو الٹ لکھا گیا ہے
1.	$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ n$ ناطق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$
	$\int \mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C$ (خصوصی صورت)	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$
2.	$\int \sin kx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{\cos kx}{k}) = \sin kx$
3.	$\int \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin kx}{k}) = \cos kx$
4.	$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$
5.	$\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cot x) = \csc^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$
7.	$\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\csc x) = \csc x \cot x$

ا. جدول 5.1 کے کلیہ 1 میں $n = 5$ لیتے ہوئے:

$$\int x^5 \,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$$

ب. کلیہ 1 میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

ج. کلیہ 2 میں $k = 2$ لیتے ہوئے:

$$\int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

د. کلیہ 3 میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے:

$$\int \cos\frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} + C = 2\sin\frac{x}{2} + C$$

□

بعض اوقات کلیہ تکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں ہے۔ کلیہ کا تفرق متکمل ہو گا۔

مثال 5.3: درج ذیل کی بنا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x + \cos x + C) = x\cos x + \sin x - \sin x + 0 = x\cos x$$

درج ذیل ہو گا۔

$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

□

اس مثال میں تکمل کا کلیہ اخذ کرنا جلد سکھایا جائے گا۔

جدول 5.2: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ: (k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. منفی کے لئے قاعدہ: (قاعدہ 1 میں $k=-1$ لیا گیا ہے۔)	$\int -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x) \mp g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

الٹ تفرقات کے قواعد

ہم الٹ تفرقات کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق کا نفی ہو۔

ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f \mp g$ کا الٹ تفرق ہو گا جب یہ f کے الٹ تفرق اور g کے الٹ تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

ان حقائق کو تکملی علامتیت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول 5.2)۔

مثال 5.4: تکمل کا مستقل

$$\begin{aligned}
\int 5\sec x\tan x\,\mathrm{d}x &= 5\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x && \text{جدول 5.2، قاعدہ 1}\\
&= 5(\sec x + C) && \text{جدول 5.1، کلیہ 6}\\
&= 5\sec x + 5C && \text{غیر قطعی الٹ تفرق کی پہلی صورت}\\
&= 5\sec x + C' && \text{مستقل } 5C \text{ کو مستقل } C' \text{ لکھا گیا ہے}\\
&= 5\sec x + C && C' \text{ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب } C \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}
\end{aligned}$$

□

اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (') لکھا گیا ہے۔

مثال 5.4 میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی الٹ تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہٰذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int 5 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = 5 \sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرق کا قاعدہ ہمیں اجزاء کو علیحدہ علیحدہ تفرق کی اجازت دیتا ہے، اسی طرح مجموعہ اور فرق کا تکملی قاعدہ ہمیں اجزاء کا علیحدہ علیحدہ تکمل لینے کی اجازت دیتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم انفرادی مستقل تکمل کا مجموعہ یا فرق کو ایک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 5.5: جزو در جزو تکمل۔
درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x$$

اگر ہم دیکھ کر بتلا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{الٹ تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم الٹ تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قاعدہ سے جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3\end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلوں کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جس کو C لکھا جا سکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کی بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5) \, \mathrm{d}x &= \int x^2 \, \mathrm{d}x - \int 2x \, \mathrm{d}x + \int 5 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکملات

بعض اوقات جن تکملات کا حصول ہم نہیں جانتے کو تکونیاتی تماثل کی مدد سے ان تکملات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکمل عموماً استعمال میں درپیش آتے ہیں۔ آئیں تماثل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال 5.6:

ا.

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C$$
$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

ب.

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

□

سوالات

الٹ تفرق کا حصول

سوال 5.1 تا سوال 5.18 میں دیے ہر تفاعل کا الٹ تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد کے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال 5.1: (ا) $2x$، (ب) x^2، (ج) x^2-2x+1

جواب: (ا) x^2، (ب) $\frac{x^3}{3}$، (ج) $\frac{x^3}{3}-x^2+x$

سوال 5.2: (ا) $6x$ ، (ب) x^7 ، (ج) $x^7 - 6x + 8$

سوال 5.3: (ا) $-3x^{-4}$ ، (ب) x^{-4} ، (ج) $x^{-4} + 2x + 3$
جواب: (ا) x^{-3} ، (ب) $-\frac{1}{3}x^{-3}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

سوال 5.4: (ا) $2x^{-3}$ ، (ب) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$ ، (ج) $-x^{-3} + x - 1$

سوال 5.5: (ا) $\frac{1}{x^2}$ ، (ب) $\frac{5}{x^2}$ ، (ج) $2 - \frac{5}{x^2}$
جواب: (ا) $-\frac{1}{x}$ ، (ب) $-\frac{5}{x}$ ، (ج) $2x + \frac{5}{x}$

سوال 5.6: (ا) $-\frac{2}{x^3}$ ، (ب) $\frac{1}{2x^3}$ ، (ج) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

سوال 5.7: (ا) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ، (ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ، (ج) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
جواب: (ا) $\sqrt{x^3}$ ، (ب) $\sqrt{x}$ ، (ج) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

سوال 5.8: (ا) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ، (ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$ ، (ج) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

سوال 5.9: (ا) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ، (ب) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
جواب: (ا) $x^{2/3}$ ، (ب) $x^{1/3}$ ، (ج) $x^{-1/3}$

سوال 5.10: (ا) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ ، (ب) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$ ، (ج) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

سوال 5.11: (ا) $-\pi \sin \pi x$ ، (ب) $3 \sin x$ ، (ج) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$
جواب: (ا) $\cos(\pi x)$ ، (ب) $-3 \cos x$ ، (ج) $-\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) + \cos(3x)$

سوال 5.12: (ا) $\pi \cos \pi x$ ، (ب) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ ، (ج) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

سوال 5.13: (ا) $\sec^2 x$ ، (ب) $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ ، (ج) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$
جواب: (ا) $\tan x$ ، (ب) $2 \tan(\frac{x}{3})$ ، (ج) $-\frac{2}{3} \tan(\frac{3x}{2})$

سوال 5.14: (ا) $\csc^2 x$ ، (ب) $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$ ، (ج) $1 - 8 \csc^2 2x$

سوال 5.15: (ا) $\csc x \cot x$ ، (ب) $-\csc 5x \cot 5x$ ، (ج) $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$
جواب: (ا) $-\csc x$ ، (ب) $\frac{1}{5} \csc(5x)$ ، (ج) $2 \csc(\frac{\pi x}{2})$

سوال 5.16: (ا) $\sec x \tan x$ ، (ب) $4 \sec 3x \tan 3x$ ، (ج) $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال 5.17: $(\sin x - \cos x)^2$
جواب: $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

سوال 5.18: $(1 + 2\cos x)^2$

تکمل کا حصول

سوال 5.19 تا سوال 5.58 میں تکمل حاصل کریں۔ تکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 5.19: $\int (x+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{2} + x + C$

سوال 5.20: $\int (5-6x)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.21: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$
جواب: $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

سوال 5.22: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3)\,\mathrm{d}t$

سوال 5.23: $(2x^3 - 5x + 7)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

سوال 5.24: $\int (1 - x^2 - 3x^5)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.25: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

سوال 5.26: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.27: $\int x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

سوال 5.28: $\int x^{-\frac{5}{4}}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.29: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

سوال 5.30: $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$

سوال 5.31: $\int \left(8y-\frac{2}{y^{1/4}}\right) \mathrm{d}y$
جواب: $4y^2-\frac{8}{3}y^{3/4}+C$

سوال 5.32: $\int \left(\frac{1}{7}-\frac{1}{y^{5/4}}\right) \mathrm{d}y$

سوال 5.33: $\int 2x(1-x^{-3}) \mathrm{d}x$
جواب: $x^2+\frac{2}{x}+C$

سوال 5.34: $\int x^{-3}(x+1) \mathrm{d}x$

سوال 5.35: $\int \frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2} \mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{t}}+C$

سوال 5.36: $\int \frac{4+\sqrt{t}}{t^3} \mathrm{d}t$

سوال 5.37: $\int (-2\cos t) \mathrm{d}t$
جواب: $-2\sin t+C$

سوال 5.38: $\int (-5\sin t) \mathrm{d}t$

سوال 5.39: $7\sin\frac{\theta}{3} \mathrm{d}\theta$
جواب: $-21\cos\frac{\theta}{3}+C$

سوال 5.40: $\int 3\cos 5\theta \mathrm{d}\theta$

سوال 5.41: $\int (-3\csc^2 x) \mathrm{d}x$
جواب: $3\cot x+C$

سوال 5.42: $\int \left(-\frac{\sec^2 x}{3}\right) \mathrm{d}x$

سوال 5.43: $\int \frac{\csc\theta\cot\theta}{2} \mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{1}{2}\csc\theta+C$

سوال 5.44: $\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta \mathrm{d}\theta$

سوال 5.45: $\int (4\sec x \tan x - 2\sec^2 x)\, dx$
جواب: $4\sec x - 2\tan x + C$

سوال 5.46: $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x \cot x)\, dx$

سوال 5.47: $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\, dx$
جواب: $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

سوال 5.48: $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\, dx$

سوال 5.49: $\int 4\sin^2 y\, dy$
جواب: $2y - \sin 2y + C$

سوال 5.50: $\int \frac{\cos^2 y}{7}\, dy$

سوال 5.51: $\int \frac{1+\cos 4t}{2}\, dt$
جواب: $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

سوال 5.52: $\int \frac{1-\cos 6t}{2}\, dt$

سوال 5.53: $\int (1+\tan^2\theta)\, d\theta$ اشارہ۔ $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$
جواب: $\tan\theta + C$

سوال 5.54: $\int (2+\tan^2\theta)\, d\theta$

سوال 5.55: $\int \cot^2 x\, dx$
جواب: $-\cot x - x + C$

سوال 5.56: $\int (1-\cot^2 x)\, dx$

سوال 5.57: $\int \cos\theta(\tan\theta + \sec\theta)\, d\theta$
جواب: $-\cos\theta + \theta + C$

سوال 5.58: $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta - \sin\theta}\, d\theta$

تکملی کلیہ کی تصدیق

سوال 5.59 تا سوال 5.64 میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفرق کریں۔ ہم حصہ 5.3 میں دیکھیں گے کہ ایسے کلیات کہاں سے آتے ہیں۔

سوال 5.59: $\int (7x-2)^3 \, dx = \frac{(7x-2)^4}{28} + C$

سوال 5.60: $\int (3x+5)^{-2} \, dx = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3} + C$

سوال 5.61: $\int \sec^2(5x-1) \, dx = \frac{1}{5} \tan(5x-1) + C$

سوال 5.62: $\int \csc^2(\frac{x-1}{3}) \, dx = -3\cot(\frac{x-1}{3}) + C$

سوال 5.63: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = -\frac{1}{x+1} + C$

سوال 5.64: $\int \frac{1}{(x+1)^2} \, dx = \frac{x}{x+1} + C$

سوال 5.65: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$$

ب۔ $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + C$$

ج۔ $$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 5.66: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{\sec^3\theta}{3} + C$$

ب۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \tan^2\theta + C$$

ج۔ $$\int \tan\theta \sec^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sec^2\theta$$

سوال 5.67: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int (2x+1)^2 \, dx = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$$

ب۔ $$\int 3(2x+1)^2 \, dx = (2x+1)^3 + C$$

ج۔ $$\int 6(2x+1)^2 \, dx = (2x+1)^3 + C$$

جواب: (ا) غلط، (ب) غلط، (ج) درست

سوال 5.68: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+C}$

ب۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}+C$

ج۔ $\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3+C$

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.69: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)$$

درج ذیل تلاش کریں۔

ا۔ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

ب۔ $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

ج۔ $\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

د۔ $\int [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ہ۔ $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

و۔ $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ز۔ $\int [x+f(x)]\,\mathrm{d}x$

ح۔ $\int [g(x)-4]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) $-\sqrt{x}+C$، (ب) $x+C$، (ج) $\sqrt{x}+C$، (د) $-x+C$، (ہ) $x-\sqrt{x}+C$، (و) $-x-\sqrt{x}+C$، (ز) $\frac{x^2}{2}-\sqrt{x}+C$، (ح) $-3x+C$

سوال 5.70: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال 5.69 دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x, \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x)$$

5.2 تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی تکمل میں سے مخصوص الٹ تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لئے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل صورت کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو **تفرقی مساوات**[6] کہلاتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔اس کو **ابتدائی قیمت مسئلہ**[7] کہتے ہیں۔ جیسا مثال 5.7 میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدموں میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال 5.7: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول

سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

اگر جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

حل: ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$v(0)0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t = 0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v = 0$ ہے جس کو مختصراً $v(0) = 0$ لکھا جاتا ہے۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int 9.8\,\mathrm{d}t \qquad t \text{ کے لحاظ سے تکمل}$$
$$v + C_1 = 9.8t + C_2 \qquad \text{تکمل کا نتیجہ}$$
$$v = 9.8t + C \qquad \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں}$$

---
[6] differential equation
[7] initial value problem

آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نا معلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
v &= 9.8t + C \\
0 &= 9.8(0) + C && v(0) = 0 \\
C &= 0
\end{aligned}
$$

یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t \,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

□

تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$ تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ کا **عمومی حل**[8] $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا **مخصوص حل**[9] تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھا جاتا ہے۔

مثال 5.8: ایک نقطہ اور ڈھلوان سے منحنی کا حصول

ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

حل: ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 3x^2 && \text{منحنی کی ڈھلوان} \\
y(1) &= -1 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}
$$

ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 3x^2 \\
\int \frac{dy}{dx}\,dx &= \int 3x^2\,dx \\
y &= x^3 + C && \text{تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے}
\end{aligned}
$$

---

[8] general solution
[9] particular solution

شکل 5.1: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال 5.8

شکل 5.2: تصویر کشی برائے مثال 5.9

عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لئے شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پر کر کے نا معلوم مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^3 + C \\ -1 &= (1)^3 + C \\ C &= -2 \end{aligned}$$

عمومی حل میں C پر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل 5.1 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

□

اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ تکمل لینا ہو گا۔ پہلا تکمل

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + C$$

تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا تکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال 5.9: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول
زمین سے $3\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر $160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع پیدا کرتا ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو بطور t کا تفاعل تلاش کریں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل: اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل 5.2) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دو گنا قابل تفرق تفاعل ہے لہٰذا جسم کی رفتار اور اسراع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

چونکہ ہمارے ریاضی نمونہ میں اسراع گھٹتے ہوئے s کے رخ عمل کرتی ہے لہٰذا ہمارا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ہم تفرقی مساوات کو t کے لحاظ سے تکمل کر کے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + C_1$$

ہم پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$160 = -9.8(0) + C_1 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160$$

$$C_1 = 160$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا تکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8t + 160)\,\mathrm{d}t$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

ہم دوسری ابتدائی معلومات پر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$3 = -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2$$

$$C_2 = 3$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لمحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,\mathrm{m}$$

□

یک رتبی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال 5.7 اور مثال 5.8 میں دیکھا گیا، جبکہ دو رتبی تفرق تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال 5.9 میں دیکھا گیا۔ اسی طرح تین رتبی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہو گی۔ ہر بار الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے ابتدائی قیمت درکار ہو گی۔

منحنی حل کا خاکہ

تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو **منحنی حل**[10] یا **منحنی تکمل**[11] کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ کے حل $y = x^3 + C$ کو شکل 5.1 میں دکھایا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا الٹ تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

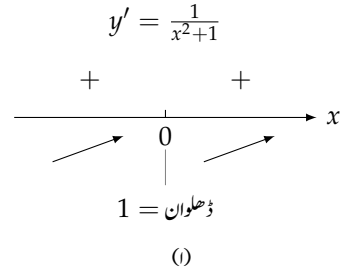
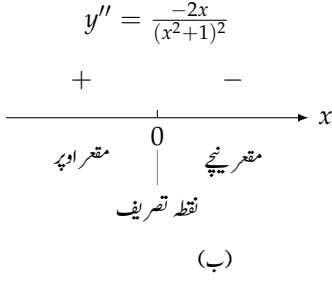
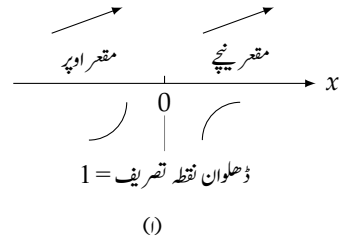
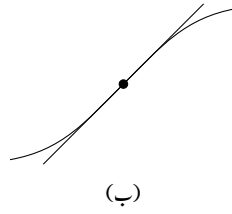
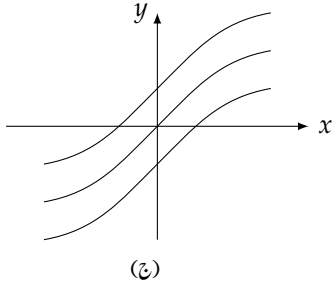
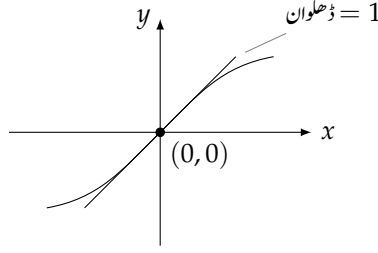
مثال 5.10: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

حل: پہلا قدم: y' اور y'': منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ 4.4)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2+1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق y'' دیتا ہے:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

دوسرا قدم: اتار چڑھاو۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔چونکہ $y' > 0$ ہے لہٰذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے (شکل 5.3-ا)۔

تیسرا قدم: مقعر۔ دوگنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے گا (شکل 5.3-ب)۔

شکل 5.3: منحنی کی اتار چڑھاو اور مقعر (مثال 5.10)

شکل 5.4: منحنی کی عمومی صورت (مثال 5.10)

شکل 5.5: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال 5.11)

چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کی جھکاو شکل 5.4-ا اور اس کی عمومی صورت شکل 5.4-ب میں دکھائی گئی ہے۔

پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x\to\mp\infty} y' = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

یوں $x \to \mp\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔

پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کی ڈھلوان 1 ہے لہٰذا y محور کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل 5.4-ج۔ □

مثال 5.11: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$y(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل: ہم نے مثال 5.10 میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل 5.4-ج میں دکھایا گیا ہے۔ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0,0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کی درکار مخصوص حل ہے جس کو شکل 5.5 میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے الٹ تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے، جیسا کہ آپ باب 7 میں دیکھیں گے، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ کا الٹ تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+x^4}$ کو ہم ترسیمی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

solution curve[10]
integral curve[11]

ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہوتا ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کا گرنا یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کا سکڑنا) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اس کے اہم خصوصیات کو ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام وضح کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھے کرتے ہیں۔

متغیرات:
فاصلہ: s
وقت: t

ابتدائی قیمتیں:
لمحہ $t=0$ پر $s=0$ اور $v=0$ ہیں۔

فرض کیا گیا تعلق: $s=4.9t^2$

دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v=9.8t$$
$$a=9.8$$

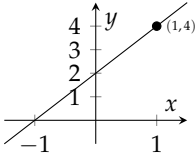
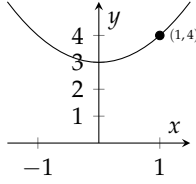
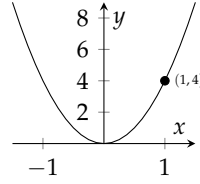
تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔یوں لمحہ t پر رفتار $9.8t$ میٹر فی سیکنڈ ہو گا جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کی اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گی۔

آخری قدم پر ہم آزادانہ گرنے والے جسم کی لمحاتی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

نقل اترنا بذریعہ کمپیوٹر

کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لئے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کہکشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لئے ہم ریاضی نمونہ کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سود مند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پل یا برقیاتی ادوار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کا **نقل اتارتے**[12] ہیں۔

---

[12] simulation

(ج)

(ب)

(ا)

شکل 5.6: ترسیمات برائے سوال 5.71

سوالات

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 5.71: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.6 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$
$$y(1) = 4$$

جواب: (ب)

سوال 5.72: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل 5.7 میں کون سی ترسیم پیش کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$$
$$y(-1) = 1$$

جواب: (ب)

سوال 5.73 تا سوال 5.92 میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

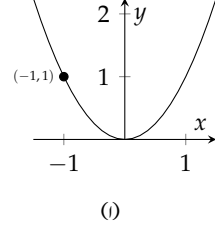
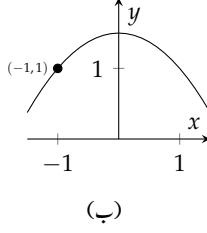
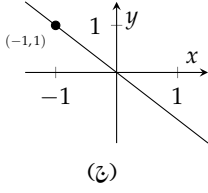
سوال 5.73: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

جواب: $y = x^2 - 7x + 10$

سوال 5.74: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

(ا)

(ب)

(ج)

شکل 5.7: ترسیمات برائے سوال 5.72

سوال 5.75: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}+x,\ x>0,\quad y(2)=1$
جواب: $y=-\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$

سوال 5.76: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=9x^2-4x+5,\quad y(-1)=0$

سوال 5.77: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^{-2/3},\quad y(-1)=-5$
جواب: $y=9x^{1/3}+4$

سوال 5.78: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad y(4)=0$

سوال 5.79: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1+\cos t,\quad s(0)=4$
جواب: $s=t+\sin t+4$

سوال 5.80: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\cos t+\sin t,\quad s(\pi)=1$

سوال 5.81: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\pi\sin\pi\theta,\quad r(0)=0$
جواب: $r=\cos(\pi\theta)-1$

سوال 5.82: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\cos\pi\theta,\quad r(0)=1$

سوال 5.83: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\sec t\tan t,\quad v(0)=1$
جواب: $v=\frac{1}{2}\sec t+\frac{1}{2}$

سوال 5.84: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=8t+\csc^2 t,\quad v(\frac{\pi}{2})=-7$

سوال 5.85: $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2-6x,\quad y'(0)=4,\ y(0)=1$
جواب: $y=x^2-x^3+4x+1$

سوال 5.86: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال 5.87: $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \frac{dr}{dt}\Big|_{t=1} = 1, \ r(1) = 1$
جواب: $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

سوال 5.88: $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{3t}{8}, \quad \frac{ds}{dt}\Big|_{t=4} = 3, \ s(4) = 4$

سوال 5.89: $\frac{d^3 y}{dx^3} = 6, \ y''(0) = -8, \ y'(0) = 0, \ y(0) = 5$
جواب: $y = x^3 - 4x^2 + 5$

سوال 5.90: $\frac{d^3 \theta}{dt^3} = 0, \ \theta''(0) = -2, \ \theta'(0) = -\frac{1}{2}, \ \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال 5.91: $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, \ y'''(0) = 7, \ y''(0) = y'(0) = -1, \ y(0) = 0$
جواب: $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

سوال 5.92: $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x, \ y'''(0) = 0, \ y''(0) = y'(0) = 1, \ y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا

سوال 5.93 تا سوال 5.96 میں رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ اور ابتدائی مقام دیے گیے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 5.93: $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$
جواب: $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

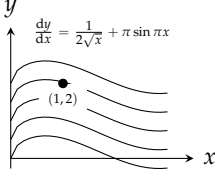
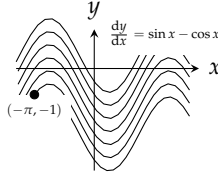
سوال 5.94: $v = 32t - 2, \quad s(1/2) = 4$

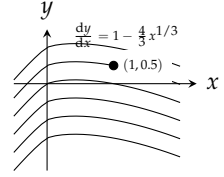
سوال 5.95: $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$
جواب: $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

سوال 5.96: $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

اسراع سے مقام کی تلاش

سوال 5.97 تا سوال 5.100 میں اسراع $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ ، ابتدائی رفتار اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال 5.97: $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$
جواب: $s = 16t^2 + 20t + 5$

شکل 5.8: منحنیات برائے سوال 5.103

شکل 5.9: منحنیات برائے سوال 5.104

شکل 5.10: منحنیات برائے سوال 5.105

شکل 5.11: منحنیات برائے سوال 5.106

سوال 5.98: $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

سوال 5.99: $a = -4\sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$
جواب: $s = \sin(2t) - 3$

سوال 5.100: $a = \frac{9}{\pi^2}\cos\frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

ترسیم کا حصول

سوال 5.101: ایسی ترسیم $y = f(x)$ تلاش کریں جو نقطہ $(9, 4)$ سے گزرتی ہو اور جس کی ڈھلوان $3\sqrt{x}$ ہو۔
جواب: $y = 2x^{3/2} - 50$

سوال 5.102: منحنی $y = f(x)$ نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم $\frac{d^2 y}{dx^2} = 6x$ کو مطمئن کرتی ہے۔ اس ترسیم کو تلاش کریں۔

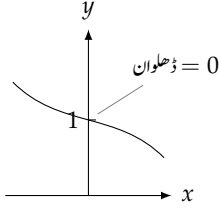
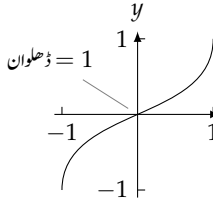
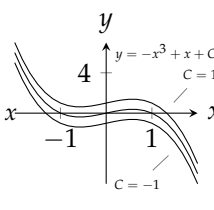
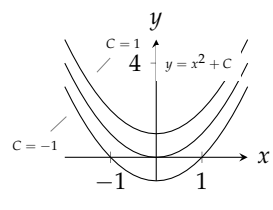
منحنیات حل (تکملی منحنیات)

سوال 5.103 تا سوال 5.106 میں منحنی حل دکھائے گئے ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 5.103: ترسیمات کو شکل 5.103 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

سوال 5.104: ترسیمات کو شکل 5.104 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5.105: ترسیمات کو شکل 5.105 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $y = -\sin x - \cos x - 2$

سوال 5.106: ترسیمات کو شکل 5.106 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 5.15 شکل 5.14 شکل 5.13 شکل 5.12

تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال 5.10 میں سکھایا گیا۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال 5.107 تا سوال 5.110 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کے خاکے بنائیں۔

سوال 5.107: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$
جواب: شکل 5.12

سوال 5.108: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x+2$

سوال 5.109: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-3x^2$
جواب: شکل 5.13

سوال 5.110: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$

سوال 5.111 تا سوال 5.114 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال 5.10 اور مثال 5.11 کی طرح بنائیں۔

سوال 5.111: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1;\quad y(0)=0$
جواب: شکل 5.14

سوال 5.112: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+x^4},\quad y(0)=1$

سوال 5.113: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2+1}-1,\quad y(0)=1$
جواب: شکل 5.15

سوال 5.114: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{x^2+1},\quad y(0)=0$

عملی استعمال

سوال 5.115: چاند پر ثقلی اسراع $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ایک پتھر کو چاند پر گہرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔اس کی رفتار اس لمحہ پر کیا

ہو گی جب یہ 30 سیکنڈ بعد شگاف کی تہہ تک پہنچتا ہے؟
جواب: $48\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 5.116: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ $20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کی اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال 5.117: $10\,\mathrm{m}$ بلندی سے پانی میں کھودا جاتا ہے۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہو گی؟ $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔
جواب: $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 5.118: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع $3.72\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے $93\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 5.119: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی کو روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی $75\,\mathrm{m}$ میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کی اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔
پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k \qquad k \text{ مستقل}$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 100, \quad s(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دوسرا قدم: t کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ حاصل ہو گا۔(آپ کے جواب میں k پایا جائے گا۔)
تیسرا قدم: k کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $s = 75$ حاصل ہوتا ہے۔
جواب: $t = \frac{100}{k},\ k = \frac{200}{3}\,\mathrm{km\,h^{-2}}$

سوال 5.120: موٹر سائکل پر با حفاظت صفر کے لئے لازمی ہے کہ آپ $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے $14\,\mathrm{m}$ میں رک سکیں۔ ایسا کرنے کے لئے کتنی اسراع درکار ہو گی؟

سوال 5.121: ایک ذرہ محوری لکیر پر $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 1$ پر $s = 0$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4$ ہیں۔ لمحہ t پر $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور s تلاش کریں۔
جواب: $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2},\ s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

سوال 5.122: چاند پر اپالو-15 پرواز کے داؤد سکاٹ نے پر اور ہتھوڑے کو تقریباً $1.25\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔ چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی بنا دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔ بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لئے درج ذیل

ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل s تلاش کریں جس کا آزاد متغیر t ہو۔ اس کے بعد t کی وہ قیمت تلاش کریں جو $s = 0$ دے۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\frac{ds}{dt}(0) = 0, \; s(0) = 1.25 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 5.123: محددی لکیر پر مستقل اسراع a سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام s کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.2}$$

جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار v_0 اور مقام s_0 ہیں۔ درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے اس مساوات کو اخذ کریں۔

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\frac{ds}{dt}(0) = v_0, \; s(0) = s_0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال 5.124: سیارہ کی سطح کے نزدیک آزادی کے ساتھ گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \tag{5.3}$$

جہاں ثقلی اسراع a، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی s_0 اور جسم کی ابتدائی رفتار v_0 ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی s کے الٹ) ہے لہذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب v_0 مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب v_0 منفی ہو گا۔

مساوات 5.2 استعمال کیے بغیر آپ مساوات 5.3 ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ اس مسئلے کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.3 کو حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.125: رفتار کی الٹ تفرق سے ہٹاو کا تعین۔

ا. فرض کریں محور s پر ایک جسم کی رفتار $\frac{ds}{dt} = v = 9.8t - 3$ ہے۔

1. اگر $t = 0$ پر $s = 5$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

2. اگر $t = 0$ پر $s = -2$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

3. اگر $t = 0$ پر $s = s_0$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔کیا یہ درست ہے کہ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا الٹ تفرق جانتے ہوئے دورانیہ $t = a$ تا $t = b$ کے لئے آپ جسم کا ہٹاو جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاو معلوم نہیں ہے؟ اپنے جوان کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (الف) $33.2\,\mathrm{m}$ ، $33.2\,\mathrm{m}$ ، $33.2\,\mathrm{m}$ ، (ب) درست

سوال 5.126: یکتائی حل

اگر قابل تفرق تفاعل $y = F(x)$ اور $y = G(x)$ وقفہ I پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل ہوں تب کیا I میں ہر x کے لئے $F(x) = G(x)$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.3 تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔زنجیری قاعدہ کاالٹ اطلاق

بعض اوقات انجانے تکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ تکمل کے حصول کا یہ ایک اہم ترین طریقہ ہے۔ آئیں اس ترکیب کو سمجھتے ہیں۔

عمومی طاقتی قاعدہ کی تکملی صورت

جب u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور n ناطق عدد ہو جس کی قیمت -1 نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اس مساوات کو ایک دوسری نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $u^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا ایک الٹ تفرق $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int \left(u^n \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ تفرقی روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n \,\mathrm{d}u$$

جہاں دونوں $\mathrm{d}x$ کو آپس میں کاٹا گیا ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$\int u^n \,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1,\ \text{ناطق } n) \tag{5.4}$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہے۔

مساوات 5.4 حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا ہے اور اس کی علامت اہم نہیں ہے۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً θ ، t ، y وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات 5.4 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ سکیں

$$\int u^n \,\mathrm{d}u, \qquad (n \neq -1)$$

جہاں u قابل تفرق تفاعل ہو اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرق ہو تب اس کا حل $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ہو گا۔

مثال 5.12: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 \,\mathrm{d}x$$

حل: ہم اس تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n \,\mathrm{d}u$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم $u = x + 2$ لیتے ہیں لہٰذا $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ ہو گا۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int (x+2)^5 \,\mathrm{d}x &= \int u^5 \,\mathrm{d}u && u = x+2,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{مساوات 5.4 میں } n = 5 \\
&= \frac{(x+2)^6}{6} + C && \text{واپس } u = x+2 \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.13: $u = x^2 + 2x - 3$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d} = 2(x+1)\,\mathrm{d}x$ اور $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = (x+1)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں تکمل

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1) \,\mathrm{d}x$$

کو ترکیب بدل سے حل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+2x-3)^2(x+1)\,\mathrm{d}x &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6}u^3 + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{6}(x^2+2x-3) + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

آخری قدم پر u کی قیمت واپس پر کی گئی ہے۔ □

مثال 5.14:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t &= \int u^4\,\mathrm{d}u && u = \sin t,\ \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{u^5}{5} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{\sin^5 t}{5} + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

□

ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے (سوال 5.173 اور سوال 5.174 کرنے کے بعد آپ کو اس بات کی سمجھ آئے گی) یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلا مثال دیکھیں)۔

مثال 5.15: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z\,\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

حل: ہم متکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے $u = z^2 + 1$ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}} && u = z^2+1,\ \mathrm{d}u = 2z\,\mathrm{d}z \\
&= \int u^{-1/3}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{3/2} + C && \text{کا بدل } z^2+1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مثال 5.16:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y\,\mathrm{d}y &= \int u^{1/2}\,\mathrm{d}u && u = 1+y^2,\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C && \text{کی جگہ } 1+y^2 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مثال 5.17:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1}\,\mathrm{d}t &= \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}u && u = 4t-1,\ \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}t,\ \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C && \text{کی جگہ } 4t-1 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

تکونیاتی تفاعل

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $\sin u$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں $\sin u$ کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u = \cos u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin u$ مضرب $\cos u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا الٹ تفرق ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int \left(\cos u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \sin u + C$$

بائیں ہاتھ دونوں $\mathrm{d}x$ کو با ضابطہ کاٹ کر درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \cos u \,\mathrm{d}u = \sin u + C \tag{5.5}$$

مساوات 5.5 کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو $\int \cos u \,\mathrm{d}u$ روپ میں لکھ سکیں، ہم u کے لحاظ سے اس کا تکمل لیتے ہوئے $\sin u + C$ حاصل کریں گے۔

مثال 5.18:

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,\mathrm{d}\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u && u = 7\theta+5, \mathrm{d}u = 7\,\mathrm{d}\theta, \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{7}\int \cos u \,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{کے لحاظ سے تکمل } u\\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + C && \text{کی جگہ } 7\theta+5 \text{ پر کریں } u
\end{aligned}$$

□

مساوات 5.5 کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$\int \sin u \,\mathrm{d}u = -\cos u + C \tag{5.6}$$

مثال 5.19:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x^3)\cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u && u = x^3, \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(-\cos u + C') && \text{کے لحاظ سے تکمل } u \\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C && \text{اور } u = x^3 \text{ پر کریں } \frac{C'}{3} = C
\end{aligned}$$

□

قابل تفرق تفاعل u کے لئے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C \tag{5.7}$$

$$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C \tag{5.8}$$

$$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C \tag{5.9}$$

$$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C \tag{5.10}$$

ہر کلیہ میں u حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لئے دائیں ہاتھ کا u کے لحاظ تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل حاصل ہو گا۔

مثال 5.20:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \sec^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta && \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u && u = 2\theta, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \text{مساوات } 5.7 \\
&= \frac{1}{2}\tan 2\theta + C && u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پر کریں}
\end{aligned}$$

□

تکمل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(u)\,\mathrm{d}u && u=g(x),\ \mathrm{d}u=g'(x)\,\mathrm{d}x\\
&= F(u)+C && F(u)\ \text{کا الٹ تفرق}\ f(u)\\
&= F(g(x))+C && u\ \text{کی جگہ}\ g(x)\ \text{پر کریں}
\end{aligned}$$

یہ تین اقدام تکمل کا ترکیب بدل ہیں۔ یہ ترکیب اس لئے کام کرتی ہے کہ $f(g(x))\cdot g'(x)$ کا الٹ تفرق $F(g(x))$ ہے جہاں f کا الٹ تفرق F ہے:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) &= F'(g(x))\cdot g'(x) && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= f(g(x))\cdot g'(x) && \text{چونکہ}\ F'=f\ \text{ہے}
\end{aligned}$$

ترکیب بدل اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ ہم x کی جگہ u کا تفاعل لیتے ہیں۔ یوں بدل $u=g(x)$ کا حل ہونا لازم ہے تا کہ اس کو x کے لئے حل کرتے ہوئے x کی قیمت $x=g^{-1}(u)$ (u کا الٹ g) حاصل کی جا سکے۔ بعض اوقات ہمیں x اور u کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنی ہو گی تا کہ ایسا کرنا ممکن ہو۔ آپ کو یہاں اس سے غرض نہیں ہونا چاہیے۔ ہم الٹ تفاعل پر حصہ 7.1 میں بحث کریں گے اور بدل کی ترکیب پر زیادہ تفصیل سے حصہ 8.4 اور حصہ 14.7 میں غور کریں گے۔

سوالات

سوال 5.127 تا سوال 5.138 میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی تکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

سوال 5.127: $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x,\quad u=3x$

جواب: $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

سوال 5.128: $\int x\sin(2x^2)\,\mathrm{d}x,\quad u=2x^2$

سوال 5.129: $\int \sec 2t\tan 2t\,\mathrm{d}t,\quad u=2t$

جواب: $\frac{1}{2}\sec 2t+C$

سوال 5.130: $\int (1-\cos\frac{t}{2})^2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t,\quad u=1-\cos\frac{t}{2}$

سوال 5.131: $\int 28(7x-2)^{-5}\,\mathrm{d}x,\quad u=7x-2$

جواب: $-(7x-2)^{-4}+C$

سوال 5.132: $\int x^3(x^4-1)^2\,\mathrm{d}x,\quad u=x^4-1$

سوال 5.133: $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}}\,\mathrm{d}r, \quad u = 1 - r^3$
جواب: $-6(1-r^3)^{1/2} + C$

سوال 5.134: $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y)\,\mathrm{d}y, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

سوال 5.135: $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2} - 1)\,\mathrm{d}x, \quad u = x^{3/2} - 1$
جواب: $\frac{1}{3}(x^{3/2} - 1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2} - 2) + C$

سوال 5.136: $\int \frac{1}{x^2}\cos^2(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x, \quad u = -\frac{1}{x}$

سوال 5.137: $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$
جواب: $-\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C, \quad -\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C$

سوال 5.138: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x+8}$

سوال 5.139 تا سوال 5.172 میں تکمل حل کریں۔

سوال 5.139: $\int \sqrt{3 - 2s}\,\mathrm{d}s$
جواب: $-\frac{1}{3}(3 - 2s)^{3/2} + C$

سوال 5.140: $\int (2x + 1)^3\,\mathrm{d}x$

سوال 5.141: $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,\mathrm{d}s$
جواب: $\frac{2}{5}(5s + 4)^{1/2} + C$

سوال 5.142: $\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$

سوال 5.143: $\int \theta\sqrt[4]{1 - \theta^2}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{2}{5}(1 - \theta^2)^{5/4} + C$

سوال 5.144: $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2 - 1}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 5.145: $\int 3y\sqrt{7 - 3y^2}\,\mathrm{d}y$
جواب: $-\frac{1}{3}(7 - 3y^2)^{3/2} + C$

سوال 5.146: $\int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2+1}}$

سوال 5.147: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $(-\frac{2}{1+\sqrt{x}})+C$

سوال 5.148: $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.149: $\int \cos(3z+4)\,\mathrm{d}z$
جواب: $\frac{1}{3}\sin(3z+4)+C$

سوال 5.150: $\int \sin(8z-5)\,\mathrm{d}z$

سوال 5.151: $\int \sec^2(3x+2)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{3}\tan(3x+2)+C$

سوال 5.152: $\int \tan^2 x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

سوال 5.153: $\int \sin^5 \frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{2}\sin^6(\frac{x}{3})+C$

سوال 5.154: $\int \tan^7 \frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.155: $\int r^2(\frac{r^3}{18}-1)^5\,\mathrm{d}r$
جواب: $(\frac{r^3}{18}-1)^6+C$

سوال 5.156: $\int r^4(7-\frac{r^5}{10})^3\,\mathrm{d}r$

سوال 5.157: $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2}+1)+C$

سوال 5.158: $\int x^{1/3}\sin(x^{4/3}-8)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.159: $\int \sec(v+\frac{\pi}{2})\tan(v+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}v$
جواب: $\sec(v+\frac{\pi}{2})+C$

سوال 5.160: $\int \csc(\frac{v-\pi}{2})\cot(\frac{v-\pi}{2})\,\mathrm{d}v$

سوال 5.161: $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{2\cos(2t+1)} + C$

سوال 5.162: $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\,\mathrm{d}t$

سوال 5.163: $\int \sqrt{\cot y}\,\csc^2 y\,\mathrm{d}y$
جواب: $-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C$

سوال 5.164: $\int \frac{\sec z\tan z}{\sqrt{\sec z}}\,\mathrm{d}z$

سوال 5.165: $\int \frac{1}{t^2}\cos(\frac{1}{t}-1)\,\mathrm{d}t$
جواب: $-\sin(\frac{1}{t}-1) + C$

سوال 5.166: $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\,\mathrm{d}t$

سوال 5.167: $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\frac{\sin^2(\frac{1}{\theta})}{2} + C$

سوال 5.168: $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 5.169: $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)\,\mathrm{d}s$
جواب: $\frac{(s^3+2s^2-5s+5)^2}{2} + C$

سوال 5.170: $\int (\theta^4-2\theta^2+8\theta-2)(\theta^3-\theta+2)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 5.171: $\int t^3(1+t^4)^3\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{16}(1+t^4)^4 + C$

سوال 5.172: $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,\mathrm{d}x$

قدم با قدم تکمل کی سادہ روپ کا حصول

اگر آپ تکمل کی سادہ روپ کے لئے درکار بدل نہ جانتے ہوں تب تکمل کی سادہ روپ قدم با قدم تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ متکمل کو دیکھ کر اندازے سے بدل منتخب کرتے ہوئے متکمل کو کچھ سادہ بنائیں۔ اگلے قدم میں اس کو مزید سادہ بنانے کی کوشش کریں۔ بدل منتخب کرنے کی صلاحیت اس طرز کے سوالات حل کرنے سے بڑھتی ہے۔ اگلے دو سوالات حل کرنے سے آپ اس طریقے کو سمجھ پائیں گے۔

سوال 5.173:

$$\int \frac{18\tan^2 x\sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x$$

ا. $u = \tan x$ پر کر کے $v = u^3$ اور اس کے بعد $w = 2 + v$ پر کریں۔

ب. $u = \tan^3 x$ کے بعد $v = 2 + u$ پر کریں۔

ج. $u = 2 + \tan^3 x$ پر کریں۔

جواب: (الف) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ، (ب) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ، (ج) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$

سوال 5.174:

$$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\,\mathrm{d}x$$

ا. $u = x - 1$ پر کرنے کے بعد $v = \sin u$ اور اس کے بعد $w = 1 + v^2$ پر کریں۔

ب. $u = \sin(x-1)$ کے بعد $v = 1 + u^2$ پر کریں۔

ج. $u = 1 + \sin^2(x-1)$ پر کریں۔

اگلے دو تکملات حل کریں۔

سوال 5.175: $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,\mathrm{d}r$

جواب: $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r-1)^2+6} + C$

سوال 5.176: $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,\mathrm{d}\theta$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 5.177 تا سوال 5.184 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 5.177: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

جواب: $s = \frac{1}{2}(3t^2-1)^4 - 5$

سوال 5.178: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

سوال 5.179: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 8\sin^2(t + \frac{\pi}{12}), \quad s(0) = 8$

جواب: $s = 4t - 2\sin(2t + \frac{\pi}{6}) + 9$

سوال 5.180: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

سوال 5.181: $\frac{d^2 s}{dt^2} = -4\sin(2t - \frac{\pi}{2}), \quad s'(0) = 100,\ s(0) = 0$
جواب: $s = \sin(2t - \frac{\pi}{2}) + 100t + 1$

سوال 5.182: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4,\ y(0) = -1$

سوال 5.183: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار تمام t کے لئے $v = \frac{ds}{dt} = 6\sin 2t \,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر لمحہ 0 $t = 0$ پر $s = 0$ ہو تب $t = \frac{\pi}{2}$ سیکنڈ پر s کیا ہو گا؟
جواب: $6\,\mathrm{m}$

سوال 5.184: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی اسراع تمام t کے لئے $a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \pi^2 \cos \pi t \,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اگر لمحہ 0 $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب $t = 1$ سیکنڈ پر s کیا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.185: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ہم $2\sin x\cos x$ کا تکمل تین مختلف طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned}\int 2\sin x\cos x\,dx &= \int 2u\,du & u = \sin x\\ &= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int 2\sin x\cos x\,dx &= \int -2u\,du & u = \cos x\\ &= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\int 2\sin x\cos x\,dx &= \int \sin 2x\,dx & 2\sin x\cos x = \sin 2x\\ &= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3\end{aligned}$$

کیا تینوں طریقے درست ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5.186: $u = \tan x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

جبکہ $u = \sec x$ پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

کیا دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

5.4 اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ

اس حصہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح عملی سوالات ہمیں **متناہی مجموعہ**[13] سے تخمین کے حصول تک لے کر جاتے ہیں۔

رقبہ اور اخراج قلب

فی منٹ جتنے لٹر خون آپ کا قلب خارج کرتا ہے اس کو اخراج قلب کہتے ہیں۔ سکون کی حالت میں کسی شخص کا اخراج قلب 5 یا 6 لٹر فی منٹ ہو سکتا ہے۔ سخت ورزش کے دوران یہ شرح 30 لٹر فی منٹ ہو سکتی ہے۔ بیماری بھی اس شرح کو بہت زیادہ متاثر کر سکتی ہے۔

اخراج قلب کی پیائش کے لئے طبیب صفحہ 318 پر سوال 3.415 میں دیا گیا طریقہ اختیار کرنے کی بجائے رقت رنگ کی ترکیب استعمال کر سکتا ہے۔ رقت رنگ کی ترکیب میں قلب کے قریب مرکزی داخلی رگ میں $5\,\text{mg}$ سے $10\,\text{mg}$ رنگ کا ٹیکہ لگایا جاتا ہے جو قلب کے دائیں حصے میں داخل ہو کر کلیجا سے ہوتے ہوئے قلب کے بائیں حصہ سے مرکزی شریان میں خارج کیا جاتا ہے جہاں ہر چند سیکنڈ بعد گزرتے ہوئے خون میں رنگ کی کثافت ناپی جاتی ہے۔ جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک تندرست شخص جو آرام کر رہا ہو کے نتائج دکھائے گئے ہیں جس کو $5.6\,\text{mg}$ رنگ کا ٹیکہ لگایا گیا ہے۔ خون کی دوبارہ گردش کو مد نظر رکھتے ہوئے نتائج پیش کیے گئے ہیں۔

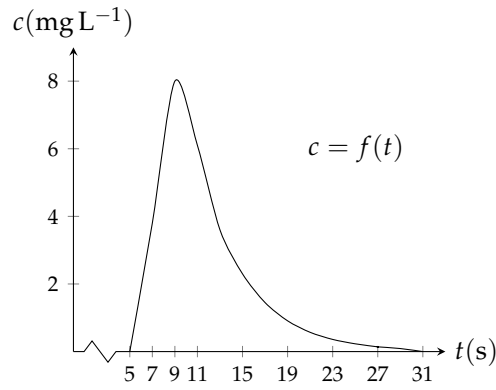
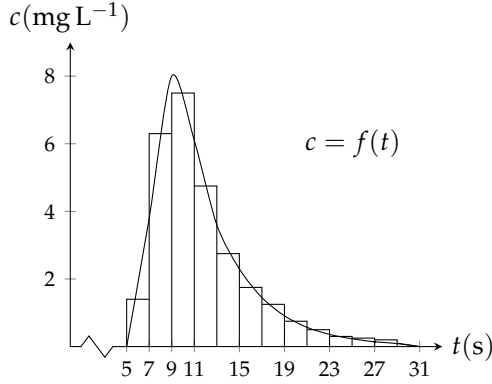
مریض کے قلب کا اخراج معلوم کرنے کی خاطر ہم رنگ کی مقدار کو شکل 5.16 میں دیے کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبے سے تقسیم کر کے 60 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\text{اخراج قلب} = \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{منحنی کے نیچے رقبہ}} \times 60 \qquad (5.11)$$

---

[13] finite sum

جدول 5.3: رقت رنگ کے ترکیب کے نتائج۔

لمحہ	کثافت رنگ	لمحہ	کثافت رنگ
5	0.0	19	0.91
7	3.8	21	0.57
9	8.0	23	0.36
11	6.1	25	0.23
13	3.6	27	0.14
15	2.3	29	0.09
17	1.45	31	0.00

شکل 5.16: جدول میں دی گئی رنگ کی کثافت بالمقابل وقت کو ترسیم کیا گیا ہے۔

شکل 5.17: منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیل رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

اس مساوات میں مختلف مقداروں کی اکائیوں پر نظر ڈال کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات درست جواب دے گی۔ رنگ کی مقدار mg میں ہے جبکہ منحنی کے نیچے رقبہ کی اکائی $\mathrm{mg\,L^{-1}} \times \mathrm{s}$ ہو گی لہٰذا درج بالا مساوات خون کا اخراج لٹر فی منٹ میں دے گا۔

$$\frac{\mathrm{mg}}{\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{s}} \cdot \frac{\text{سیکنڈ}}{\text{منٹ}} = \frac{\text{لٹر}}{\text{منٹ}}$$

درج ذیل مثال میں ہم شکل 5.16 میں دیے منحنی کے نیچے رقبہ کی تخمینی قیمت تلاش کرتے ہوئے مریض کا اخراج قلب معلوم کرتے ہیں۔

مثال 5.21: جدول 5.3 اور شکل 5.16 میں ایک مریض کے ترکیب رقت رنگ کے نتائج دیے گئے ہیں۔ اس کا اخراج قلب تلاش کریں۔

حل: رنگ کی مقدار $5.6\,\mathrm{mg}$ ہے لہٰذا ہمیں صرف منحنی کے نیچے رقبہ چاہیے۔ ہم رقبہ تلاش کرنے کا ایسا کوئی کلیہ نہیں جانتے ہیں جو اس قسم کی ناہموار منحنی کے لئے قابل استعمال ہو۔ البتہ ہم منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیلی حصوں میں تقسیم کر کے تمام مستطیلوں کے رقبے جمع کرتے ہوئے رقبے کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں (شکل 5.17)۔ ہر مستطیل کا کچھ حصہ اصل رقبے سے کم رقبہ گھیرتا ہے جبکہ اس کا باقی حصہ اصل رقبے سے زیادہ رقبہ گھیرتا ہے۔ ہم نے تمام مستطیلوں کی چوڑائی 2 منتخب کی ہے۔ ایسا کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ ہر مستطیل کی چوڑائی مختلف منتخب کی جا سکتی ہے۔ ہر مستطیل کا قد مستطیل کے چوڑائی کے دوران تفاعل کی تقریباً اوسط قیمت ہو گی۔ ہم تمام مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{منحنی کے نیچے رقبہ} &\approx f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 + f(10)\cdot 2 + \cdots + f(28)\cdot 2 + f(30)\cdot 2 \\
&\approx (1.4)(2) + (6.3)(2) + (7.5)(2) + \cdots + (0.1)(2) + (0.045)(2) \\
&\approx (28.8)(2) = 57.6\,\mathrm{mg\,s\,L^{-1}}
\end{aligned}$$

رنگ کی مقدار کو اس رقبہ سے تقسیم کرتے ہوئے 60 سے ضرب دینے سے اخراج قلب حاصل ہو گا۔

$$\text{اخراج قلب} \approx \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{رقبہ}} \times 60 = \frac{5.6}{57.6} \times 60 \approx 5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$$

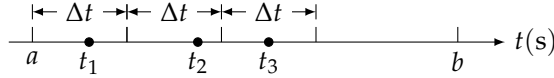
مریض کا اخراج قلب تقریباً $5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ □

طے شدہ فاصلہ

فرض کریں ہمیں ایک گاڑی کی رفتار تفاعل $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ معلوم ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقفہ $a \le t \le b$ یہ گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اگر ہمیں f کا الٹ تفرق F معلوم ہو تب ہم گاڑی کا مقام تفاعل $s = F(t) + C$ تلاش کر سکتے ہیں جس کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی دورانیے میں طے شدہ فاصل تلاش کیا جا سکتا ہے (سوال 5.125)۔

رفتار تفاعل $v = f(t)$ کا الٹ تفرق نہ جانتے ہوئے طے شدہ فاصلے کو مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے جس پر اب غور کرتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کو چھوٹے چھوٹے ذیلی وقفوں میں یوں تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ذیلی وقفے میں رفتار کی قیمت تقریباً غیر متغیر ہو۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دوران فاصلہ درج ذیل کلیہ سے اخذ کرتے ہوئے

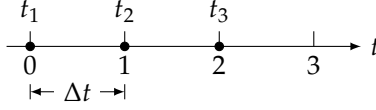
$$\text{فاصلہ} = \text{رفتار} \times \text{وقت} = f(t) \cdot \Delta t$$

وقفہ $[a, b]$ کے تمام ذیلی وقفوں میں طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ لیتے ہوئے کل فاصلہ دریافت کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ اس وقفہ کو درج ذیل ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جہاں ہر ذیلی وقفہ Δt کے برابر ہے۔

پہلے ذیلی وقفے پر t_1 ایک نقطہ ہے۔ اگر یہ ذیلی وقفہ نہایت چھوٹا ہو تب اس دوران رفتار میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اس دوران گاڑی تقریباً $f(t_1)\Delta t$ فاصلہ طے کرے گی۔ اگر t_2 دوسرے ذیلی وقفے میں ایک نقطہ ہو تب اس دوران گاڑی $f(t_2)\Delta t$ فاصل طے کرے گی۔ اسی طرح باقی تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصل بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں حاصل تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ تقریباً $[a, b]$ کے دوران کل طے فاصل D ہو گا۔ اگر ہم n عدد ذیلی وقفے لیں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

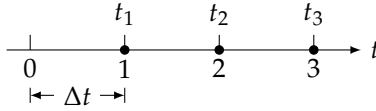
$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t \tag{5.12}$$

آئیں مثال 5.9 کے نتائج پر اس کلیہ کو استعمال کریں۔ ایک گولا کو سیدھا اوپر رخ پھینکا گیا۔ لمحہ t پر اس کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ تھی۔ ابتدائی 3 سیکنڈوں میں گولا $3\,\mathrm{m}$ کی ابتدائی بلندی سے $438.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک پہنچا۔ یوں ابتدائی تین سیکنڈوں میں گولے نے $438.9\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کیا۔

مثال 5.22: سیدھا اوپر رخ پھینکے گئے گولے کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ ہے۔ مجموعہ کا ترکیب استعمال کرتے ہوئے ابتدائی 3 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ کا تخمینہ لگائیں۔ بالکل ٹھیک جواب $435.9\,\mathrm{m}$ ہے۔

حل: ہم ذیلی وقفوں کی مختلف تعداد اور ذیلی وقفوں میں مختلف نقطوں کی انتخاب کے لئے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔
ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔

f کی قیمت 0 ، 1 اور 2 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t && \text{(5.12 مساوات)} \\ &\approx [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &\approx 450.6 \end{aligned}$$

ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔

f کی قیمت 1 ، 2 اور 3 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t && \text{(5.12 مساوات)} \\ &\approx [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &\approx 421.2 \end{aligned}$$

کل 6 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے پہلے بائیں اور بعد میں دائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\frac{1}{2}$ ہو گی۔ نتائج درج ذیل ہیں۔

بائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں	$D \approx 443.25$
دائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں	$D \approx 428.55$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 6 ذیلی وقفے لیتے ہوئے بہتر جواب حاصل ہوتے ہیں۔ مزید زیادہ ذیلی وقفے لینے سے جواب میں مزید بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جدول 5.4 میں چند نتائج دکھائے گئے ہیں۔

جدول 5.4 سے ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں سر نقطی مجموعہ اصل جواب تک اوپر سے پہنچتا ہے جبکہ دائیں سر نقطی مجموعہ اصل جواب تک نیچے سے پہنچتا ہے۔ حقیقت میں جواب ان دونوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جدول میں دیا آخری مجموعہ اور اصل جواب میں فرق درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{435.9 - 435.67}{435.9} \times 100 = 0.05\,\%$$

□

آپ مثال 5.21 اور مثال 5.22 میں مشابہت دیکھ سکتے ہیں۔ دونوں میں تفاعل f ایک بند وقفہ میں معین ہے جس کی وقفوں پر قیمت کو وقفہ سے ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ہم اسی ترکیب کو حجم کی تلاش کے لئے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

جدول 5.4: ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہوتا ہے (مثال 5.22)۔

ذیلی وقفوں کی تعداد	ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی	بائیں سر نقطی مجموعہ	دائیں سر نقطی مجموعہ
3	1	450.6	421.2
6	0.5	443.25	428.55
12	0.25	439.58	432.23
24	0.125	437.74	434.06
48	0.0625	436.82	434.98
96	0.03125	436.36	435.44
192	0.015625	436.13	435.67

حجم

درج ذیل دو مثالوں میں ہم متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کرتے ہیں۔

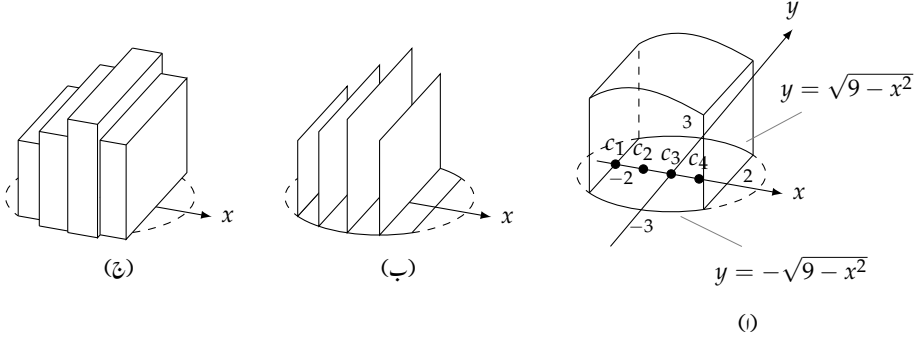
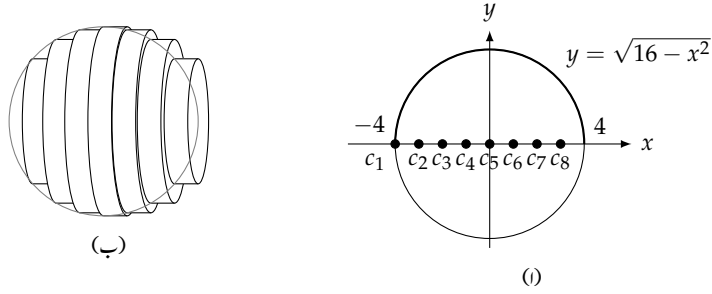
مثال 5.23: ایک ٹھوس جسم $x = \mp 2$ ، $y = \mp\sqrt{9-x^2}$ اور $z = \mp\sqrt{9-x^2}$ سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہیں۔ اس کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کریں (شکل 5.18-الف)۔

حل: ہم x محور پر وقفہ $[-2,2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطے پر جسم کا رقبہ عمودی تراش ایک چکور ہو گا (شکل 5.18-ب) جہاں ذیلی وقفوں کے بائیں سر $x = -2, -1, 0, 1$ پر پائے جاتے ہیں۔ہم ایسے ہر چکور پر فرضی 1 موٹائی کا تختہ بناتے ہیں (شکل 5.18-ج)۔ ان تمام تختوں کے حجم کا مجموعہ اندازاً اصل جسم کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

ایک تختے کا حجم ہم $H = Sh$ سے اخذ کر سکتے ہیں جہاں H ، S اور h بالترتیب تختے کا حجم، رقبہ عمودی تراش اور موٹائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ x پر تختے کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = (2\sqrt{9-x^2})^2 = 4(9-x^2)$ ہے جبکہ تختے کی موٹائی 1 ہے لہذا چار تختوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H_4 &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + S(x_4)\Delta x \\
&= 4(9-x_1^2)(1) + 4(9-x_2^2)(1) + 4(9-x_3^2)(1) + 4(9-x_4^2)(1) \\
&= 4[(9-(-2)^2]) + (9-(-1)^2) + (9-(0)^2) + (9-(1)^2)] \\
&= 4[(9-4) + (9-1) + (9-0) + (9-1)] \\
&= 4[36-6] = 120
\end{aligned}
$$

یہ جواب جسم کے اصل حجم $H = \frac{368}{3} \approx 122.67$ کے بہت نزدیک ہے (سوال 5.431)۔ جواب میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{|H - H_4|}{H} = \frac{\left|\frac{368}{3} - 120\right|}{\frac{368}{3}} \approx 2.2\,\%$$

شکل 5.18: ٹھوس جسم برائے مثال 5.23

شکل 5.19: نصف دائرہ $y = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ حاصل کیا جاتا ہے (مثال 5.24)۔

وقفہ $[-2, 2]$ پر ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے تختوں کی موٹائی کم ہو گی جبکہ حاصل حجم زیادہ درست ہو گا۔ □

مثال 5.24: ایک کرہ کا رداس 4 ہے (شکل 5.19-ا)۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم تفاعل $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ کو x محور کے گرد گما کر کرہ کی سطح حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم وقفہ $-4 \le x \le 4$ کو آٹھ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطے c_1 تا c_7 پر پائے جاتے ہیں (شکل 5.19-ا)۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر رقبہ کا بیلن جس کی لمبائی 1 ہو لیتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ ان تمام بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تقریباً کرہ کے حجم کے برابر ہو گا۔ ہر ایک بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا

جہاں بیلن کا رداس r اور اس کی لمبائی h ہے۔آٹھوں بیلنوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H_8 &= \pi[f(x_1)]^2\Delta x + \pi[f(x_2)]^2\Delta x + \pi[f(x_3)]^2\Delta x + \cdots + \pi[f(x_8)]^2\Delta x \\
&= \pi\left[\sqrt{16-x_1^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_2^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_3^2}\right]^2\Delta x + \\
&\quad \cdots + \pi\left[\sqrt{16-x_8^2}\right]^2\Delta x \\
&= \pi[(16-(-4)^2) + (16-(-3)^2) + (16-(-2)^2) + \cdots + (16-(3)^2)] \\
&= \pi[0+7+12+15+16+15+12+7] \\
&= 84\pi
\end{aligned}$$

کرہ کا اصل حجم درج ذیل ہے (سوال 5.432)۔

$$H = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{256\pi}{3}$$

متناہی مجموعہ سے حاصل حجم میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\text{فی صد خلل} &= \frac{|H-H_8|}{H}\times 100 = \frac{\frac{256\pi}{3}-84\pi}{\frac{256\pi}{3}}\times 100 \\
&= \frac{256-252}{256} = \frac{1}{64} \approx 1.6\,\%
\end{aligned}$$

□

غیر منفی تفاعل کی اوسط قیمت

متناہی تعداد قیمتوں کی اوسط حاصل کرنے کی خاطر ہم تمام قیمتوں کا مجموعہ لے کر قیمتوں کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اب لا متناہی تعداد کی قیمتوں کے اوسط سے کیا مراد ہو گا؟ مثال کے طور پر وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت سے کیا مراد ہے؟ ایسے "استمراری" اوسط کا مطلب سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ ہم $x = -1$ تا $x = 1$ کے بیچ بلا منصوبہ x کی مختلف قیمتوں پر تفاعل کی نمونی قیمتوں کے مربع کا اوسط حاصل کرتے ہیں۔ نمونی جسامت بڑھانے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ اوسط کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش کرے گا۔ اس قیمت کو ہم وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل کا **اوسط**[14] کہتے ہیں۔

مثال 5.25: وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم وقفہ $[-1,1]$ کو 6 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 5.20)۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{1}{3}$ ہو گی۔

---

[14] average

اب تک کی مثالوں میں متناہی مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم ہر ذیلی وقفہ کے سر پر تفاعل کی قیمت لیتے رہے ہیں۔ اس سے بہتر نتائج اس صورت حاصل ہوتے ہیں جب تفاعل کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کی وسط میں لیا جائے۔ چھ ذیلی وقفوں کی وسط میں تفاعل کی قیمتوں کے اوسط کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{اوسط قیمت} &\approx \frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6} \\ &\approx \frac{1}{6}\cdot\frac{25+9+1+1+9+25}{36}=\frac{70}{216}\approx 0.324 \end{aligned}$$

اس تفاعل کا اصل اوسط $\frac{1}{3}$ ہے۔

درج ذیل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned} &\frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6} \\ &=\frac{1}{2}\left[\Big(-\frac{5}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}+\Big(-\frac{3}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\Big(\frac{5}{6}\Big)^2\cdot\frac{1}{3}\right] \\ &=\frac{1}{\text{لمبائی }[-1,1]}\cdot\left[f\Big(-\frac{5}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}+f\Big(-\frac{3}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}+\cdots+f\Big(\frac{5}{6}\Big)\cdot\frac{1}{3}\right] \\ &=\frac{1}{\text{لمبائی }[-1,1]}\cdot\left[\text{تفاعل کی قیمتیں ضرب ذیلی وقفہ کی لمبائی کا مجموعہ}\right] \end{aligned}$$

اس بار بھی اندازاً قیمت حاصل کرنے کی خاطر تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفہ کی لمبائی سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ حاصل کیا گیا ہے۔ □

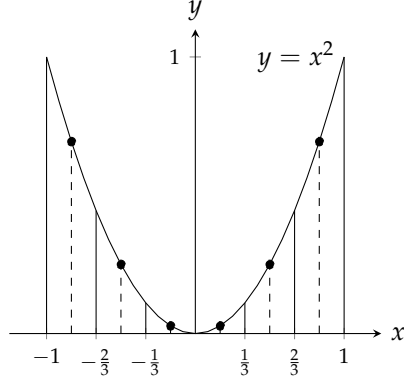
نتیجہ

اس حصہ میں ہم نے تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفوں کی لمبائی سے ضرب دے کر مجموعہ حاصل کرنے سے درکار قیمتوں کا اندازہ لگایا گیا۔

ہم نے مثال 5.22 میں دیکھا کہ ذیلی وقفوں کی لمبائی کم کرنے سے اصل جواب، جس کو ہم الٹ تفرق سے حاصل کر چکے تھے، کے زیادہ قریب نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ کیا ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم کرنے سے حاصل نتیجہ کی تحدیدی قیمت اصل جواب تک پہنچتی؟ کیا اس مثال میں مجموعہ اور الٹ تفرق کا تعلق اتفاقی ہے؟ کیا ہم مثال 5.21 میں رقبہ، مثال 5.23 اور مثال 5.24 میں حجم اور مثال 5.25 میں اوسط قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں؟ جیسا ہم دیکھیں گے، ان سوالات کے جوابات ہیں "جی ہاں ایسا کیا جا سکتا ہے"، "نہیں یہ اتفاق نہیں ہے" اور "جی ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں۔"

سوالات

اخراج قلب

سوال 5.187: ایک مریض کے اخراج قلب کو رنگ کی ترکیب سے ناپا گیا۔ پیمائش کے نتائج شکل 5.21 میں دیے گئے ہیں جہاں خون کی

شکل 5.20: تفاعل کا اوسط (مثال 5.25)۔

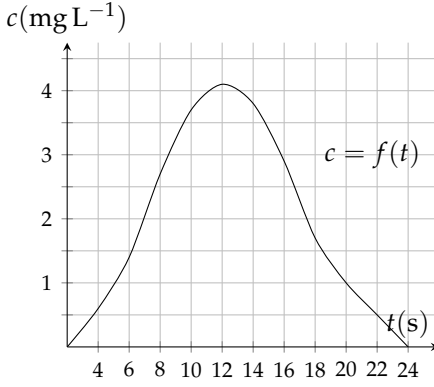
جدول 5.5: وقت بالمقابل کثافت رنگ برائے سوال 5.188۔

لمحہ t	کثافت رنگ c	لمحہ t	کثافت رنگ c
0	0	16	7.9
2	0	18	7.8
4	0.1	20	6.1
6	0.6	22	4.7
8	2.0	24	3.5
10	4.2	26	2.1
12	6.3	28	0.7
14	7.5	30	0

دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار $5\,\mathrm{mg}$ تھی۔ کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبہ کو مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر حاصل کریں۔ اخراج قلب کتنا ہے؟ (مثال 5.21 دیکھیں۔)
جواب: $\approx 44.8,\ 6.7\,\mathrm{L\,min^{-1}}$

سوال 5.188: ایک مریض کا اخراج قلب جاننے کی خاطر ترکیب رنگ استعمال کیا جاتا ہے۔ کی گئی پیمائش کو جدول 5.5 میں پیش کیا گیا ہے جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار $10\,\mathrm{mg}$ ہے۔ پیمائش کو ہموار منحنی سے ترسیم کریں۔ رقبے کا اندازہ مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر تلاش کریں۔ اخراج قلب دریافت کریں۔

فاصلہ

سوال 5.189: ایک ریل گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت شکل 5.22-ا میں دی گئی ہے۔ دس سیکنڈ وقفے کو 10 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم

لمحہ t	کثافت رنگ c
2	0
4	0.6
6	1.4
8	2.7
10	3.7
12	4.1
14	3.8
16	2.9
18	1.7
20	1.0
22	0.5
24	0

شکل 5.21: اخراج قلب جاننے کے لئے کثافت رنگ بالمقابل وقت کی پیمائش (سوال 5.187)۔

کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ کے (ا) بائیں سر، (ب) دائیں سر پر قیمتیں لیتے ہوئے طے فاصل تلاش کریں۔
جواب: (ا) 87 m ، (ب) 86m

سوال 5.190: نہر کے پانی میں ایک بوتل کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.22-ب میں دیا گیا ہے۔ ایک گھنٹہ کے وقفہ کو 12 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں۔ ان ذیلی وقفوں کے (ا) بائیں سر قیمتیں، (ب) دائیں سر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے وہ فاصل تلاش کریں جو بوتل اس گھنٹہ میں طے کرتا ہے۔

سوال 5.191: ایک گاڑی جس کا رفتار پیما کار آمد لیکن مسافت پیما غیر کارآمد ہے میں آپ سفر کر رہے ہیں۔ آپ ہر 10 سیکنڈ اس کی رفتار قلم بند کرتے ہیں۔ ان نتائج کو شکل 5.23-ا میں دکھایا گیا ہے۔ سڑک کی لمبائی کی اندازاً قیمت کو (ا) بائیں سر نقطی قیمتیں، (ب) دائیں سر نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔
جواب: (ا) 969 m ، (ب) 1067 m

سوال 5.192: ساکن حال سے 36 سیکنڈ میں ایک گاڑی $142\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل 5.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) مستطیل استعمال کرتے ہوئے ان 36 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ب) گاڑی تقریباً کتنی دیر میں آدھے فاصلہ تک پہنچی؟ اس لمحے پر گاڑی کی رفتار کتنی تھی؟

سوال 5.193: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 2 چکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-ا)۔ (ا) حجم H_2 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_2|$ کی H کے لحاظ سے فی صد قیمت حاصل کریں۔
جواب: (ا) 112 ، (ب) 9 %

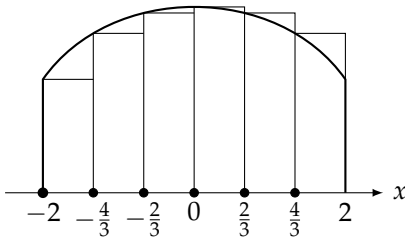
رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{s})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{s})$
11	6	0	0
6	7	12	1
2	8	22	2
6	9	10	3
0	10	5	4
		13	5

(ا) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 5.189

رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{min})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{min})$
1.2	35	1	0
1.0	40	1.2	5
1.8	45	1.7	10
1.5	50	2.0	15
1.2	55	1.8	20
0	60	1.6	25
		1.4	30

(ب) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال 5.190

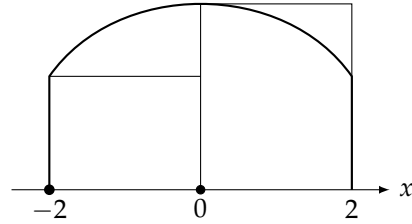
شکل 5.22: رفتار بالمقابل وقت کی پیمائشی قیمتیں۔

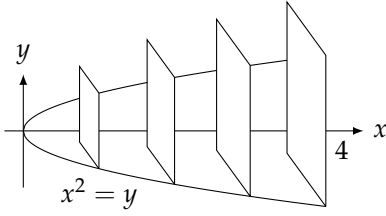
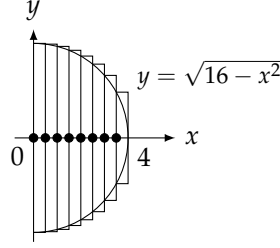
رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ
15	70	0	0
22	80	44	10
35	90	15	20
44	100	35	30
30	110	30	40
35	120	44	50
		35	60

(ا) برائے سوال 5.191

رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے
116	0.006	0	0
125	0.007	40	0.001
132	0.008	62	0.002
137	0.009	82	0.003
142	0.010	96	0.004
		108	0.005

(ب) برائے سوال 5.192

شکل 5.23: گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت۔

(ا) جسم کے حجم کو 2 چکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

(ب) جسم کے حجم کو 6 چکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

شکل 5.24: حجم کے ذیلی وقفے (سوال 5.193 اور سوال 5.194)

شکل 5.26: برائے سوال 5.199

شکل 5.25: نصف کرہ (سوال 5.197)

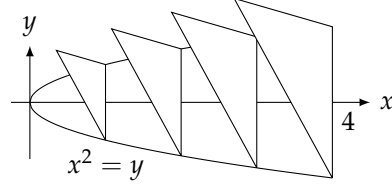
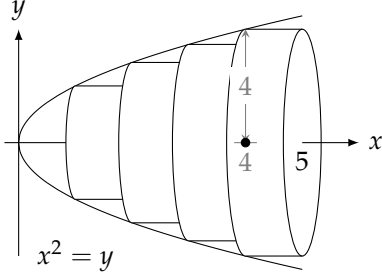
سوال 5.194: فرض کریں ہم مثال 5.23 میں حجم کا اندازہ صرف 6 چکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل 5.24-ب)۔ (ا) حجم H_6 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_6|$ کو H کی فی صد کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال 5.195: فرض کریں ہم مثال 5.24 میں کرہ کا حجم حاصل کرنے کے لئے وقفہ $-4 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہیں۔ (بائیں ترین بیلن کا رقبہ عمودی تراش صفر ہو گا۔) (ا) ان بیلنوں کا مجموعی حجم H_4 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_4|$ کو H کا فی صد لکھیں؟
جواب: (ا) 80π، (ب) $6\,\%$

سوال 5.196: ایک کرہ جس کا رداس 5 ہے کا حجم درکار ہے۔ آپ اس کے قطر کو پانچ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ایک ذیلی وقفہ 2 کے برابر ہو گا۔ آپ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطوں پر قطر کے عمودی کرہ کو کاٹ کر رقبہ عمودی تراش حاصل کرتے ہیں۔ آپ اتنی ہی رقبہ عمودی تراش والے ایسے بیلن لیتے ہیں جن کی موٹائی 2 ہو۔ان بیلنوں کے مجموعی حجم سے آپ کرہ کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔ (ا) بیلنوں کا مجموعی حجم H_5 کیا ہو گا؟ (ب) خلل $|H - H_5|$ کو H کا فی صد لکھیں۔

سوال 5.197: رداس 4 کے کرہ کا حجم درکار ہے۔ اس کا محور تشاکل x محور پر وقفہ $[0, 4]$ ہے۔ آپ اس وقفہ کو 8 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن جس کی موٹائی ذیلی وقفہ کی لمبائی جتنی ہو کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم تلاش کیا جاتا ہے (شکل 5.25)۔ (ا) مجموعی حجم H_8 تلاش کریں (جو نصف کرہ کا حجم ہو گا)۔ (ب) کیا H_8 نصف کرہ کے حجم H سے کم یا زیادہ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_8|$ کو H کا فی صد لکھیں۔
جواب: (ا) $\frac{93\pi}{2}$ زیادہ اندازہ، (ب) $9\,\%$

سوال 5.198: گزشتہ سوال (سوال 5.197) میں ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطے پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہوئے دوبارہ جوابات حاصل کریں۔

سوال 5.199: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل
نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش چکور ہے جس کے کنارے قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتے ہیں (شکل 5.26)۔ (ا) وقفہ

شکل 5.28: راکٹ کی نوک (سوال 5.203)

شکل 5.27: برائے سوال 5.200

$0 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے دائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 32$ ہے۔ خلل $|H - H_4|$ کو H کے لحاظ سے فی صد کی صورت میں لکھیں۔ (ج) اس مسئلے کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

جواب: (ا) 40، (ب) 25 %، (ج) 36, 12.5 %

سوال 5.200: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش متساوی الاضلاع شکل کا ہے جس کے قاعدہ قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتا ہے (شکل 5.27)۔ (ا) وقفہ $0 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے بائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 8\sqrt{3}$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_4|$ کی فی صد قیمت کتنی ہے؟ (ج) سوال کو دوبارہ H_8 کے لئے حل کریں۔

سوال 5.201: ایک پانی کی ٹینکی نصف کروی پیالے کی مانند ہے جس کا رداس $8\,\mathrm{m}$ ہے۔ اس میں پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) پانی کی گہرائی کو آٹھ ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی نچلی سطح کا رقبہ عمودی تراش والے بیلن استعمال کرتے ہوئے H_8 تلاش کریں۔ (ب) اصل حجم جو آپ سوال 5.433 میں تلاش کریں گے $H = \frac{320\pi}{3}\,\mathrm{m}^3$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_8|$ کی فی صد قیمت تلاش کریں۔

جواب: (ا) 118.5π یا تقریباً $372.28\,\mathrm{m}^3$، (ب) تقریباً 11 % خلل

سوال 5.202: تیراکی کے ایک مستطیل تالاب کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور چوڑائی $6\,\mathrm{m}$ ہے۔ تالاب کے ایک سر سے دوسرے سر تک $1\,\mathrm{m}$ وقفوں پر پانی کی گہرائی (میٹر) جدول 5.6 میں دی گئی ہے۔ (ا) h کی بائیں سر نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تالاب میں پانی کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

جدول 5.6: تالاب میں پانی کی گہرائی (سوال 5.202)

مقام x	گہرائی h	مقام x	گہرائی h
0	2.0	6	3.83
1	2.73	7	3.97
2	3.03	8	4.1
3	3.3	9	4.23
4	3.5	10	4.33
5	3.67		

سوال 5.203: منحنی $y = \sqrt{x}, \, 0 \le x \le 5$ کو y محور کے گرد گمانے سے ایک راکٹ کی قطع مکافی مجسم نوک حاصل ہوتی ہے جہاں x کی پیمائش میٹروں میں ہے (شکل 5.28)۔ اس نوک کا حجم معلوم کرنے کی خاطر ہم $[0, 5]$ کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ہر حصے کی لمبائی 1 ہو گی۔ ہر حصہ کے بائیں سر نقطہ پر x محور کے قائمہ جسم کو کاٹا جاتا ہے اور ان نقطوں پر جسم کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن استعمال کرتے ہوئے نوک کا حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ بیلنوں کی لمبائی 1 ہو گی۔ (ا) مجموعہ H_5 تلاش کریں۔ کیا H_5 کی قیمت H سے کم یا زیادہ ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نوک کا اصل حجم جو آپ سوال 5.434 میں تلاش کریں گے $H = 2\pi \, \mathrm{m}^3$ ہے۔ خلل $|H - H_5|$ کو H کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔
جواب: (ا) 1.6π ، (ب) $20\,\%$

سوال 5.204: ہر ذیلی وقفے کے دائیں سر نقطی رقبہ عمودی تراش استعمال کرتے ہوئے سوال 5.203 کو دوبارہ حل کریں۔

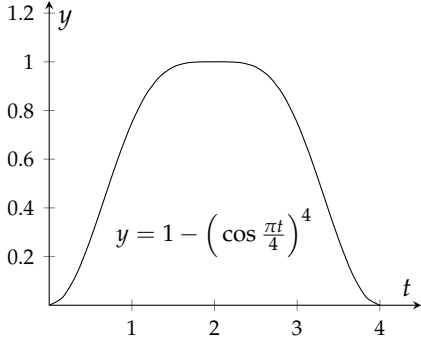
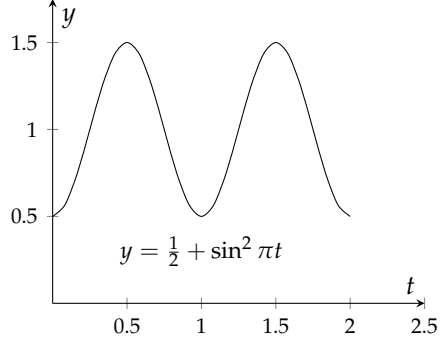
تفاعل کی اوسط قیمت

سوال 5.205 تا سوال 5.208 میں تفاعل f کی اوسط قیمت درکار ہے۔دیے گئے وقفہ کو چار ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت استعمال کرتے ہوئے متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے اوسط حاصل کریں۔

سوال 5.205: $f(x) = x^3, \quad [0, 1]$
جواب: $\frac{31}{16}$

سوال 5.206: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1, 9]$

سوال 5.207: $f(t) = \frac{1}{2}\sin^2 \pi t, \quad [0, 2]$ شکل 5.29
جواب: 1

سوال 5.208: $f(t) = 1 - (\cos \frac{\pi t}{4})^4, \quad [0, 4]$ شکل 5.30

شکل 5.30: ترسیم برائے سوال 5.208

شکل 5.29: ترسیم برائے سوال 5.207

رفتار اور فاصلہ

سوال 5.209: ایک جسم کو جہاز سے گرنے دیا جاتا ہے۔ جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے لیکن ہوائی رگڑ کی بنا گرنے کی اسراع بتدریج کم ہوتی جاتی ہے۔ وقت بالمقابل جسم کی اسراع کو درج ذیل جدول میں پیش کیا گیا ہے۔

$t(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5
$a(\mathrm{m\,s^{-2}})$	9.8	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(ا) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔ (ج) لمحہ $t = 3$ میں گرنے والے فاصلہ کی بالائی حد تلاش کریں۔

جواب: (ا) $22.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $13.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ج) $35.175\,\mathrm{m}$

سوال 5.210: ایک جسم کو سمندری سطح سے سیدھا اوپر $125\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ اس جسم پر صفر ثقلی قوت اثر انداز ہوتی ہے۔ (ا) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔ (ب) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔ ثقلی اسراع کو $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔

آلودگی پر قابو پانا

سوال 5.211: تیل کے جہاز سے سمندر میں تیل رس رہا ہے۔ رستا تیل کی مقدار (لٹر فی گھنٹہ) بالمقابل وقت (گھنٹہ) کو نیچے جدول میں دیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صورت حال بتدریج خراب ہو رہی ہے۔

گھنٹہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{L\,h^{-1}}$	50	70	97	136	190	265	369	516	720

(ا) ان پانچ گھنٹوں میں خارج تیل کی مقدار کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔ (ب) آٹھ گھنٹوں میں خارج تیل کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔ (ج) ابتدائی آٹھ گھنٹوں بعد تیل مسلسل $720\,\mathrm{L\,h^{-1}}$ سے رستا ہے۔ اگر جہاز میں ابتدائی طور کل $25\,000\,\mathrm{L}$ تیل ہو تب تمام تیل

خارج ہونے کے لئے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا وقت درکار ہو گا۔
جواب: (ا) 758 L ، 543 L ، (ب) 2363 L ، 1693 L ، (ج) 31.4 h ، 32.4 h

سوال 5.212: ایک بجلی گھر تیل کو جلا کر برقی طاقت پیدا کرتا ہے۔ تیل جلنے سے پیدا آلودگی کو کم کرنے کی خاطر دھواں کش کو چھلنی سے گزارا جاتا ہے جو نجاست کو روک دیتا ہے۔ وقت کے ساتھ ساتھ چھلنی کی کارگزاری کم پڑ جاتی ہے اور اس کو تبدیل کرنا لازمی ہو جاتا ہے۔ ہر مہینے کی آخر میں ہوا میں خارج نجاست کی شرح ناپی جاتی ہے، اگر یہ مقدار سرکاری حد سے زیادہ ہو تب چھلنی کو تبدیل کیا جاتا ہے۔اس پیمائش کی ایک مثال نچلی جدول میں دکھائی گئی ہے جہاں یومیہ خارج نجاست کی مقدار کی اکائی ٹن (1000 kg) ہے۔

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نجاست	0.2	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

(ا) تمام مہینوں کو 30 دنوں کا تصور کریں۔ فرض کریں نئی چھلنی سے یومیہ 0.05 ٹن نجاست نکل پاتی ہے۔ جون کے مہینے کی آخر تک ہوا میں کل خارج نجاست کی مقدار کی بالائی حد کیا ہو گی؟ اس کی نچلی حد کیا ہو گی؟ (ب) بہترین حالات میں کل 125 ٹن نجاست کتنے عرصہ میں ہوا میں خارج ہو گا؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.213 تا سوال 5.216 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے (ا) دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) وقفہ کو $n = 100$ ، $n = 200$ اور $n = 1000$ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی وسط میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب میں حاصل قیمتوں سے تفاعل کی اوسط $\bar{f}$ تلاش کریں۔ (د) $n = 1000$ کے لئے حاصل اوسط $\bar{f}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات $f(x) = \bar{f}$ کو حل کریں۔

سوال 5.213: $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$

سوال 5.214: $f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$

سوال 5.215: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

سوال 5.216: $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

5.5 ریمان مجموعے اور قطعی تکملات

گزشتہ حصے میں ہم نے فاصلے، رقبے، حجم اور اوسط قیمتوں کو متناہی مجموعوں کی مدد سے حاصل کیا۔ منتخب تفاعل کی قیمتوں کو وقفوں کی لمبائیوں کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے یہ مجموعے حاصل کیے گئے۔اس حصہ میں ان وقفوں کی لمبائیوں کو کم سے کم اور تعداد کو زیادہ سے زیادہ کرتے ہوئے مجموعہ کی تحدیدی قیمت پر غور کیا جائے گا۔ متعدد ارکان پر مشتمل مجموعے کو ظاہر کرنے کی علامت پہلے متعارف کرتے ہیں۔

متناہی مجموعہ کی علامت

درج ذیل مجموعہ کو

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

یونانی حروف تہجی کا بڑا حرف Σ ("سگما") استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو k کی 1 تا n قیمتوں کے لئے Δt ضرب t_k پر f کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ مجموعہ کی یوں اظہار کو **سگما علامتی اظہار** کہتے ہیں۔

تعریف: متناہی مجموعہ کا سگما علامتی اظہار
علامت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ سے مراد مجموعہ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ مجموعہ کے **ارکان**[15] a_1 تا a_n ہیں جہاں a_1 مجموعے کا پہلا اور a_n مجموعے کا آخری رکن ہے۔ متغیر k **مجموعی سلسلہ کا اشاری**[16] کہلاتا ہے۔ k کی قیمتیں 1 تا n عدد صحیح ہیں۔ **مجموعی سلسلہ کا زیریں حد**[17] 1 جبکہ **مجموعی سلسلہ کا بالائی حد**[18] n ہے۔ زیریں اور بالائی حدود کوئی بھی دو عدد صحیح ممکن ہیں۔

□

مثال 5.26:

مجموعہ کی سگما صورت	ارکان کی صورت میں مجموعہ	مجموعہ کی قیمت
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

□

مجموعی سلسلہ کا زیریں حد 1 سے ہٹ کر ہو سکتا ہے۔

مثال 5.27: مجموعہ $1+3+5+7+9$ کو سگما علامتی روپ میں لکھیں۔

---

[15] terms
[16] index of summation
[17] lower limit of summation
[18] upper limit of summation

حل:

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1) \qquad k=0 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$
$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) \qquad k=1 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

□

متناہی مجموعہ کا الجبرا

متناہی مجموعوں کے ساتھ کام کرتے ہوئے درج ذیل قواعد بروئے کار لائے جا سکتے ہیں۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ فرق: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ جہاں c کوئی عدد ہے۔

قاعدہ مستقل قیمت: $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ جہاں c کوئی مستقل قیمت ہے۔

اس فہرست میں کوئی حیران کن حقیقت پیش نہیں کی گئی ہے۔ ان کے با ضابطہ ثبوت (الکراجی) الجبرائی ماخوذ سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جنہیں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 5.28:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2 \qquad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}$$
$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k)=\sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k=-1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k=-\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$
$$\sum_{k=1}^{3}(k+4)=\sum_{k=1}^{3}k+\sum_{k=1}^{3}4$$
$$=(1+2+3)+(3\cdot 4) \qquad \text{قاعدہ مستقل قیمت}$$
$$=6+12=18$$

□

مثبت عدد صحیح کے کلیات مجموعہ

متناہی مجموعوں کے کئی کلیات پائے جاتے ہیں جن میں سے مشہور ترین کلیات شروع کے n عدد صحیح کا مجموعہ ہے (جو گاوس نے 5 سال کی عمر میں اخذ کیا) اور شروع کے n عدد صحیح کے مربع اور مکعب کے مجموعوں کے کلیات ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مربع} \tag{5.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 \qquad \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مکعب}$$

مثال 5.29: $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k)$ تلاش کریں۔

حل: ہم مجموعہ کو مجموعی سلسلہ کے روپ میں لکھے بغیر الجبرائی قواعد استعمال کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k) &= \sum_{k=1}^{4}k^2 - 3\sum_{k=1}^{4}k && \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}\\
&= \frac{4(4+1)(8+1)}{6} - 3\Big(\frac{4(4+1)}{2}\Big) && n=4 \text{ لیتے ہوئے مساوات } 5.13\\
&= 30-30=0
\end{aligned}$$

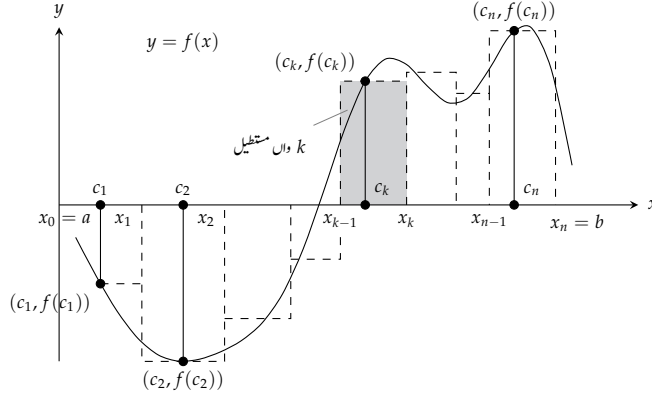
□

ریمان مجموعے

ہم نے حصہ 5.4 میں تخمینی مجموعوں پر غور کیا جو زیادہ عمومی **ریمان مجموعہ** کی مخصوص مثالیں تھیں۔ ان مثالوں میں تفاعل کی قیمتیں غیر منفی تھیں جبکہ ریمان مجموعہ میں ایسی پابندی نہیں پائی جاتی ہے۔ وقفہ $[a,b]$ پر دیے گئے اختیاری استمراری تفاعل $y=f(x)$ کو a اور b کے بیچ نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ پر n ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (شکل 5.31)۔ یہ نقطے صرف درج ذیل شرط کے تحت منتخب کیے جاتے ہیں۔

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

اس علامتی روپ میں مطابقت پیدا کرنے کی خاطر a کو x_0 اور b کو x_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل سلسلہ

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

شکل 5.31: بند وقفہ $[a, b]$ پر عمومی تفاعل $y = f(x)$ ۔ تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ کو تخمینی طور پر مستطیلوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ c_1 کو عین x_0 پر منتخب کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔

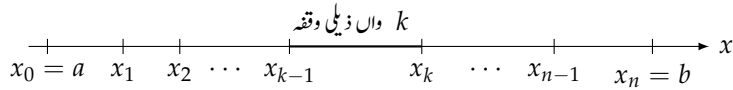
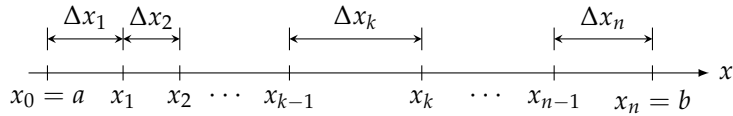
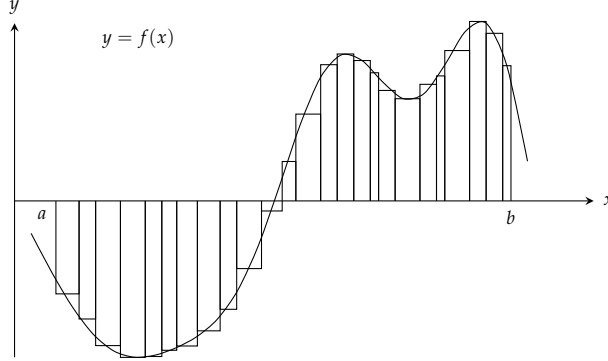
کو $[a, b]$ کی **خانہ بندی**[19] کہتے ہیں۔

P کی خانہ بندی درج ذیل n عدد بند **ذیلی وقفوں**[20] کو ظاہر کرتی ہے۔

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

بند ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کو P کا k واں ذیلی وقفہ کہتے ہیں۔

k واں ذیلی وقفہ

$x_0 = a \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{k-1} \quad x_k \quad \cdots \quad x_{n-1} \quad x_n = b \quad x$

k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ہے۔

partition[19]
subintervals[20]

شکل 5.32: وقفہ $[a, b]$ کے زیادہ باریک خانہ بندی سے مستطیلوں کی تعداد بڑھتی ہے جن کے تلا نسبتاً چھوٹے ہوتے ہیں۔

ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں ہم کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ذیلی وقفہ میں تفاعل $y = f(x)$ پر نقطہ $(c_k, f(c_k))$ تک مستطیل بناتے ہیں۔ جب تک نقطہ c_k ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں پایا جاتا ہو اس کا مقام غیر اہم ہے (شکل 5.31)۔

اگر $f(c_k)$ مثبت ہو تب عدد $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے قد ضرب قاعدہ یعنی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ اگر $f(c_k)$ منفی عدد ہو تب $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے رقبہ کے نفی کے برابر ہو گا۔ ہم ان تمام $f(c_k)\Delta x_k$ حاصل ضرب جن کی تعداد n ہے کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

یہ مجموعہ جو P اور c_k کی انتخاب پر منحصر ہے وقفہ $[a, b]$ پر f کا **ریمان مجموعہ**[21] کہلاتا[22] ہے۔

$[a, b]$ کے خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرتے ہوئے خانہ بندی سے حاصل مستطیل تفاعل f اور x محور کے بیچ خطہ کو بہتر سے بہتر ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.32 کا شکل 5.31 کے ساتھ موازنہ کریں)۔یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ ہماری اس توقع کو پرکھنے کی خاطر ہمیں خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کو ریاضیاتی صورت میں لکھنا ہو گا اور جاننا ہو گا کہ آیا مطابقتی مجموعہ کی کوئی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے۔ ہم درج ذیل تعریف کی مدد سے ایسا کر پائیں گے۔

خانہ بندی P کی **معیار**[23] سے مراد سب سے لمبے خانے کی لمبائی ہے جس کو درج ذیل علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|P\| \qquad \text{(اس کو "}P\text{ کا معیار" پڑھیں)}$$

---

[21] Riemann sum
[22] جرمنی کے ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے ایسے مجموعوں کی تحدیدی قیمتوں پر کام کیا۔
[23] norm

خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کی بجائے اب ہم کہتے ہیں کہ خانوں کی معیار صفر تک پہنچائی جاتی ہے۔ جیسے جیسے معیار کی قیمت صفر کے نزدیک ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم اور ان کی تعداد زیادہ سے زیادہ ہوتی جاتی ہے۔ خانوں کی چوڑائی کم کرنے سے باریک مستطیل پیدا ہوں گے۔

مثال 5.30: وقفہ $[0, 2]$ کی خانہ بندی سلسلہ $P = \{0, 0.2, 0.6, 1, 1.5, 2\}$ ہے۔ P کے پانچ ذیلی وقفے درج ذیل ہیں۔

$$[0, 0.2], \ [0.2, 0.6], \ [0.6, 1], \ [1, 1.5], \ [1.5, 2]$$

ان ذیلی وقفوں کی لمبائیاں $\Delta x_1 = 0.2$ ، $\Delta x_2 = 0.4$ ، $\Delta x_3 = 0.4$ ، $\Delta x_4 = 0.5$ اور $\Delta x_5 = 0.5$ ہیں۔ ان میں سب سے لمبے ذیلی وقفہ کی لمبائی 0.5 ہے لہٰذا خانہ بندی P کا معیار $\|P\| = 0.5$ ہے۔ اس مثال میں دو ذیلی وقفوں کی لمبائی 0.5 ہے۔ □

تعریف: **قطعی تکمل بطور ریمان مجموعوں کا حد**

فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ ایک معین تفاعل ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے وقفہ $[a, b]$ پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ کا حد اس صورت عدد I ہو گا جب درج ذیل شرط پورا ہوتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کسی بھی منتخب عدد c_k کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\|P\| < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \right| < \epsilon$$

□

اگر یہ حد موجود ہو تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$$

وقفہ $[a, b]$ پر عدد I تفاعل f کا **قطعی تکمل**[24] کہلاتا ہے، اور ہم کہتے ہیں کہ $[a, b]$ پر f **قابل تکمل**[25] ہے اور $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ عدد I پر **مرکوز**[26] ہے۔

---

[24] definite integral
[25] integrable
[26] converges

ہم عموماً I کو $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہیں جو " a تا b تفاعل f کا تکمل" پڑھا جاتا ہے۔یوں اگر حد موجود ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ خانہ بندی تبدیل کرتے ہوئے اور ہر خانے میں c_k کا مقام تبدیل کرنے کے باوجود استمراری f کی صورت میں $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعوں $\sum f(c_k)\Delta x_k$ کی تحدیدی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ریمان نے 1854 میں درج ذیل مسئلہ ثابت کرتے ہوئے اس حقیقت کی تصدیق کر دی۔ ریمان کے ثبوت کی جدید صورت احصاء کی تقریباً تمام اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے۔

مسئلہ 5.1: **قطعی تکمل کی موجودگی**
تمام استمراری تفاعل قابل تکمل ہیں۔ یعنی وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کا $[a,b]$ پر قطعی تکمل موجود ہو گا۔

ہم کیوں یقین کریں کہ یہ مسئلہ کار آمد ہو گا؟ وقفہ $[a,b]$ کی عمومی خانہ بندی P فرض کریں۔ چونکہ تفاعل f استمراری ہے لہٰذا ہر ذیلی وقفہ پر اس کی کوئی کم سے کم قیمت k_L اور کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت k_H ہو گی۔ کم سے کم قیمتوں (شکل 5.33-ا) سے حاصل ضرب $k_L\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا **زیریں مجموعہ**[27] L کہلاتا ہے۔

$$L = k_{L1}\Delta x_1 + k_{L2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Ln}\Delta x_n$$

اسی طرح زیادہ سے زیادہ قیمتوں (شکل 5.33-ب) سے حاصل ضرب $k_H\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا بالائی مجموعہ H کہلاتا ہے۔

$$H = k_{H1}\Delta x_1 + k_{H2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Hn}\Delta x_n$$

ان کا فرق $H - L$ شکل 5.33-ج میں دکھائے گئے سیاہ ڈبوں کے رقبہ کے برابر ہو گا۔جیسا جیسا $\|P\| \to 0$ کیا جائے ان ڈبوں کی تعداد بڑھتی جائے گی جبکہ ان کی چوڑائی اور لمبائی کم سے کم ہوتی جائے گی۔ ہم $\|P\|$ کو صفر کے کافی نزدیک کرتے ہوئے غیر منفی عدد $H - L$ کو کسی بھی چھوٹے سے چھوٹے مثبت عدد ϵ سے کم کر سکتے ہیں، یعنی

$$\lim_{\|P\|\to 0}(H - L) = 0 \tag{5.14}$$

اور جیسا اعلیٰ نصاب میں دکھایا گیا ہے درج بالا سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} H \tag{5.15}$$

---

[27] lower sum

بند وقفوں پر استمراری تفاعل کی ایک خاصیت جس کو **یکساں استمرار**[28] کہتے ہیں کی بدولت مساوات 5.14 اور مساوات 5.15 کار آمد ہیں۔ یہ خاصیت ممکن بناتی ہے کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ان ڈبوں، جو H اور L کے فرق کو ظاہر کرتے ہیں، کی چوڑائی کو کم سے کم کرتے ہوئے ان کی قد کو کم سے کم بنایا جا سکتا ہے اور ہم ان کی چوڑائی کم کرتے ہوئے ان کے قد کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ چونکہ یکساں استمرار سے منسلک ϵ بالمقابل δ کی دلیل ہم نے یہاں پیش نہیں کی ہے لہٰذا ہم مساوات 5.15 کو ثبوت نہیں مان سکتے ہیں البتہ مذکورہ بالا دلائل اصل ثبوت کی روح پیش کرتے ہیں۔

ہم وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے مساوات 5.15 کو درست تصور کرتے ہوئے P کے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ لکھتے ہیں. اب ہر k کے لئے $k_L \le f(c_k) \le k_H$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le H$$

f کا ریمان مجموعہ H اور L کے بیچ پایا جاتا ہے۔مسئلہ بیچ (مسئلہ 2.4) کی ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کا حد موجود ہو گا اور یہ L اور H کی مشترکہ تحدیدی قیمت ہو گی:

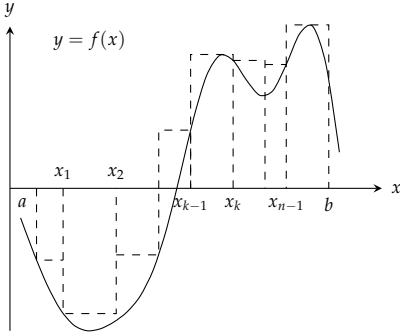
$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} H$$

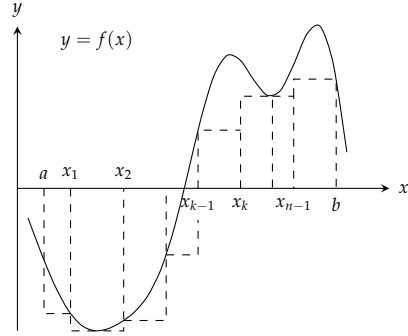
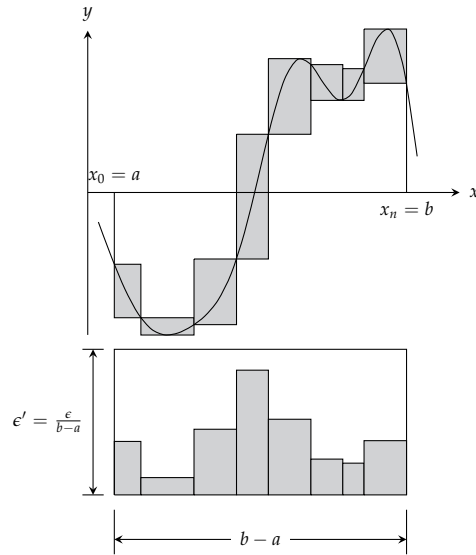
ایک لمحہ رک کر اس نتیجہ پر غور کریں۔اس نتیجہ کے تحت ہم c_k کو جس طرح بھی منتخب کریں، $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت وہی حاصل ہو گی۔ ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی کم سے کم قیمت منتخب کر کے وہی حد حاصل ہو گا۔ اسی طرح ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہو گا۔ c_k کو بلا منصوبہ منتخب کر کے بھی یہی حد حاصل ہو گا۔

اگرچہ ہم نے قطعی تکمل کی موجودگی کا مسئلہ بالخصوص استمراری تفاعل کے لئے پیش کیا، حقیقت میں کئی غیر استمراری تفاعل بھی قابل تکمل ہیں۔غیر محدود تفاعل کی تکمل پر حصہ 8.6 میں غور کیا جائے گا۔

بغیر ریمان تکمل والے تفاعل

غیر استمراری تفاعل، ما سوائے چند، نا قابل تکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0, 1]$ پر کوئی ریمان تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

---

[28] uniform continuity

شکل 5.33: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق۔

وقفہ $[0,1]$ کے کسی بھی خانہ بندی P کے لئے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

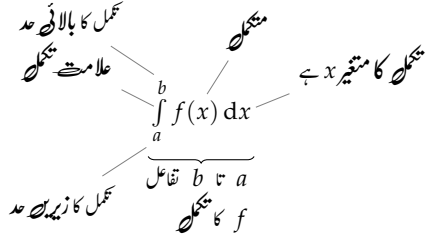
$$H = \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1,$$
$$L = \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

وقفہ $[0,1]$ پر f کے تکمل کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ $\|P\| \to 0$ سے H اور L کی ایک جیسی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\|\to 0} H = 1$$

یوں $[0,1]$ پر f کا تکمل نہیں پایا جاتا ہے۔ مستقل مضرب kf کا بھی تکمل نہیں پایا جاتا ہے ماسوائے جب k صفر ہو۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاح وابستہ ہیں۔ یوں $\int$ کو **علامت تکمل** کہتے ہیں، a تکمل کا **زیریں حد** جبکہ b تکمل کا **بالائی حد** ہے، f **متکمل** ہے، x تکمل کا **متغیر** ہے، جبکہ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مراد a تا b تفاعل f کا **تکمل** ہے۔ تکمل حل کرنے سے مراد تکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔

کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی تکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے ناکہ غیر تابع متغیر کی علامت پر۔ یوں تکمل میں غیر تابع متغیر کو x کی بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{کی بجائے} \quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{یا} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں تکمل سے مراد ریمان مجموعہ ہے لہٰذا غیر تابع متغیر کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور تینوں تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔ اسی لیے تکمل کے متغیر کو **نقلی متغیر**[29] کہتے ہیں۔

---

[29] dummy variable

مثال 5.31: درج ذیل ریمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k$$

حل: نقطہ c_k پر تفاعل $f(x)=3x^2-2x+5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تفاعل f کا تکمل درکار ہے:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k=\int_{-1}^{3}(3x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x$$

□

مستقل تفاعل

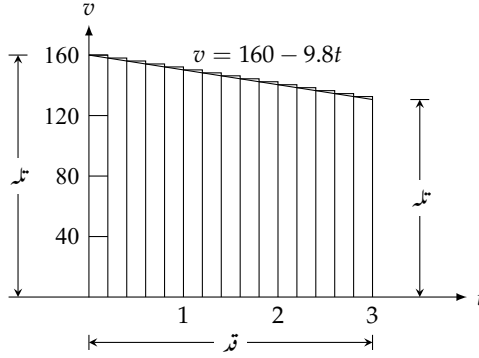
ہمیں مسئلہ 5.1 قطعی تکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا ہے ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں ایک دوسرا مسئلہ (حصہ 5.7) زیر استعمال ہو گا۔ مستقل تفاعل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a,b]$ پر f ایک مستقل تفاعل $f(x)=c$ ہو تب c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k&=\sum_{k=1}^{n}c\cdot\Delta x_k && f(c_k)\text{ ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے}\\&=c\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب}\\&=c(b-a) && \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \text{ وقفہ } [a,b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے}\end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے لہٰذا تکمل کی قیمت بھی یہی ہو گی۔یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a,b]$ جس پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a)$$

مثال 5.32:

ا. $\int\limits_{-1}^{4}3\,\mathrm{d}x=3(4-(-1))=(3)(5)=15$

شکل 5.34: وقفہ $[0, 3]$ پر سمتی رفتار تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لئے مستطیل۔

ب. $\int_{-1}^{4} (-3)\,\mathrm{d}x = -3(4 - (-1)) = (-3)(5) = -15$

□

غیر منفی تفاعل کے ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال 5.22 میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0, 3]$ پر گولا کی تفاعل رفتار

$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل 5.34 میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔اس ذوزنقہ رقبہ کا قد 3 ، زیریں تلا 160 اور بالائی تلا 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہے، اتنا اصل رقبہ پر مستطیل بہتر بیٹھتے ہیں۔ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں تلہ} + \text{بالائی تلہ}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

آپ کو یاد ہو گا کہ مثال 5.22 میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ہم تکمل کی قیمت بھی معلوم کر سکتے ہیں:

$$\int_0^3 (160 - 9.8t)\,\mathrm{d}t = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$

ہم تکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔جب ہمیں x محور اور استمراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبہ کا کلیہ معلوم ہو تب ہم تکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے تکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ پر $f(x) \geq 0$ استمراری ہے۔ تفاعل f کے ترسیم اور x محور کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لئے پیش کیا۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لئے بھی کارآمد ہو گا؟ اس کا جواب ہے، "جی ہاں"، البتہ یہ ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔

مثال 5.33: رقبہ استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت کا تلاش
درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \quad 0 < a < b$$

حل: ہم خطہ $a < x < b$ کے لئے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل 5.35)۔ تکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

یوں $a = 1$ اور $b = \sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

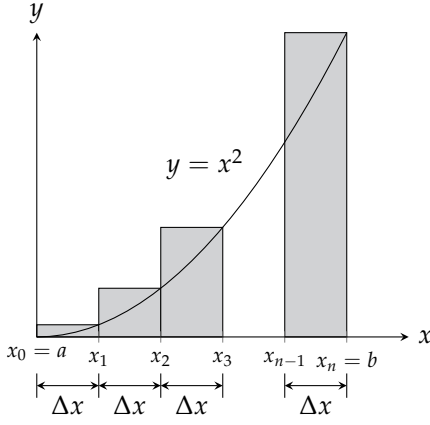
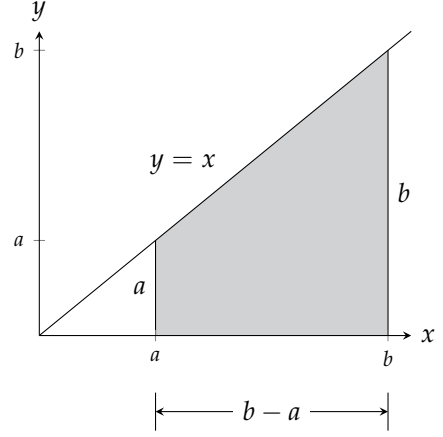
$$\int_1^{\sqrt{5}} x\,\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

دھیان رہے کہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو تکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔ □

مثال 5.34: قطعی تکمل سے رقبے کا حصول
قطع مکافی $y = x^2$ اور x محور کے بیچ وقفہ $[0,b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل 5.36)۔

حل: ہم تکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تفاعل کو ترسیم کر کے وقفہ $[0,b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ہر ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

شکل 5.35: خطہ برائے مثال 5.33

شکل 5.36: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال 5.34)

ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔یوں $c_1 = x_1$ ، $c_2 = x_2$ ، وغیرہ ہو گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
f(c_1)\Delta x &= f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3 \\
f(c_2)\Delta x &= f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3 \\
&\vdots \\
f(c_n)\Delta x &= f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3
\end{aligned}
$$

ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2(\Delta x)^3 \\
&= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{مستقل ہے } (\Delta x)^3 \\
&= \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات 5.13 میں } \Delta x = \tfrac{b}{n} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

استعمال کرتے ہوئے $x=0$ تا $x=b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S_n && \text{یہاں } \|P\|\to 0 \text{ سے مراد } n\to\infty \text{ ہے} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot(2+0+0) = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

یوں $b=1$ اور $b=1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔ □

سوالات

سگما روپ

سوال 5.217 تا سوال 5.222 میں مجموعہ کو سگما روپ میں لکھنے کے بعد اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.217: $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

جواب: $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$

سوال 5.218: $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

سوال 5.219: $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

جواب: $\cos(1\pi) + \cos(2\pi) + \cos(3\pi) + \cos(4\pi) = 0$

سوال 5.220: $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

سوال 5.221: $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

جواب: $\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$

سوال 5.222: $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k \cos k\pi$

سوال 5.223: درج ذیل میں سے کونسی $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5} 2^k$ ج. $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

جواب: تمام

سوال 5.224: درج ذیل میں سے کونسی $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32$ کی سگما علامتی روپ ہے۔

ا. $\sum_{k=1}^{6}(-2)^{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{5}(-1)^{k}2^{k}$ ج. $\sum_{k=-2}^{3}(-1)^{k+1}2^{k+2}$

سوال 5.225: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=2}^{4}\frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ب. $\sum_{k=0}^{2}\frac{(-1)^{k}}{k+1}$ ج. $\sum_{k=-1}^{1}\frac{(-1)^{k}}{k+2}$

جواب: ب

سوال 5.226: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

ا. $\sum_{k=1}^{4}(k-1)^2$ ب. $\sum_{k=-1}^{3}(k+1)^2$ ج. $\sum_{k=-3}^{-1}k^2$

سوال 5.227 تا سوال 5.232 میں دیے مجموعوں کو سگما روپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلہ کی زیریں حد پر منحصر ہو گا۔

سوال 5.227: $1+2+3+4+5+6$
جواب: $\sum_{k=1}^{6}k$

سوال 5.228: $1+4+9+16$

سوال 5.229: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
جواب: $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2^k}$

سوال 5.230: $2+4+6+8+10$

سوال 5.231: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$
جواب: $\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

سوال 5.232: $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

متناہی مجموعہ کی قیمت

سوال 5.233: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n}a_k=-5$ اور $\sum_{k=1}^{n}b_k=6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$ ہ. $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 2a_k)$

ب. $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ د. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)$

جواب: (ا) -15 ، (ب) 1 ، (ج) 1 ، (د) -11 ، (ہ) 16

سوال 5.234: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ اور $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ ب. $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ د. $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

سوال 5.235 تا سوال 5.244 میں دیے گئے الجبرائی فقروں کی قیمتوں کو صفحہ 529 پر دیے گئے متناہی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات 5.13 میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال 5.235:

ا. $\sum_{k=1}^{10} k$ ب. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{10} k^3$

جواب: (ا) 55 ، (ب) 385 ، (ج) 3025

سوال 5.236:

ا. $\sum_{k=1}^{13} k$ ب. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{13} k^3$

سوال 5.237: $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

جواب: -56

سوال 5.238: $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

سوال 5.239: $\sum_{k=1}^{6}(3-k^2)$
جواب: -73

سوال 5.240: $\sum_{k=1}^{6}(k^2-5)$

سوال 5.241: $\sum_{k=1}^{5}k(3k+5)$
جواب: 240

سوال 5.242: $\sum_{k=1}^{7}k(2k+1)$

سوال 5.243: $\sum_{k=1}^{5}\frac{k^3}{225}+\left(\sum_{k=1}^{5}k\right)^3$
جواب: 3376

سوال 5.244: $\left(\sum_{k=1}^{7}k\right)^2-\sum_{k=1}^{7}\frac{k^3}{4}$

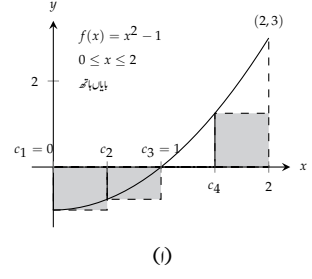
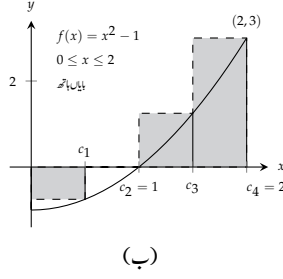
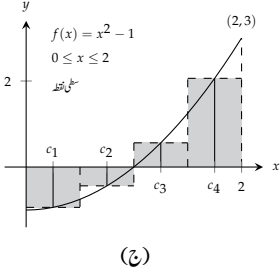
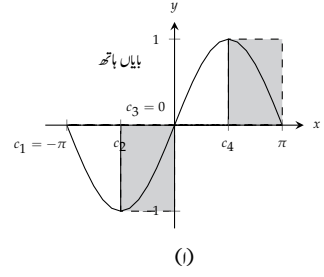
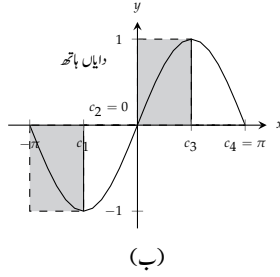
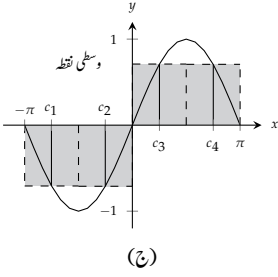
ریمان مجموعوں کے لئے مستطیلیں

سوال 5.245 تا سوال 5.248 میں تفاعل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کی ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{4}f(c_k)\Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k ویں ذیلی وقفہ کا (ا) بایاں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (بائیں، دائیں اور وسطی نقطوں کے لئے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال 5.245: $f(x)=x^2-1, \quad [0,2]$
جواب: شکل 5.37

سوال 5.246: $f(x)=-x^2, \quad [0,1]$

سوال 5.247: $f(x)=\sin x, \quad [-\pi,\pi]$
جواب: شکل 5.38

سوال 5.248: $f(x)=\sin x+1, \quad [-\pi,\pi]$

شکل 5.37: ریمان مجموعے برائے سوال 5.245

شکل 5.38: ریمان مجموعے برائے سوال 5.247

سوال 5.249: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔
جواب: 1.2

سوال 5.250: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمل اظہار

سوال 5.251 تا سوال 5.258 میں دیے گئے حد کو بطور قطعی تکمل ظاہر کریں۔

سوال 5.251: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0, 2]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x$

سوال 5.252: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.253: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-7, 5]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_{-7}^5 (x^2 - 3x) \,\mathrm{d}x$

سوال 5.254: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1, 4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.255: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2, 3]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_2^3 \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$

سوال 5.256: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ جہاں $[0, 1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال 5.257: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\sec c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔
جواب: $\int_{-\pi/4}^0 \sec x \,\mathrm{d}x$

سوال 5.258: $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\tan c_k) \Delta x_k$ جہاں $[0, \pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

مستقل تفاعل

سوال 5.259 تا سوال 5.264 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.259: $\int_{-2}^{1} 5\,\mathrm{d}x$
جواب: 15

سوال 5.260: $\int_{3}^{7} (-20)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.261: $\int_{0}^{3} (-160)\,\mathrm{d}t$
جواب: -480

سوال 5.262: $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 5.263: $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,\mathrm{d}s$
جواب: 2.75

سوال 5.264: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}r$

رقبہ سے تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 5.265 تا سوال 5.272 میں متکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبہ سے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 5.265: $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$
جواب: رقبہ=21 مربع اکائیاں

سوال 5.266: $\int_{1/2}^{3/2} (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.267: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: رقبہ $\frac{9\pi}{2}$ مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.268: $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.269: $\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$
جواب: رقبہ 2.5 مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.270: $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.271: $\int_{-1}^{1} (2-|x|)\,\mathrm{d}x$
جواب: رقبہ 3 مربع اکائیاں ہے۔

سوال 5.272: $\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$

سوال 5.273 تا سوال 5.276 میں تکمل کی قیمت کو رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال 5.273: $\int_0^b x\,\mathrm{d}x, \quad b>0$
جواب: $\frac{b^2}{2}$

سوال 5.274: $\int_0^b 4x\,\mathrm{d}x, \quad b>0$

سوال 5.275: $\int_a^b 2s\,\mathrm{d}s, \quad 0<a<b$
جواب: b^2-a^2

سوال 5.276: $\int_a^b 3t\,\mathrm{d}t, \quad 0<a<b$

قیمت کی تلاش

سوال 5.277 تا سوال 5.288 میں دیے تکمل کی قیمت کو مثال 5.33 اور مثال 5.34 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 5.277: $\int_1^{\sqrt{2}} x\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 5.278: $\int_{0.5}^{2.5} x\,\mathrm{d}x$

سوال 5.279: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{3\pi^2}{2}$

سوال 5.280: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r$

سوال 5.281: $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{7}{3}$

سوال 5.282: $\int_0^{0.3} s^2\,\mathrm{d}s$

سوال 5.283: $\int_0^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{24}$

سوال 5.284: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \, d\theta$

سوال 5.285: $\int_0^{2a} x \, dx$
جواب: $\frac{3a^2}{2}$

سوال 5.286: $\int_a^{\sqrt{3}a} x \, dx$

سوال 5.287: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2 \, dx$
جواب: $\frac{b}{3}$

سوال 5.288: $\int_0^{3b} x^2 \, dx$

رقبے کی تلاش

سوال 5.289 تا سوال 5.292 میں وقفہ $[0,b]$ پر x محور اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ قطعی تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 5.289: $y = 3x^2$
جواب: $\Delta x = \frac{b}{n}$ لمبائی کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیمتیں لیتے ہوئے: $\int_0^b 3x^2 \, dx = b^3$ = رقبہ

سوال 5.290: $y = \pi x^2$

سوال 5.291: $y = 2x$
جواب: $\Delta x = \frac{b}{n}$ لمبائی کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیمتیں لیتے ہوئے: $\int_0^b 2x \, dx = b^2$ = رقبہ

سوال 5.292: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.293: درج ذیل تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2) \, dx$$

جواب: $a = 0$ اور $b = 1$ تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

سوال 5.294: درج ذیل تکمل کی قیمت کم سے کم کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2) \, dx$$

سوال 5.295: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے
(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی n عدد یکساں لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں خانہ بندی P ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہے۔ شکل 5.39 کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر f کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو ترسیمی طور پر مستطیل R سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جس کی جسامت $[f(b) - f(a)]$ ضرب Δx ہے۔(اشارہ: فرق $H - L$ ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \cdots, Q_{n-1}Q_n$ اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔انہیں افقی مستطیل R پر منتقل کیا جا سکتا ہے۔)
(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی $[a, b]$ پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی Δx_k مختلف ہے۔ اگر Δx_H خانہ بندی P کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \le \left| f(b) - f(a) \Delta x_H \right|$$

ہو گا لہٰذا $\lim_{\|P\| \to 0}(H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 5.296: گھٹتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے
(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال 5.295 کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہیں۔ سوال 5.295 کی طرح فرق $H - L$ تلاش کریں۔
(ب) فرض کریں کہ خانوں کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر نہیں ہے بلکہ ہر Δx_k مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال 5.295 کی عدم مساوات

$$H - L \le \left| f(b) - f(a) \right| \Delta x_H$$

اب بھی کار آمد ہے لہٰذا $\lim_{\|P\| \to 0}(H - L) = 0$ ہو گا۔

سوال 5.297: تکمل $\int_0^b x^2 \, \mathrm{d}x, \, b > 0$ کی قیمت مثال 5.34 کی طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کریں (شکل 5.40)۔
جواب: $\frac{b^3}{3}$

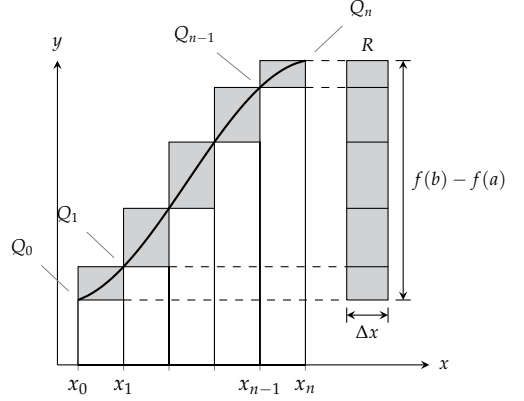
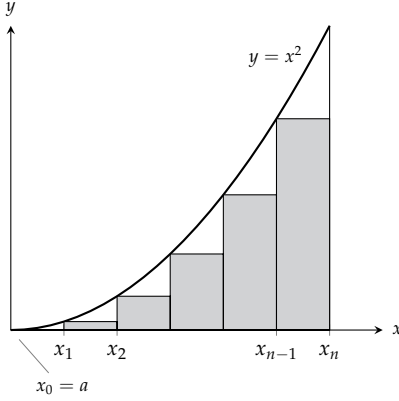
سوال 5.298: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\Big]$$

درحقیقت $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$ کا تخمینی رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n \to \infty} S_n$ تلاش کریں۔(اشارہ: وقفہ $[0, 1]$ کا یکساں n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کا بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال 5.299: درج ذیل

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

شکل 5.39: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق $[f(b) - f(a)]\Delta x$ ہو گا۔

شکل 5.40: ریمان مستطیل برائے سوال 5.297

کو

$$S_n = \frac{1}{n}\Big[\Big(\frac{1}{n})^2 + \Big(\frac{2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big]$$

روپ میں لکھیں جس کو $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سر نقطی قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

سوال 5.300: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m + 1/2)h}{2\sin(h/2)}$$

کرتے ہوئے $y = \sin x$ کے نیچے $x = 0$ تا $x = \pi/2$ رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ کو n برابر لمبائیوں کی ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ H تلاش کریں۔

ب. $n \to \infty$ اور $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$ کرتے ہوئے H کا حد تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.301 تا سوال 5.306 میں دیے گئے تکمل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد $n = 4, 10, 20, 50$ لیں اور ان کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر لیں۔

سوال 5.301: $\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$

سوال 5.302: $\int_0^1 (x^2+1)\,dx = \frac{4}{3}$

سوال 5.303: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = 0$

سوال 5.304: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = 1$

سوال 5.305: $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$

سوال 5.306: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2$

سوال 5.307: (ا) مجموعہ S_n جس کو سوال 5.298 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (ب) سوال 5.299 میں دیے گئے S_n کے لئے دوبارہ حل کریں۔

سوال 5.308: مجموعہ $\sin h + \sin 2h + \cdots \sin mh$ جسے سوال 5.300 میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی مدد سے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔

سوال 5.309: بائیں نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال 5.23 کے مجموعہ کی سگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} 4[9-(-2+(k-1))^2]$$

ا. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_8 اور S_{25} لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{4}{8}$ اور $\frac{4}{25}$ ہو گی۔

ب. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_n لکھیں جو n خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{4}{n}$ ہے۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال 5.310: بائیں سر نقطی قیمت مجموعہ برائے مثال 5.24 درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \pi[16-(-1+(k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطی مجموعہ S_{16} اور S_{80} کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{10}$ ہو گی۔

ب. بائیں سر نقطی مجموعہ S_n کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{8}{n}$ اور خانوں کی تعداد n ہو گی۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

5.6 خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں تکمل کے قواعد اور تکمل کا رقبے کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

قطعی تکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی تکملوں کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں یا متکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں یا ان کا موازنہ دیگر قطعی تکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

1. صفر: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (تعریف)

2. تکمل کی ترتیب: $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (تعریف)

3. مستقل مضرب: $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)
   $\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k=-1)$

4. مجموعہ اور فرق: $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mp \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

5. جمع پذیری: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

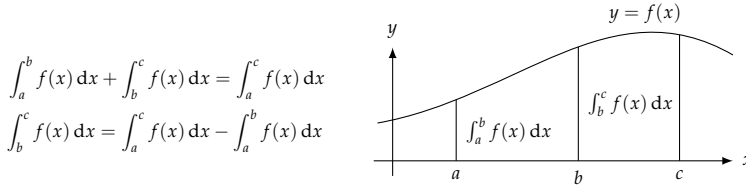
6. کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات: اگر وقفہ $[a,b]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت f_H اور کم سے کم قیمت f_L ہو تب درج ذیل ہو گا:

$$f_L\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f_H\cdot(b-a)$$

7. غلبہ: اگر $[a,b]$ پر $f(x)\ge g(x)$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر $[a,b]$ پر $f(x)\ge 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

شکل 5.41: قطعی تکمل کی جمع پذیری

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی تکمل کی تعریف بذریعہ ریمان مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ ریمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہٰذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعہ کا حد بھی یہی خواص رکھتا ہو گا۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے $\delta - \epsilon$ کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں ہیں۔ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی کے تمام تکمل کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $a = b$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $b < a$ کی صورت کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی تکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔دو تفاعل کے تکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ اور فرق کے تکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے اختیاری قابل تکمل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل $c_1, \cdot c_n$ جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ کے لئے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \cdots + c_n \int_a^n f_n(x)\,dx$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے، کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل 5.41 میں مثبت تفاعل کے لئے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے جو کسی بھی تفاعل کے لئے درست ہے۔

ثبوت: **قاعدہ** 3

قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب k کا تکمل تفاعل کا تکمل ضرب k ہو گا۔ یہ درج ذیل کی بنا پر درست ہے۔

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{\|P\|\to 0} k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= k\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \\
&= k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

ثبوت: قاعدہ 6
قاعدہ 6 کہتا ہے کہ $[a,b]$ پر تکمل کی قیمت کبھی بھی f کی کم سے کم قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی f کی زیادہ سے زیادہ قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $[a,b]$ کی کسی بھی خانہ بندی اور c_k کی کسی بھی انتخاب کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f_L\cdot(b-a) &= f_L\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_L\cdot\Delta x_k \\
&\le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \\
&\le f_H\cdot\Delta x_k \\
&= f_H\cdot\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k \\
&= f_H\cdot(b-a)
\end{aligned}$$

مختصراً وقفہ $[a,b]$ پر f کے تمام ریمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L\cdot(b-a)\le\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k\le f_H\cdot(b-a)$$

لہٰذا ان کا حد، یعنی تکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتا ہو گا۔

□

مثال 5.35: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \quad \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = 7$$

درج ذیل ہوں گا۔

.1

$$\int_{4}^{1} = -\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-2) = 2 \qquad \text{قاعدہ } 2$$

.2

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2(5) + 3(7) = 31 \qquad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}\end{aligned}$$

.3

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3 \qquad \text{قاعدہ } 5$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں درج ذیل تین عمومی تکملات کا حصول سیکھا۔

$$\int_{a}^{b} c\,\mathrm{d}x = c(b-a) \qquad (c \text{ مستقل}) \tag{5.16}$$

$$\int_{a}^{b} x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad (0 < a < b) \tag{5.17}$$

$$\int_{0}^{b} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad (b < 0) \tag{5.18}$$

صفحہ 555 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جا سکتی ہے۔

مثال 5.36: قیمت تلاش کریں: $\int_0^2 (\frac{t^2}{4} - 7t + 5)\,\mathrm{d}t$

حل:

$$\int_0^2 \Big(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 7\int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 5\,\mathrm{d}t \qquad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{2^3}{3}\Big) - 7\Big(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\Big) + 5(2-0) \qquad \text{مساوات 5.16 تا مساوات 5.18}$$
$$= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3}$$

□

مثال 5.37: قیمت تلاش کریں: $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

حل:

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{قاعدہ 5}$$
$$\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{درج بالا حل کریں}$$
$$= \frac{3^2}{3} - \frac{2^3}{3} \qquad \text{مساوات 5.18}$$
$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

□

ہم $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$ کے حل پر مزید غور حصہ 5.7 میں کریں گے۔

قطعی تکمل کا کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات (کمتر بلند تر عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتا ہے کہ $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ کا $f_L \cdot (b-a)$ کم سے کم حد ہے جبکہ $f_H \cdot (b-a)$ زیادہ سے زیادہ حد ہے۔

مثال 5.38: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

حل: وقفہ $[0,1]$ پر $\sqrt{1+\cos x}$ کی زیادہ سے زیادہ (بلند تر) قیمت $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ہے لہٰذا

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \le \sqrt{1+\cos x}_{\text{بلند تر}} \cdot (1-0) \qquad \text{قاعدہ 6}$$
$$\le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$$

تکمل کی قیمت $\sqrt{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تکمل 2 نہیں ہو سکتا ہے۔ □

مثال 5.39: عدم مساوات $\cos x \geq (1 - x^2/2)$ تمام x کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x$ کی کم سے کم (کمتر) قیمت تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x && \text{قاعدہ 7} \\
&\geq \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x && \text{قاعدہ 3، قاعدہ 4} \\
&\geq 1 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

تکمل کی قیمت کم از کم $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔ □

تکمل اور کل رقبہ

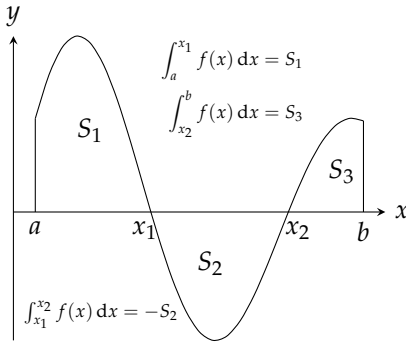
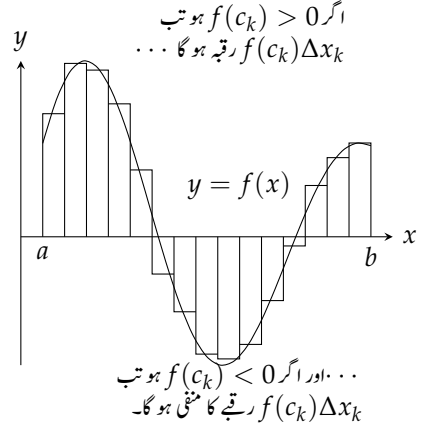
اگر وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو جس کی قیمت کہیں مثبت اور کہیں منفی ہو تب $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ x محور کے بالائی جانب مستطیلوں کے رقبوں اور x محور کے نیچے جانب مستطیلوں کے رقبوں کی منفی قیمتوں کا مجموعہ ہو گا (شکل 5.42)۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو کاٹتی ہیں لہٰذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تفاعل اور x محور کے بیچ کل رقبہ سے کم ہو گی۔ تکمل کی قیمت محور سے اوپر جانب رقبہ منفی محور سے نیچے جانب رقبہ کے برابر ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبہ کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

مثال 5.40: وقفہ $0 \leq x \leq 3$ پر منحنی $y = 4 - x^2$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: x پر وقفہ $[0, 3]$ کو منحنی دو خانوں میں تقسیم کرتی ہے۔ایک خانے میں $f(x) = 4 - x^2$ کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے (شکل 5.43)۔ منحنی اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

وقفہ $[0, 2]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (4 - x^2) \, \mathrm{d}x &= \int_0^2 4 \, \mathrm{d}x - \int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= 4(2 - 0) - \frac{(2)^3}{3} && \text{مساوات 5.16 اور مساوات 5.18} \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

(ا) ریمان مجموعہ رقبوں کا الجبرائی مجموعہ ہے اور دونوں کی تحدیدی قیمت تکمل ہے۔

(ب) a تا b تفاعل f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔
$\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{b} = S_1 - S_2 + S_3$

شکل 5.42: تکمل اور کل رقبہ کا تعلق۔

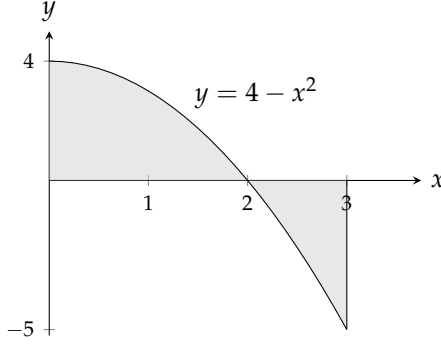
وقفہ $[2,3]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}\int_2^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 4\,\mathrm{d}x - \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 4(3-2) - \left(\frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^3}{3}\right) && \text{مساوات 5.16 اور مثال 5.37} \\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

کل رقبہ $\frac{16}{3} + \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{23}{3}$ ہو گا۔ □

اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

ہم نے مثال 5.25 میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب f کا غیر منفی ہونے کی شرط کو ختم کرتے ہوئے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک بار اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں n اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو n سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ بند وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کے لئے لامتناہی تعداد کے اعداد کو لینا ہو گا لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ

شکل 5.43: کچھ رقبہ x محور سے اوپر اور کچھ اس سے نیچے پایا جاتا ہے (مثال 5.40)۔

حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کو برابر لمبائیوں کے n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر f کی قیمت نقطہ c_k پر حاصل کرتے ہیں (شکل 5.44)۔ ان n نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\frac{f(c_1) + f(c_2) + \cdots + f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \text{مجموعہ کی سگما روپ} \\
&= \frac{\Delta x}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x}_{\text{پر } f \text{ کا ریمان مجموعہ } [a,b]}
\end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ ضرب $\frac{1}{b-1}$ ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونہ کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، یہ اوسط قیمت $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ تک پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

تعریف: اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل تفاعل ہو تب $[a, b]$ پر f کی **اوسط قیمت**[30] درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

[30] average (mean) value

شکل 5.44: وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل کی نمونی قیمتیں۔

شکل 5.45: وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $f = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت 1 کو تفاعل $x = \sqrt{3}$ پر اختیار کرتا ہے (مثال 5.41)۔

مثال 5.41: وقفہ $[0, 3]$ پر $f(x) = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر f کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

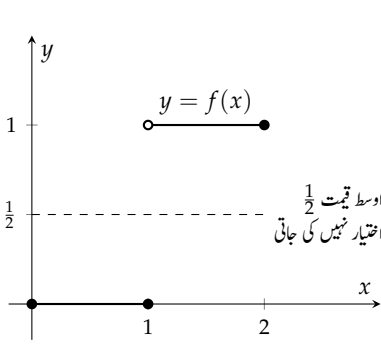
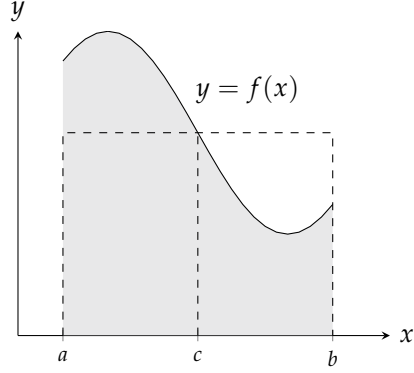
حل:

$$
\begin{aligned}
f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(\int_0^3 4\,\mathrm{d}x - \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4(3-0) - \frac{(3)^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(12-9) = 1
\end{aligned}
$$

وقفہ $[0, 3]$ پر f کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تفاعل کی قیمت یہی تب ہو گی جب $4 - x^2 = 1$ ہو گا جس سے $x = \mp\sqrt{3}$ ملتے ہیں۔ چونکہ ان دو نقطوں میں سے صرف $x = \sqrt{3}$ وقفہ $[0, 3]$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا دیے گئے وقفے میں $x = \sqrt{3}$ پر f کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی (شکل 5.45)۔ □

اوسط قیمت مسئلہ برائے قطعی تکملات

بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک بار، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی۔ اس فقرے کو قطعی تکملات کا اوسط قیمت مسئلہ کہتے ہیں۔

مسئلہ 5.2: **مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات**

شکل 5.47: غیر استمراری تفاعل ضروری نہیں کہ اوسط قیمت اختیار کرے۔

شکل 5.46: وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ c پر $f(c) \cdot (b-1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔

اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل ہو تب $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر درج ذیل ہو گا (شکل 5.46)۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہم نے مثال 5.41 میں f کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پر کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی ہے کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال 5.41 میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ 5.2 ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہو گی۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5-2
اگر ہم قاعدہ 6 میں (کمتر بلند تر قاعدہ) دونوں اطراف کو $(b-a)$ سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f_H$$

چونکہ f استمراری ہے لہٰذا استمراری تفاعل کے مسئلہ 2.9 کے تحت تفاعل f_L اور f_H کے بیچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح f ہر صورت وقفہ $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے چھلانگ لگا کر گزر سکتا ہے (شکل 5.47)۔

ہم مسئلہ 5.2 سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 5.42: اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل ہو جہاں $a \neq b$ ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

ہو تب $[a, b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = 0$ ہو گا۔

حل: وقفہ $[a, b]$ پر f کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

مسئلہ 5.2 کے تحت $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر f یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔ □

سوالات

معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال 5.311: فرض کریں f اور g استمراری ہیں اور درج ذیل تکملات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 8$$

صفحہ 555 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_2^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ ج. $\int_1^2 3f(x)\,\mathrm{d}x$ ہ. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_5^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ د. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ و. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) 0، (ب) -8، (ج) -12، (د) 10، (ہ) -2، (و) 16

سوال 5.312: فرض کریں f اور f استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 h(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

صفحہ 555 پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^9 -2f(x)\,\mathrm{d}x$ ج. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,\mathrm{d}x$ ھ. $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x$ د. $\int_9^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ و. $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$

سوال 5.313: فرض کریں $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u$ ج. $\int_2^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

ب. $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,\mathrm{d}z$ د. $\int_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

جواب: (ا) 5 ،(ب) $5\sqrt{3}$ ،(ج) -5 ،(د) -5

سوال 5.314: فرض کریں $\int_{-3}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$ دیا گیا ہے۔درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_0^{-3} g(t)\,\mathrm{d}t$ ب. $\int_{-3}^0 g(u)\,\mathrm{d}u$ ج. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,\mathrm{d}x$ د. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r$

سوال 5.315: فرض کریں f استمراری ہے جبکہ $\int_0^3 f(z)\,\mathrm{d}z = 3$ اور $\int_0^4 f(z)\,\mathrm{d}z = 7$ دیے گیے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_3^4 f(z)\,\mathrm{d}z$ ب. $\int_4^3 f(t)\,\mathrm{d}t$

جواب: (ا) 4 ،(ب) -4

سوال 5.316: فرض کریں h استمراری ہے جبکہ $\int_{-1}^1 h(r)\,\mathrm{d}r = 0$ اور $\int_{-1}^3 h(r)\,\mathrm{d}r = 6$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

ا. $\int_1^3 h(r)\,\mathrm{d}r$ ب. $-\int_3^1 h(u)\,\mathrm{d}u$

سوال 5.317 تا سوال 5.328 میں دیے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.317: $\int_3^1 7\,\mathrm{d}x$
جواب: -14

سوال 5.318: $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.319: $\int_0^2 5x \,\mathrm{d}x$
جواب: 10

سوال 5.320: $\int_3^5 \frac{x}{8} \,\mathrm{d}x$

سوال 5.321: $\int_0^2 (2t-3) \,\mathrm{d}t$
جواب: -2

سوال 5.322: $\int_0^{\sqrt{2}} (t-\sqrt{2}) \,\mathrm{d}t$

سوال 5.323: $\int_2^1 (1+\frac{z}{2}) \,\mathrm{d}z$
جواب: $-\frac{7}{4}$

سوال 5.324: $\int_3^0 (2z-3) \,\mathrm{d}z$

سوال 5.325: $\int_1^2 3u^2 \,\mathrm{d}u$
جواب: 7

سوال 5.326: $\int_{1/2}^1 24u^2 \,\mathrm{d}u$

سوال 5.327: $\int_0^2 (3x^2+x-5) \,\mathrm{d}x$
جواب: 0

سوال 5.328: $\int_1^0 (3x^2+x-5) \,\mathrm{d}x$

رقبے

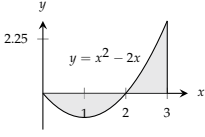
سوال 5.329 تا سوال 5.332 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

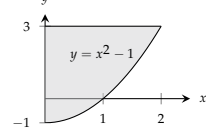
سوال 5.329: $x=0$ تا $x=2$ کے مابین منحنی $y=x^2-1$ اور y محور کے بیچ رقبہ (شکل 5.48)۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 5.330: رقبہ شکل 5.49 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5.331: رقبہ شکل 5.50 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\frac{19}{3}$

سوال 5.332: رقبہ شکل 5.51 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 5.48: رقبہ سوال 5.329

شکل 5.49: رقبہ سوال 5.330

شکل 5.50: رقبہ سوال 5.331

شکل 5.51: رقبہ سوال 5.332

سوال 5.333 تا سوال 5.336 میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (ا) دیے وقفے پر تفاعل تکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.333: $y = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3]$
جواب: (ا) 6، (ب) $\frac{22}{3}$

سوال 5.334: $y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0, 2]$

سوال 5.335: $y = 2x - x^2, \quad [0, 3]$
جواب: (ا) 0، (ب) $\frac{8}{3}$

سوال 5.336: $y = x^2 - 4x, \quad [0, 5]$

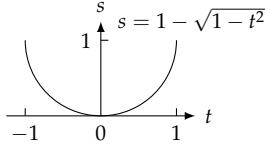
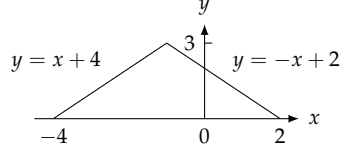
اوسط قیمت

سوال 5.337 تا سوال 5.344 میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اس وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ دیے گئے وقفہ پر کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی؟

سوال 5.337: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$
جواب: $x = 1$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = 0$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.338: $f(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad [0, 3]$

سوال 5.339: $f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0, 1]$
جواب: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = -2$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.340: $f(x) = 3x^2 - 3, \quad [0, 1]$

شکل 5.52

شکل 5.53

سوال 5.341: $f(t) = (t-1)^2, \quad [0,3]$
جواب: $t = 0$ اور $t = 2$ پر اوسط قیمت $f_{\text{اوسط}} = 1$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.342: $f(t) = t^2 - t, \quad [-2,1]$

سوال 5.343: $g(x) = |x| - 1, \quad [0,3]$(ا)، $[1,3]$(ب)، $[-1,3]$(ج)
جواب: (ا) $x = \mp\frac{1}{2}$ پر اوسط قیمت $g_{\text{اوسط}} = -\frac{1}{2}$ اختیار کی جاتی ہے۔(ب) $x = 2$ پر $g_{\text{اوسط}} = 1$ اختیار کی جاتی ہے۔(ج) $x = \frac{5}{4}$ پر $g_{\text{اوسط}} = \frac{1}{4}$ اختیار کی جاتی ہے۔

سوال 5.344: $h(x) = -|x|, \quad [-1,0]$(ا)، $[0,1]$(ب)، $[-1,1]$(ج)

سوال 5.345 تا سوال 5.348 دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر تکمل) تلاش کریں۔

سوال 5.345:

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & -4 \le x \le -1 \\ -x+2, & -1 < x \le 2 \end{cases} \qquad [-4,2] \qquad \text{شکل 5.52}$$

جواب: $\frac{3}{2}$

سوال 5.346: وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(t) = 1 - \sqrt{1-t^2}$ جس کو شکل 5.53 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 5.347: وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $f(t) = \sin t$ دیا گیا ہے۔
جواب: 0

سوال 5.348: وقفہ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ پر تفاعل $f(\theta) = \tan\theta$ دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.349: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

جواب: بالائی حدود=1، زیریں حدود=1/2

سوال 5.350: کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کے لئے بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0.5}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال 5.351: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی ہے۔

سوال 5.352: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{x+8}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $2\sqrt{2}$ اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال 5.353: فرض کریں f استمراری ہے اور $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[1,2]$ پر کم از کم ایک بار $f(x) = 4$ ہو گا۔

سوال 5.354: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g استمراری ہیں جہاں $a \neq b$ ہے۔ مزید $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 0$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[a,b]$ میں کم از کم ایک بار $f(x) = g(x)$ ہو گا۔

سوال 5.355: غیر منفی تفاعل کا تکمل
کمتر بلند تر عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a,b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

سوال 5.356: غیر مثبت تفاعل کا تکمل
درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a,b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

سوال 5.357: عدم مساوات $\sin x \le x$ کسی بھی $x \ge 0$ کے لئے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \sin x \,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔
جواب: بالائی حدود=1/2

سوال 5.358: وقفہ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ پر عدم مساوات $\sec x \ge 1 + \frac{x^2}{2}$ درست ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے $\int_0^1 \sec x \,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال 5.359: اگر $[a, b]$ پر قابل تکمل f کی عمومی قیمت $f_{\text{اوسط}}$ ہو تب $[a, b]$ پر عدد $f_{\text{اوسط}}$ اور f کے تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}} \,\mathrm{d}x = \int_a^b f \,\mathrm{d}x$$

سوال 5.360: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

ا. $(f + g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$

ب. $(kf)_{\text{اوسط}} = k(f_{\text{اوسط}})$

ج. $f(x) \le g(x)$ اگر $f_{\text{اوسط}} \le g_{\text{اوسط}}$

سوال 5.361: اگر $150\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟
جواب: $37.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

سوال 5.362: ایک ڈیم سے $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد $20\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے مزید $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

5.7 بنیادی مسئلہ

اس حصہ میں تکملی احصاء کا بنیادی مسئلہ پیش کیا جائے گا جو تکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں بہت زیادہ ترقی کو ممکن بنایا جس نے اگلے دو صدیوں تک سائنس میں ہلچل مچا دی۔انسانی تاریخ میں اس مسئلہ کی دریافت کو سب سے زیادہ اہم تصور کیا جاتا ہے۔ لبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل تکمل تفاعل $f(t)$ کا مقررہ عدد a سے عدد x تک تکمل از خود ایک تفاعل F ہو گا جس کی x پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.19}$$

مثال کے طور پر اگر f غیر منفی ہو اور a کے دائیں جانب x پایا جاتا ہو تب a تا x ترسیم کے نیچے رقبہ $F(x)$ ہو گا۔ تکمل کا بالائی حد x ہے اور F کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی طرح ایک تفاعل ہے۔ یوں متغیر x کی ہر قیمت کے لئے $F(x)$ ایک مخصوص قیمت دیگا جو a تا x تفاعل f کا تکمل ہو گا۔

نئے تفاعل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات 5.19 دیتی ہے جو تفرقی مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات 5.19 کا یہاں ذکر کرنا اس لئے ضروری ہے کہ یہ تکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر f کوئی بھی استمراری تفاعل ہو تب F متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق f ہو گا۔ اس طرح ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلہ کا پہلا جزو دیتا ہے۔

مسئلہ 5.3: احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو اول
اگر $[a,b]$ پر f استمراری ہو تب $[a,b]$ کے ہر نقطہ پر $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad a \le x \le b \tag{5.20}$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات 5.20 پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کے لئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کسی دوسرے تفاعل، یعنی $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$، کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل کا الٹ تفرق پایا جاتا ہے۔ اور یہ کہتی ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

ثبوت: برائے مسئلہ 5-3
ہم تفرق کی تعریف کو تفاعل $F(x)$ پر لاگو کرتے ہوئے اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{5.21}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ $h \to 0$ کرتے ہوئے اس کا حد $f(x)$ ملتا ہے۔

مساوات 5.21 میں $F(x+h)$ اور $F(x)$ کی تکملی روپ پر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

صفحہ 555 پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے تکملات دائیں ہاتھ کی درج ذیل سادہ روپ دیتی ہے

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا مساوات 5.21 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5.22}$$

مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات (مسئلہ 5.2) کے تحت مساوات 5.22 میں دی گئی آخری تعلق کی قیمت، وقفہ x تا $x+h$ پر f کی کسی ایک قیمت کے برابر ہو گی۔یوں اس وقفہ میں کسی عدد c پر درج ذیل ہو گا۔

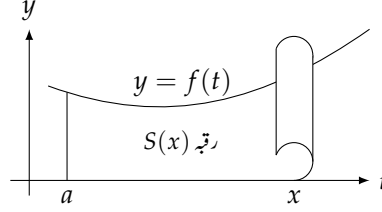
$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \tag{5.23}$$

یوں $h \to 0$ کرتے ہوئے $\frac{1}{h}$ ضرب تکمل $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت جاننے کی لئے ہم $h \to 0$ کرتے ہوئے $f(c)$ کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے $h \to 0$ ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر $x+h$ اس کے سر x کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے c بھی x کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ x پر f استمراری ہے لہٰذا $f(c)$ کی قیمت $f(x)$ کے قریب سے قریب پہنچتی ہے:

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{5.24}$$

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \text{تفرق کی تعریف}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{مساوات 5.22}\\ &= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{مساوات 5.23}\\ &= f(x) && \text{مساوات 5.24}\end{aligned}$$

شکل 5.54: نقطہ x پر زمین کو قالین شرح $f(x)$ $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} =$ سے ڈھانپتا ہے۔

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر f کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

کی ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کی جا سکتی ہے۔چونکہ تب a تا x تفاعل f کا تکمل a تا x محور x اور f کے بیچ رقبہ ہو گا۔فرض کریں کہ آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں چلتے ہوئے ایک قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی $f(t)$ ہو۔جب قالین نقطہ x سے گزرتا ہے اس لمحہ زمین ڈھانپنے کی شرح $f(x)$ ہو گی (شکل 5.54)۔

مثال 5.43:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\pi}^x \cos t\,\mathrm{d}t = \cos x \qquad \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \tfrac{1}{1+t^2}$$

□

مثال 5.44: اگر $y = \int_1^{x^2} \cos t\,\mathrm{d}t$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گا؟

حل: دھیان رہے کہ تکمل کا بالائی حد x^2 ہے نا کہ x لہٰذا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہوئے y کو

$$y = \int_1^u \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{اور} \quad u = x^2$$

کا مرکب تصور کر کے زنجیری قاعدہ استعمال کرنا ہو گا:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^u \cos t\,\mathrm{d}t \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && y \text{ کا کلیہ پر کیا گیا ہے}\\
&= \cos u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \text{مساوات 5.20 میں } f(t) = \cos t \text{ ہے}\\
&= \cos x^2 \cdot 2x && u = x^2\\
&= 2x\cos x^2 && \text{جواب کی عمومی صورت}
\end{aligned}$$

□

مثال 5.45: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کو تکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \tan x && \text{تفرقی مساوات}\\
y(1) &= 5 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}$$

حل: درج ذیل تفاعل

$$F(x) = \int_1^x \tan t\,\mathrm{d}t$$

$\tan t$ کا الٹ تفرق ہے۔یوں مساوات کا عمومی حل

$$y = \int_1^x \tan u\,\mathrm{d}t + C$$

ہو گا جہاں مستقل C کی قیمت ابتدائی معلومات سے اخذ ہو گی:

$$\begin{aligned}
5 &= \int_1^1 \tan t\,\mathrm{d}t + C \quad y(1) = 5\\
5 &= 0 + C\\
C &= 5
\end{aligned} \tag{5.25}$$

ابتدائی قیمت مسئلے کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \int_1^x \tan t\,\mathrm{d}t + 5$$

تفاعل $F(x)$ لکھتے ہوئے ہم نے تکمل کا زیریں حد 1 کیوں منتخب کیا؟ درحقیقت ہم کسی بھی عدد کو زیریں حد منتخب کر سکتے ہیں لیکن ابتدائی معلومات میں دی گئی x کی ابتدائی قیمت $x = 1$ بہترین انتخاب ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے ابتدائی شرط لاگو کرتے ہوئے تکمل کی قیمت صفر حاصل ہوتی ہے (جیسے مساوات 5.25 میں ہوئی) اور C خود بخود y کی ابتدائی قیمت کے برابر حاصل ہو گی۔ □

قطعی تکمل کی قیمت کا حصول

ہم اب احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو دوم کی بات کرتے ہیں جو قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرنے کے بارے میں ہے۔

مسئلہ 5.4: **احصاء کا بنیادی مسئلہ، جزو دوم**
اگر $[a,b]$ کے ہر نقطہ پر f استمراری ہو اور $[a,b]$ پر f کا الٹ تفرق F ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{5.26}$$

درج بالا مسئلہ کہتا ہے کہ a تا b استمراری تفاعل f کے تکمل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہمیں f کا الٹ تفرق F چاہیے جس سے قطعی تکمل کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل ہو گی۔ الٹ تفرق کی موجودگی کو بنیادی مسئلے کا جزو اول یقینی بناتا ہے۔

ثبوت: **برائے مسئلہ 5.4**
ہم جانتے ہیں کہ ایک جیسے تفرق رکھنے والے تفاعل میں صرف مستقل کا فرق ممکن ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ درج ذیل ایک تفاعل ہے جس کا تفرق f ہے۔

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اگر F ایسا دوسرا تفاعل ہو جس کا تفرق f ہو تب پورے $[a,b]$ پر درج ذیل ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

$$F(x) = G(x) + C \tag{5.27}$$

آئیں مساوات 5.27 سے $F(b) - F(a)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\
&= G(b) - G(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - 0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

یوں مساوات 5.26 حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال 5.46:

ا. $\int\limits_0^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

ب. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x|_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec(-\frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}$

ج.

$$\begin{aligned}\int\limits_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) \mathrm{d}x &= \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{1}\right] \\ &= [8+1] - [5] = 4\end{aligned}$$

□

ہم نے حصہ 5.5 میں x اور x^2 کے تکمل کے کلیات دریافت کیے جن کی وضاحت مسئلہ 5.4 کرتا ہے۔ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ a اور b کی علامتوں پر کسی پابندی کے بغیر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b x \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

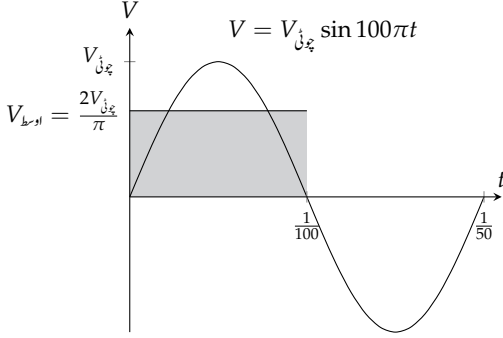
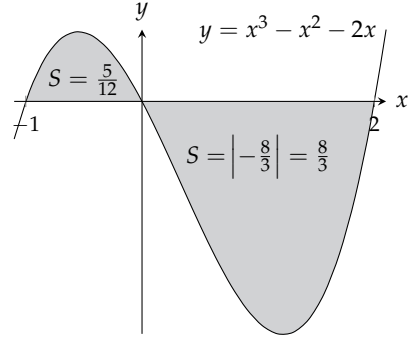
چونکہ x کا الٹ تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے

$$\int_a^b x^2 \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

چونکہ x^2 کا الٹ تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے

مثال 5.47: تفاعل $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ کی ترسیم اور x محور کے بیچ $x = -1$ تا $x = 2$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: پہلے f کے صفر تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ f کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

شکل 5.56: گھریلو برقی دباو کی ترسیم۔ نصف چکر کا اوسط $\frac{2V_{\text{چوٹی}}}{\pi}$ جبکہ مکمل چکر کا اوسط صفر ہے۔

شکل 5.55: تفاعل $y = x^3 - x^2 - 2x$ اور x محور کے بیچ رقبہ (مثال 5.47)۔

لہٰذا اس کے صفر $x = 0$ ، $x = -1$ اور $x = 2$ ہوں گے جو $[-1, 2]$ کو دو خانوں میں تقسیم کرتا ہے (شکل 5.55)۔ خانہ $[-1, 0]$ میں $f \geq 0$ اور خانہ $[0, 2]$ میں $f \leq 0$ ہے۔ ہم f کا تکمل دونوں ذیلی وقفوں پر علیحدہ علیحدہ حاصل کر کے ان کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} \qquad \text{ذیلی وقفہ } [-1, 0] \text{ پر تکمل}$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2} \qquad \text{ذیلی وقفہ } [0, 2] \text{ پر تکمل}$$

$$= \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

$$\text{کل رقبہ} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

□

مثال 5.48: گھریلو برق

گھریلو صارفین کو بدلتا رو برقی دباو فراہم کیا جاتا ہے جس کا نمونہ کشی درج ذیل سائن تفاعل کرتا ہے

$$V = V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t$$

جہاں V اور t کی اکائیاں بالترتیب وولٹ اور سیکنڈ ہیں۔ اس تفاعل کی تعدد 50 ہرٹز یعنی پچاس چکر فی سیکنڈ ہے۔ مثبت مستقل $V_{\text{چوٹی}}$

کو **دباو کی چوٹی**[31] کہتے ہیں۔

نصف چکر ($\frac{1}{100}$ دورانیہ) پر V کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں (شکل 5.56)۔

$$\begin{aligned}
V_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{(\frac{1}{100}) - 0} \int_0^{1/100} V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t \,\mathrm{d}t \\
&= 100 V_{\text{چوٹی}} \Big[-\frac{1}{100\pi} \cos 100\pi t \Big]_0^{1/100} \\
&= \frac{V_{\text{چوٹی}}}{\pi} [-\cos\pi + \cos 0] \\
&= \frac{2V_{\text{چوٹی}}}{\pi}
\end{aligned}$$

□

مکمل چکر پر گھریلو برقی دباو کی اوسط صفر ہے جو شکل 5.56 کو دیکھ کر ظاہر ہے (سوال 5.426 بھی دیکھیں)۔ اوسط برقی دباو پیما ہماری گھریلو برقی دباو کو صفر ناپے گی۔

برقی دباو کی پیمائش موثر طریقہ سے کرنے کی خاطر ہم ایسا آلہ استعمال کرتے ہیں جو برقی دباو کے مربع کی اوسط کے جذر ($V_{\text{موثر}}$) کی پیمائش کرتا ہو:

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{(V^2)_{\text{اوسط}}}$$

چونکہ $V^2 = (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t$ کی ایک چکر پر اوسط قیمت درج ذیل ہے

$$(V^2)_{\text{اوسط}} = \frac{1}{(1/50) - 0} \int_0^{1/50} (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t \,\mathrm{d}t = \frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{2} \tag{5.28}$$

لہٰذا موثر برقی دباو درج ذیل ہو گی (سوال 5.426-ج)۔

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{2}} = \frac{V_{\text{چوٹی}}}{\sqrt{2}} \tag{5.29}$$

گھریلو برقی دباو اور برقی رو کی قیمتوں کا ذکر کرتے ہوئے ان کی موثر قیمتیں بتائی جاتی ہیں۔ یوں 230 وولٹ بدلتا برقی دباو سے مراد برقی دباو کی موثر قیمت ہے جس کی چوٹی درج ذیل ہو گی جو موثر قیمت سے کافی زیادہ ہے۔

$$V_{\text{چوٹی}} = \sqrt{2} V_{\text{موثر}} = \sqrt{2} \cdot 230 = 325 \quad (\text{وولٹ})$$

---

[31] peak voltage

سوالات

تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 5.363 تا سوال 5.388 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.363: $\int\limits_{-2}^{0}(2x+5)\,\mathrm{d}x$

جواب: 6

سوال 5.364: $\int_{-3}^{4}(5-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$

سوال 5.365: $\int_{0}^{4}(3x-\frac{x^3}{4})\,\mathrm{d}x$

جواب: 8

سوال 5.366: $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.367: $\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

جواب: 1

سوال 5.368: $\int_{0}^{5}x^{3/2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.369: $\int_{1}^{32}x^{-6/5}\,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{5}{2}$

سوال 5.370: $\int_{-2}^{-1}\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.371: $\int_{0}^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x$

جواب: 2

سوال 5.372: $\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.373: $\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

جواب: $2\sqrt{3}$

سوال 5.374: $\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\csc^2 x\,\mathrm{d}x$

سوال 5.375: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc\theta \cot\theta \,\mathrm{d}\theta$
جواب: 0

سوال 5.376: $\int_{0}^{\pi/3} 3\sec u \tan u \,\mathrm{d}u$

سوال 5.377: $\int_{\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t$
جواب: $-\frac{\pi}{4}$

سوال 5.378: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1-\cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t$

سوال 5.379: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2 + \sin y) \,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{2\pi^3}{3}$

سوال 5.380: $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} (4\sec^2 t + \frac{\pi}{t^2}) \,\mathrm{d}t$

سوال 5.381: $\int_{1}^{-1} (r+1)^2 \,\mathrm{d}r$
جواب: $-\frac{8}{3}$

سوال 5.382: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4) \,\mathrm{d}t$

سوال 5.383: $\int_{\sqrt{2}}^{1} (\frac{u^7}{2} - \frac{1}{u^5}) \,\mathrm{d}u$
جواب: $-\frac{3}{4}$

سوال 5.384: $\int_{1/2}^{1} (\frac{1}{v^3} - \frac{1}{v^4}) \,\mathrm{d}v$

سوال 5.385: $\int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2} \,\mathrm{d}s$
جواب: $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$

سوال 5.386: $\int_{9}^{4} \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u$

سوال 5.387: $\int_{-4}^{4} |x| \,\mathrm{d}x$
جواب: 16

سوال 5.388: $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x + |\cos x|) \,\mathrm{d}x$

تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل

سوال 5.389 تا سوال 5.396 میں بدل کی استعمال سے الٹ تفرق حاصل کرتے ہوئے بنیادی مسئلہ کی مدد سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 5.389: $\int_0^1 (1-2x)^3 \, \mathrm{d}x$
جواب: 0

سوال 5.390: $\int_1^2 \sqrt{3x+1} \, \mathrm{d}x$

سوال 5.391: $\int_0^1 t\sqrt{t^2+1} \, \mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$

سوال 5.392: $\int_{-1}^2 \frac{t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2+8}}$

سوال 5.393: $\int_0^\pi \sin^2(1+\frac{\theta}{2}) \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{\pi}{2} + \sin 2$

سوال 5.394: $\int_{3\pi/8}^{\pi/2} \sec^2(\pi - 2\theta) \, \mathrm{d}\theta$

سوال 5.395: $\int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4} \, \mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

سوال 5.396: $\int_{2\pi/3}^{\pi} \tan^3 \frac{x}{4} \sec^2 \frac{x}{4} \, \mathrm{d}x$

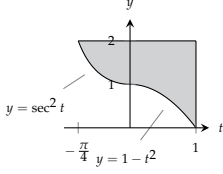
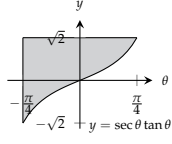
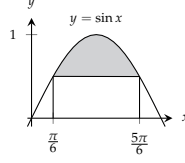
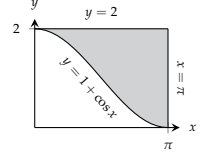
رقبہ

سوال 5.397 تا سوال 5.402 میں دیے وقفے پر تفاعل کی ترسیم اور x محور کے بیچ کل رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.397: $y = -x^2 - 2x, \quad -3 \le x \le 2$
جواب: $\frac{28}{3}$

سوال 5.398: $y = 3x^2 - 3, \quad -2 \le x \le 2$

سوال 5.399: $y = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad 0 \le x \le 2$
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 5.400: $y = x^3 - 4x, \quad -2 \le x \le 2$

شکل 5.57 شکل 5.58 شکل 5.59 شکل 5.60

سوال 5.401: $y = x^{1/3}, \quad -1 \le x \le 8$
جواب: $\frac{51}{4}$

سوال 5.402: $y = x^{1/3} - x, \quad -1 \le x \le 8$

سوال 5.403 تا سوال 5.406 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.403: وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر تفاعل $y = 1 + \cos x$ اور $y = 2$ کے بیچ رقبہ (شکل 5.57)۔
جواب: π

سوال 5.404: وقفہ $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ پر $y = \sin x$ اور $y = \frac{1}{2}$ کے بیچ رقبہ (شکل 5.58)۔

سوال 5.405: وقفہ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ پر $y = \sec\theta \tan\theta$ اور $y = \sqrt{2}$ کے بیچ رقبہ (شکل 5.59)۔
جواب: $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

سوال 5.406: وقفہ $-\frac{\pi}{4} \le x \le 0$ پر $y = \sec^2 t$ اور وقفہ $0 \le x \le 1$ پر $y = 1 - t^2$ ہے۔ ان تفاعل اور $y = 2$ کے بیچ رقبہ (شکل 5.60)۔

تکمل کا تفرق سوال 5.407 تا سوال 5.410 میں (ا) تکمل حل کر کے جواب کا تفرق لیں، (ب) تکمل سے سیدھا تفرق حاصل کریں۔

سوال 5.407: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, \mathrm{d}t$
جواب: $(\cos \sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

سوال 5.408: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{\sin x} 3t^2 \, \mathrm{d}t$

سوال 5.409: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^{t^4} \sqrt{u} \, \mathrm{d}u$
جواب: $4t^5$

سوال 5.410: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^{\tan\theta}\sec^2 y\,\mathrm{d}y$

سوال 5.411 تا سوال 5.416 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 5.411: $y=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\sqrt{1+x^2}$

سوال 5.412: $y=\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t,\quad x>0$

سوال 5.413: $y=\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$

سوال 5.414: $y=\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

سوال 5.415: $y=\int_0^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},\quad |x|<\frac{\pi}{2}$
جواب: 1

سوال 5.416: $y=\int_0^{\tan x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل تفاعل سوال 5.417 تا سوال 5.420 میں کسی ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔ کون سا تفاعل کس مسئلے کو حل کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ا. $y=\int_1^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-3$

ب. $y=\int_0^x\sec t\,\mathrm{d}t+4$

ج. $y=\int_{-1}^x\sec t\,\mathrm{d}t+4$

د. $y=\int_\pi^x\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-3$

سوال 5.417: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x},\quad y(\pi)=-3$
جواب: چونکہ $y'=\frac{1}{x}$ اور $y(\pi)=\int_\pi^\pi\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-3=-3$ ہیں للذا د درست ہے۔

سوال 5.418: $y'=\sec x,\quad y(-1)=4$

سوال 5.419: $y'=\sec x,\quad y(0)=4$
جواب: چونکہ $y=\sec x$ اور $y(0)=\int_0^0\sec t\,\mathrm{d}t+4=4$ ہیں للذا ب درست ہے۔

سوال 5.420: $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

سوال 5.421 تا سوال 5.424 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل کو تکمل کی صورت میں لکھیں۔

سوال 5.421: $\frac{dy}{dx} = \sec x, \quad y(2) = 3$
جواب: $y = \int_2^x \sec t \, dt + 3$

سوال 5.422: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2}, \quad y(1) = -2$

سوال 5.423: $\frac{ds}{dt} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$
جواب: $s = \int_{t_0}^t f(x) \, dx + s_0$

سوال 5.424: $\frac{dv}{dt} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

عملی استعمال

سوال 5.425: قطع مکافی کے رقبہ کا آرشمیدس کلیہ
آرشمیدس (212-287 قبل مسیح) نے قطع مکافی کے نیچے رقبے کا کلیہ دریافت کیا جس کے تحت قد ضرب قاعدہ کی دو تہائی رقبہ ہو گا۔

ا. تکمل کی مدد سے درج محراب $y = 6 - x - x^2, \ -3 \le x \le 2$ کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

ب. محراب کا قد تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ قاعدہ b ضرب قد h کی دو تہائی اس رقبہ کے برابر ہو گا۔

د. b اور h کو مثبت تصور کرتے ہوئے $-\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}$ پر قطع مکافی محراب $y = h - (\frac{4h}{b^2})x^2$ ترسیم کریں۔ احصاء کی مدد سے اس محراب اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

جواب: (ا) $\frac{125}{6}$، (ب) $h = \frac{25}{4}$، (د) $d = \frac{2}{3}bh$

سوال 5.426: تسلسل (مثال 5.48)

ا. درج ذیل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ ایک پورے چکر پر $V = V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t$ کی اوسط قیمت صفر ہو گی۔

$$\frac{1}{(1/50) - 0} \int_0^{1/50} V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t \, dt$$

ب. کئی ممالک میں گھریلو صارفین کو $110V_{\text{موثر}}$ فراہم کی جاتی ہے۔ ان کے ہاں برقی دباو کی چوٹی کتنی ہو گی؟

ج. درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_0^{1/50} (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t \, dt = \frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{100}$$

سوال 5.427: حاشیہ لاگت سے لاگت
اشتہار چھاپنے کی حاشیہ لاگت $\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ہے جہاں x تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ (ا) اشتہار 2 تا 100 چھاپنے کی لاگت $c(100) - c(1)$ تلاش کریں۔ (ب) اشتہار 101 تا 400 چھاپنے کی لاگت تلاش کریں۔
جواب: (ا) 9، (ب) 10

سوال 5.428: حاشیہ آمدنی سے آمدنی
فرض کریں ایک ادارہ مرغی کے انڈے مارنے والی مشین بناتی ہے جس کی پیداوار اور فروخت سے ادارے کو $\frac{dr}{dx} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$ حاشیہ آمدنی حاصل ہوتی ہے جہاں r کی اکائی ہزار روپیہ اور x کی اکائی ہزار مشین ہے۔ اگر انڈے مارنے والی مشینوں کی پیداوار $x = 3$ ہزار ہو تب کتنی آمدنی متوقع ہو گی؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر حاشیہ آمدنی کا تکمل $x = 0$ تا $x = 3$ لیں۔

ترسیم سے حرکت کے بارے میں نتائج اخذ کرنا

سوال 5.429: فرض کریں کہ f جسے شکل 5.61 میں دکھایا گیا ہے قابل تفرق تفاعل ہے اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ t پر مقام $s = \int_0^t f(x)\,dx$ میٹر ہے۔ شکل کی مدد سے درج ذیل کا جواب دیں اور اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہے؟

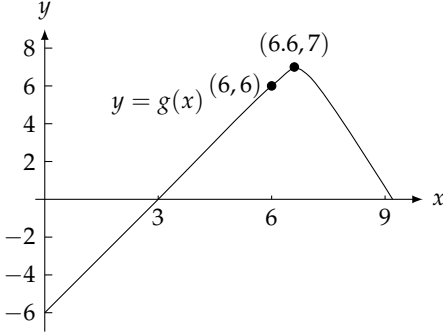
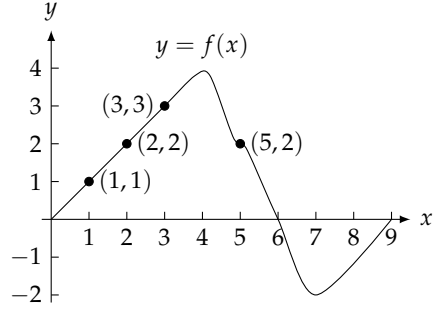
ب. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کی اسراع مثبت کہ منفی ہے؟

ج. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے۔

د. ابتدائی 9 سیکنڈوں میں s کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہے؟

ھ. کس لمحے پر اسراع تقریباً صفر ہے؟

و. ذرہ کب مبدا کی طرف اور کب اس سے دور حرکت کرتا ہے؟

ز. لمحہ $t = 9$ پر مبدا کے کس جانب ذرہ پایا جائے گا؟

شکل 5.61: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 5.429

شکل 5.62: تفاعل کا ترسیم برائے سوال 5.430

جواب: (ا) $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(t) \implies v(5) = f(5) = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
(ب) لمحہ $t = 5$ پر مماس منفی ہے لہٰذا $a = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ منفی ہو گا۔
(ج) $s = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}\,\mathrm{m}$ تکمل کی قیمت در حقیقت $t = 0$ تا $t = 3$ تفاعل f اور x محور کے بیچ تکونی رقبہ ہے۔
(د) لزیادہ سے زیادہ فاصلہ محہ $t = 6$ پر ہو گا چونکہ اس کے بعد $t = 6$ تا $t = 9$ تفاعل f منفی ہے جس سے رقبہ گھٹائے گا۔
(ہ) $t = 4$ اور $t = 7$ پر جہاں مماس افقی ہیں۔
(و) لمحہ $t = 6$ تا $t = 9$ رفتار منفی ہے لہٰذا اس دوران ذرہ مبدا کی جانب حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ تا $t = 6$ رفتار مثبت ہے لہٰذا ذرہ مبدا سے دوری کے رخ حرکت کرتا ہے۔
(ز) چونکہ $t = 0$ تا $t = 9$ مثبت رقبہ زیادہ ہے لہٰذا ذرہ مثبت (دائیں) جانب ہو گا۔

سوال 5.430: فرض کریں g قابل تفرق تفاعل ہے (شکل 5.62) اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ t پر مقام $s = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x$ میٹر ہے۔ ترسیم سے درج ذیل کے جوابات دیں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہو گی؟

ب. کیا لمحہ $t = 3$ پر ذرے کی اسراع مثبت یا منفی ہے؟

ج. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے؟

د. رہ کس لمحے پر مبدا سے گزرتا ہے؟

ھ. اسراع کب صفر ہے؟

و. ذرہ کب مبدا سے دور اور کب مبدا کی جانب حرکت کرتا ہے؟

ز. لمحہ $t=9$ پر ذرہ مبدا کے کس جانب ہو گا؟

حجم برائے حصہ 5.4

سوال 5.431: برائے حصہ 5.4 کی مثال 5.23
حصہ 5.4 کی مثال 5.23 میں جسم کے حجم کا تخمینی مجموعہ درحقیقت تکمل کا ریمان مجموعہ مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔
جواب: $\int_{-2}^{2} 4(9-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{368}{3}$

سوال 5.432: برائے حصہ 5.4 کی مثال 5.24
حصہ 5.4 کی مثال 5.24 میں کرہ کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال 5.433: برائے حصہ 5.4 کا سوال 5.201
حصہ 5.4 کے سوال 5.201 میں پانی کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔
جواب: $\int_{4}^{8} \pi(64-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{320\pi}{3}$

سوال 5.434: برائے حصہ 5.4 کا سوال 5.203
حصہ 5.4 کے سوال 5.203 میں راکٹ کے نوک کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.435: دکھائیں کہ مثبت k کی صورت میں x محور اور محراب $y=\sin kx$ کے بیچ رقبہ $\frac{2}{k}$ ہے۔

سوال 5.436: درج ذیل تلاش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

سوال 5.437: فرض کریں $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^2-2x+1$ ہے تب $f(x)$ تلاش کریں۔
جواب: $2x-2$

سوال 5.438: اگر $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos\pi x$ ہو تب $f(4)$ کتنا ہو گا؟

سوال 5.439: نقطہ $x=1$ پر $f(x)=2-\int_2^{x+1}\frac{9}{1+t}\,\mathrm{d}t$ کی خط بندی تلاش کریں۔
جواب: $-3x+5$

سوال 5.440: نقطہ $x=-1$ پر $g(x)=3+\int_1^{x^2}\sec(t-1)\,\mathrm{d}t$ کی خط بندی تلاش کریں۔

سوال 5.441: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق مثبت ہے اور $f(1)=0$ ہے۔تفاعل $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کے لئے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا. g متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔

ب. g متغیر x کا استمراری تفرق تفاعل ہے۔

ج. g کے ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماثل پایا جاتا ہے۔

د. $x = 1$ پر g کا مقامی زیادہ سے زیادہ پایا جاتا ہے۔

ھ. $x = -1$ پر g کا مقامی کم سے کم پایا جاتا ہے۔

و. $x = 1$ پر g کے ترسیم پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے۔

ز. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ کا ترسیم x محور کو $x = 1$ پر قطع کرتا ہے۔

جواب: (ا) درست، چونکہ f استمراری ہے لہٰذا احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو اول کی بنا g قابل تفرق ہو گا۔ (ب) درست۔ چونکہ g قابل تفرق ہے لہٰذا یہ استمراری ہو گا۔ (ج) درست چونکہ $g'(1) = f(1) = 0$ ہے۔ (د) غلط۔ چونکہ $g''(1) = f'(1) > 0$ ہے۔ (ھ) درست۔ چونکہ $g'(1) = 0$ اور $g''(1) = f'(1) > 0$ ہیں۔ (و) غلط۔ $g''(x) = f'(x) > 0$ لہٰذا g'' کی علامت کبھی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ (ز) درست۔ چونکہ $g'(1) = f(1) = 0$ اور x کے ساتھ $g'(x) = f(x)$ بڑھتا تفاعل ہے (چونکہ $f'(x) > 0$ ہے)۔

سوال 5.442: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق منفی ہے اور $f(1) = 0$ ہے۔ تفاعل $h(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کے لئے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟

ا. h متغیر x کا دو بار قابل تفرق تفاعل ہے۔

ب. h اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ دونوں استمراری ہیں۔

ج. h کے ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماثل پایا جاتا ہے۔

د. h کا مقامی زیادہ سے زیادہ $x = 1$ ہے۔

ھ. h کا مقامی کم سے کم $x = 1$ ہے۔

و. h کے ترسیم کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر ہے۔

ز. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ کا ترسیم x محور کو $x = 1$ پر قطع کرتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 5.443: بنیادی مسئلہ
اگر f استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت بنیادی مسئلے کے جزو اول کی طرح $f(x)$ ہو گی۔ مثال کے طور پر اگر $f(t)=\cos t$ ہو تب

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \tag{5.30}$$

ہو گا۔ مساوات 5.30 کا دایاں ہاتھ $\sin x$ کے تفرق کا حاصل تقسیم ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ $h\to 0$ کی صورت میں یہ $\cos x$ کے برابر ہو گا۔

تفاعل $\cos x$ کو $-\pi\le x\le 2\pi$ پر ترسیم کریں۔اب باری باری $h=2$ ، $h=1$ ، $h=0.5$ اور $h=0.1$ لیتے ہوئے مساوات 5.30 کے دائیں ہاتھ کو بھی x کے لحاظ سے (مختلف رنگوں میں) ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h\to 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $\cos x$ کے ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال 5.444: تفاعل $f(t)=3t^2$ کے لئے سوال 5.443 دوبارہ حل کریں۔ درج ذیل کیا ہو گا؟

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}3t^2\,\mathrm{d}t=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

تفاعل $f(x)=3x^2$ کو وقفہ $-1\le x\le 1$ پر ترسیم کریں۔ اب باری باری $h=1$ ، $h=0.5$ ، $h=0.2$ اور $h=0.1$ لیتے ہوئے $\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ کو بھی ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h\to 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $3x^2$ کے ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال 5.445 تا سوال 5.448 میں وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل f کے لئے $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے سوالات کے جوابات دیں۔

ا. وقفہ $[a,b]$ پر f اور F کو اکٹھے ترسیم کریں۔

ب. مساوات $F(x)=0$ کو حل کریں۔ جس نقطہ پر $F(x)=0$ ہے اس نقطہ پر f اور F کی ترسیمات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ کیا آپ کا مشاہدہ ایک بار تفرق کی دی گئی قیمت اور بنیادی مسئلے کے جزو اول کو مطمئن کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ج. کس (تخمینی) وقفہ پر تفاعل F بڑھتا ہے اور کس پر گھٹتا ہے؟ ان وقفوں پر f کے بارے میں کیا درست ہو گا؟

د. F اور تفرق f' کو اکٹھے ترسیم کریں۔ جس نقطہ پر $f'(x)=0$ ہے اس نقطے پر F کی ترسیم کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ کیا آپ کا مشاہدہ بنیادی مسئلے کے جزو اول کو مطمئن کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 5.445: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0,4]$

سوال 5.446: $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad [0, \frac{9}{2}]$

سوال 5.447: $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

سوال 5.448: $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

سوال 5.449 تا سوال 5.452 میں دیے گئے a ، u اور f کے لئے $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) \, \mathrm{d}t$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے درج ذیل کے جواب دیں۔

ا. F کا دائرہ کار تلاش کریں۔

ب. $F'(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ اپنے دائرہ کار میں کہاں F بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟

ج. F'' تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ F کے مقامی انتہا اور نقطہ تصریف حاصل کریں۔

د. جزو-ا تا جزو-ج کے نتائج استعمال کرتے ہوئے $y = F(x)$ کا اپنے دائرہ پر خاکہ کھینچیں۔ اب کمپیوٹر پر $F(x)$ کی ترسیم کھینچ کر اس خاکے کی تصدیق کریں۔

سوال 5.449: $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال 5.450: $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال 5.451: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال 5.452: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال 5.453: تفاعل $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^{u(x)} f(t) \, \mathrm{d}t$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

سوال 5.454: تفاعل $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \int_a^{u(x)} f(t) \, \mathrm{d}t$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

5.8 قطعی تکمل میں بدل

قطع تکمل کو بدل کی مدد سے حل کرنے کے دو طریقے پائے جاتے ہیں اور دونوں بہترین کام کرتے ہیں۔ ایک طریقہ میں بدل کے ذریعہ مطابقتی غیر قطعی تکمل حاصل کرتے ہوئے اس کا کوئی ایک الٹ تفرق استعمال کرتے ہوئے قطعی تکمل کو بنیادی مسئلہ سے حل کیا جاتا ہے۔ دوسری ترکیب میں درج ذیل کلیہ استعمال کیا جاتا ہے۔

قطعی تکمل میں بدل کا کلیہ

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{5.31}$$

اس کلیہ میں $u=g(x)$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}u=g'(x)\,\mathrm{d}x$ لکھ کر $g(a)$ تا $g(b)$ تکمل لیں۔

قطعی تکمل حل کرنے کی خاطر وہی u تفاعل پر کریں جو آپ غیر قطعی تکمل کے حل میں استعمال کریں گے۔ اس کے بعد $x=a$ پر u کی قیمت سے $x=b$ پر u کی قیمت تک تکمل لیں۔

مثال 5.49: قطعی تکمل $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہمارے پاس دو راستے ہیں۔
پہلی ترکیب: دیے گئے تکمل کو غیر قطعی تکمل میں بدلیں جس کو حل کرنے کے بعد متغیر کو واپس x صورت میں لکھیں اور x کے بالائی اور زیریں حدود استعمال کریں۔

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u && u=x^3+1,\ \mathrm{d}y=3x^2\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{3}u^{3/2}+C && \text{کے لحاظ سے تکمل لیں } u\\
&=\frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}+C && \text{واپس } u=x^3+1 \text{ پر کریں}\\
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} && \text{حاصل تکمل استعمال کریں}\\
&=\frac{2}{3}[((1)^3+1)^{3/2}-((-1)^3+1)^{3/2}]\\
&=\frac{2}{3}[2^{3/2}-0^{3/2}]=\frac{2}{3}[2\sqrt{2}]=\frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

دوسری ترکیب: تکمل کو بدل کر مساوات 5.31 میں دیے گئے نئے حدود استعمال کریں۔ ہم $u = x^3 + 1$ لیتے ہیں۔ یوں $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$ ہو گا جبکہ حدود $u(x=-1) = 0$ اور $u(x=1) = 2$ ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u && u = x^3+1,\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^2 && \text{نئے قطعی تکمل کی قیمت حاصل کریں}\\
&= \frac{2}{3}[2^{2/3} - 0^{2/3}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

□

اس مثال میں دوسری ترکیب زیادہ آسان معلوم ہوتی ہے اگرچہ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ آپ کو دونوں تراکیب آنے چاہیے۔

آئیں ایک اور مثال دیکھیں۔

مثال 5.50:

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^0 u\cdot(-\,\mathrm{d}u) && u = \cot\theta,\ \mathrm{d}u = -\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= -\int_1^0 u\,\mathrm{d}u\\
&= -\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^0\\
&= -\Big[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\Big] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

کمپیوٹر کا استعمال

بعض اوقات الٹ تفرق کا حصول مشکل ہوتا ہے۔ بہت سارے قابل تکمل تفاعل مثلاً

$$f(x) = e^{-x^2}$$

جو نظریہ احتمال میں اہم کردار ادا کرتا ہے کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے، اگرچہ بنیادی مسئلہ کے جزو اول سے ہم جانتے ہیں کہ f کا الٹ تفرق موجود ہے۔ کمپیوٹر پر درج ذیل تکملی تفاعل

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ترسیم کریں۔ آپ $F(x)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ یہ کہاں بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟ اس کے انتہا (اگر ہوں) کہاں پائے جاتے ہی؟ اس کے ترسیم کے مقعر کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوالات

قطعی تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 5.455 تا سوال 5.478 کو حل کریں۔

سوال 5.455: (ا) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,\mathrm{d}yy$ (ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$
جوابات: (ا) $\frac{14}{3}$، (ب) $\frac{2}{3}$

سوال 5.456: (ا) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$ (ب) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$

سوال 5.457: (ا) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$
جوابات: (ا) $\frac{1}{2}$، (ب) $-\frac{1}{2}$

سوال 5.458: (ا) $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$ (ب) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$

سوال 5.459: (ا) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3\,\mathrm{d}t$ (ب) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3\,\mathrm{d}t$
جوابات: (ا) $\frac{15}{16}$، (ب) 0

سوال 5.460: (ا) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3}\,\mathrm{d}t$ (ب) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3}\,\mathrm{d}t$

سوال 5.461: (ا) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,\mathrm{d}r$ (ب) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}\,\mathrm{d}r$
جوابات: (ا) 0، (ب) $\frac{1}{8}$

سوال 5.462: (ا) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2}\,\mathrm{d}v$ (ب) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{1+v^{3/2}}\,\mathrm{d}v$

سوال 5.463: (ا) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ (ب) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$
جوابات: (ا) 4، (ب) 0

سوال 5.464: (ا) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,\mathrm{d}x$ (ب) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.465: (ا) $\int_0^{\pi/6}(1-\cos 3t)\sin 3t \,\mathrm{d}t$ (ب) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos 3t)\sin 3t \,\mathrm{d}t$
جوابات: (ا) $\frac{1}{6}$، (ب) $\frac{1}{2}$

سوال 5.466: (ا) $\int_{-\pi/2}^{0}(2+\tan\frac{t}{2})\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$ (ب) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2+\tan\frac{t}{2})\sec^2\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$

سوال 5.467: (ا) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,\mathrm{d}z$ (ب) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}}\,\mathrm{d}z$
جوابات: (ا) 0، (ب) 0

سوال 5.468: (ا) $\int_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2}\,\mathrm{d}w$ (ب) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin w}{3+2\cos w}\,\mathrm{d}w$

سوال 5.469: $\int_0^1\sqrt{t^5+2t}(5t^4+2)\,\mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{3}$

سوال 5.470: $\int_1^4\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

سوال 5.471: $\int_0^{\pi/6}\cos^{-3}2\theta\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{3}{4}$

سوال 5.472: $\int_{\pi}^{3\pi/2}\cot^5\frac{\theta}{6}\sec^2\frac{\theta}{6}\,\mathrm{d}\theta$

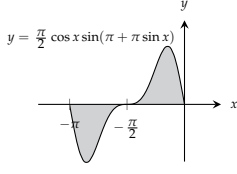
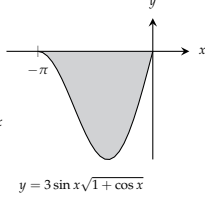
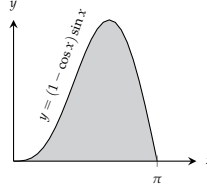
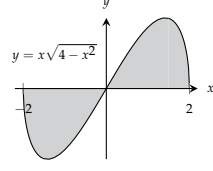
سوال 5.473: $\int_0^{\pi}5(5-4\cot t)^{1/4}\sin t\,\mathrm{d}t$
جواب: $9^{5/4}-1$

سوال 5.474: $\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t\,\mathrm{d}t$

سوال 5.475: $\int_0^1(4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4)\,\mathrm{d}y$
جواب: 3

سوال 5.476: $\int_0^1(y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4)\,\mathrm{d}y$

سوال 5.477: $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}}\sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2})\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{\pi}{3}$

سوال 5.478: $\int_{-1}^{-1/2}t^{-2}\sin^2(1+\frac{1}{t})\,\mathrm{d}t$

شکل 5.63

شکل 5.64

شکل 5.65

شکل 5.66

رقبہ

سوال 5.479 تا سوال 5.482 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 5.479: ترسیم شکل 5.63 میں دی گئی ہے۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 5.480: ترسیم شکل 5.64 میں دی گئی ہے۔

سوال 5.481: ترسیم شکل 5.65 میں دی گئی ہے۔
جواب: $2^{5/2}$

سوال 5.482: ترسیم شکل 5.66 میں دی گئی ہے۔

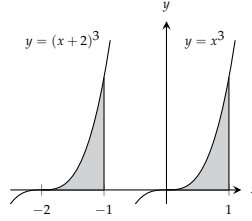
نظریہ اور مثالیں

سوال 5.483: اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x > 0$ کا الٹ تفرق $F(x)$ ہو تب $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ کو F کی روپ میں لکھیں۔
جواب: $F(6) - F(2)$

سوال 5.484: دکھائیں کہ استمراری f کی صورت میں $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔

سوال 5.485: اگر $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ ہو تب (ا) طاق f ،(ب) جفت f کی صورت میں $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ کتنا ہو گا؟
جواب: (ا) -3 ،(ب) 3

سوال 5.486: (ا) درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{طاق } h \\ 2\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x, & \text{جفت } h \end{cases}$$

شکل 5.67: قطعی تکمل کی عدم تبدیلی بصورت خطی انتقال۔

(ب) $a = \frac{\pi}{2}$ لیتے ہوئے $h(x) = \sin x$ اور $h(x) = \cos x$ کے لئے جزو-ا کی تصدیق کریں۔

سوال 5.487: استمراری f کے لئے درج ذیل تکمل حل کرنے کی خاطر بدل $u = a - x$ پر کر کے حاصل تکمل کے نتیجہ کو I کے ساتھ جمع کریں۔

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{f(x) + f(a - x)}$$

جواب: $I = \frac{a}{2}$

سوال 5.488: موزوں بدل استعمال کر کے تمام مثبت x اور y اعداد کے لئے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

قطعی تکمل کی خاصیت انتقال

خطی انتقال کی صورت میں قطعی تکمل کی عدم تبدیلی جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے قطعی تکمل کی بنیادی خاصیت ہے۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,\mathrm{d}x \tag{5.32}$$

یہ مساوات درکار x پر معین اور قابل تکمل f کے لئے مطمئن ہوتی ہے، مثلاً (شکل 5.67):

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \tag{5.33}$$

سوال 5.489: کوئی بدل استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.32 کی تصدیق کریں۔

سوال 5.490: درج ذیل تمام تفاعل کے لئے $[a, b]$ پر $f(x)$ اور $[a-c, b-c]$ پر $f(x+c)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اپنی یقین دہانی کریں کہ مساوات 5.32 مطمئن ہوتی ہے۔

$f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1,\ c = 1$ (ا)

$f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = \pi,\ c = \frac{\pi}{2}$ (ب)

$f(x) = \sqrt{x-4},\ a = 4,\ b = 8,\ c = 5$ (ج)

5.9 اعدادی تکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے الٹ تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل کی جا سکتی ہے۔ بعض اوقات الٹ تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے ہیں کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے الٹ تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے الٹ تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے۔

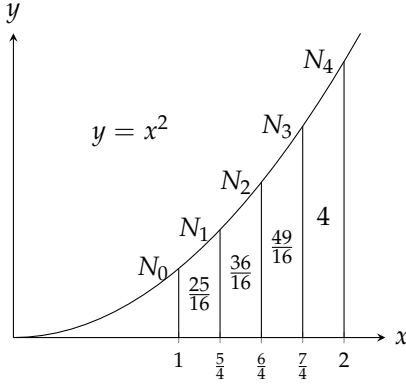
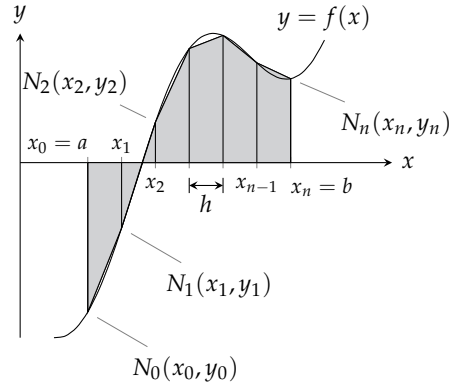
ہم جب بھی قطعی تکمل کی قیمت کو الٹ تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمسن بروئے کار لاتے ہیں جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

5.10 قاعدہ ذوزنقہ

جب کسی تفاعل جس کی قطعی تکمل کی قیمت درکار ہو کے متکمل f کا الٹ تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم تکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا تکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں جو تکمل کی تخمینی قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لئے جتنی زیادہ درجے کے کثیر رکنی منتخب کی جائیں حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ کسی بھی درجے کی کثیر رکنی کے لئے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا حتٰی کے ہم پور و پور خلل یا حذفی خلل اتنا بڑھ جائے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستگی کم ہونا شروع ہو جائے۔

کم درجے کی کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لئے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a, b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل 5.68)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو **لمبائی قدم**[32] کہتے ہیں جس کو یہاں Δx کی بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n **قدموں**[33] کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی

---

[32] step size
[33] steps

شکل 5.69: ذوزنقہ قاعدہ تفاعل $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔

شکل 5.68: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی تکمل۔

نقطوں تک انتصابی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقہ حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور x محور کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقہ کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں x محور سے اوپر رقبہ کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبہ کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2} + y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h \\
&= h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}$$

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، $\cdots$، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ 5.1: ذوزنقہ قاعدہ

تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $y_k = f(x_k)$ ہے)۔

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{5.34}$$

مثال 5.51: تکمل $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ کو ذوزنقہ قاعدہ سے $n = 4$ لے کر حل کریں۔ اصل رقبہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل: ہم وقفہ $[1,2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔یوں ایک وقفہ کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تفاعل $y = x^2$ کی قیمت درج ذیل ہے۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.34 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 + 2(\tfrac{25}{16}) + 2(\tfrac{36}{16}) + 2(\tfrac{49}{16}) + 4\right) = \frac{75}{32} \\ &= 2.343\,75\end{aligned}$$

تکمل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

یہاں تخمینی قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ درحقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتا ہے (شکل 5.69)۔ □

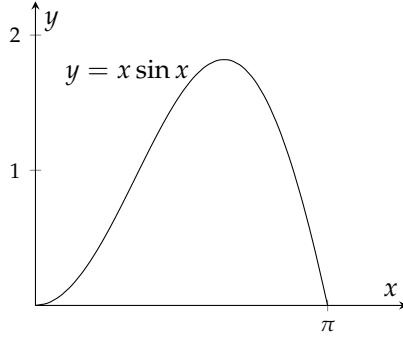
ذوزنقہ تخمین میں قابو خلل

مختلف تفاعل کے ترسیم کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ لمبائی قدم h کم کرنے سے چونکہ ذوزنقہ تفاعل پر بہتر بیٹھتا ہے لہٰذا ذوزنقہ تخمین میں خلل

$$E_T = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x - T \tag{5.35}$$

کم ہو گی۔اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہو گا۔

ذوزنقہ قاعدہ میں اندازہ خلل
اگر f'' استمراری ہو اور $[a, b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کی بالائی حد بندی M ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 M \tag{5.36}$$

شکل 5.70: منکمل برائے مثال 5.53

اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم ترین قیمت پائی جائے گے عموماً حقیقت میں یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا اچھا نہیں لگتا ہے لیکن یہ طریقہ چلتا ہے۔ کسی بھی M کے لئے $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔

مثال 5.52: تکمل $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت مثال 5.51 میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینی قیمت میں خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

حل: وقفہ $1 \le x \le 2$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہٰذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔ اب $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات 5.36 درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^2 (2) = \frac{1}{96}$$

ہم $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left|\frac{7}{3} - \frac{75}{32}\right| = \left|-\frac{1}{96}\right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے ہیں۔ ایسا ہر بار نہیں ہو گا۔ □

مثال 5.53: ذوزنقہ قاعدہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں (شکل 5.70)۔

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

حل: $a = 0$ ، $b = \pi$ اور $h = \frac{\pi - 0}{10}$ سے

$$|E_T| \le \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{\pi}{12} \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200} M$$

ملتا ہے جہاں $[0,\pi]$ پر $f(x)=x\sin x$ کے دہرا تفرق کی کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتی ہے۔چونکہ

$$f''(x)=2\cos x - x\sin x$$

کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|f''(x)\right| &= |2\cos x - x\sin x| \\
&\le 2|\cos x| + |x||\sin x| && \text{تکونی عدم مساوات } |a+b|\le|a|+|b| \\
&\le 2\cdot 1+\pi\cdot 1 = 2+\pi && |\sin x| \text{ اور } |\cos x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں}
\end{aligned}$$

ہم $M=2+\pi$ لیتے ہیں۔یوں

$$|E_T|\le \frac{\pi^3}{1200}M=\frac{\pi^3(2+\pi)}{1200}<0.133 \qquad \text{بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کی بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n=100$ قدم لیتے ہوئے $h=\frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T|\le\frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M=\frac{\pi^3(2+\pi)}{120\,000}<0.001\,33=1.33\times10^{-3}$$

□

مثال 5.54: جیسا ہم باب 7 میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\ln 2=\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

ذوزنقہ قاعدہ سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کو 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل: قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات 5.36 بروئے کار لاتے ہیں۔یوں

$$b-a=2-1=1,\quad h=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n},\quad f''(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{-1})=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

سے

$$|E_T|\le\frac{b-a}{12}h^2\left|f''(x)\right|_{\text{بلند تر}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left|\frac{2}{x^3}\right|_{\text{بلند تر}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں وقفہ $[1,2]$ پر بلند تر $|f''|$ درکار ہے۔

یہ وہ شاذونادر موقع ہے جب ہم بلند تر $|f''|$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1,2]$ پر $y=\frac{2}{x^3}$ کی قیمت $y=2$ سے گھٹ کر $y=\frac{1}{4}$ ہوتی ہے۔یوں

$$|E_T| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$

ہو گا لہٰذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہو گی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6n^2} &< 10^{-4} \\
\frac{10^4}{6} &< n^2 && \text{دونوں اطراف کو } 10^4n^2 \text{ سے ضرب کریں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< |n| && \text{جذر لیں} \\
\frac{100}{\sqrt{6}} &< n && n \text{ مثبت ہے} \\
40.83 &< n && \text{حفاظتی طور پر اور کو پورا کیا گیا ہے۔}
\end{aligned}
$$

عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔یوں $n=41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے ذوزنقہ ترکیب سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جا سکتا ہے۔ □

سمسن قاعدہ

قاعدہ سمسن میں $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے حصول میں f کو مستقیم خطوط کی بجائے دو رتبی کثیر رکنی (قطع مکافی) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ہم ترسیم کو سیدھی لکیروں کی بجائے قطع مکافی قوسین سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 5.71)۔ دو رتبی کثیر رکنی $y=Ax^2+Bx+C$ کا $x=-h$ تا $x=h$ تکمل درج ذیل ہو گا (شکل 5.72)۔

$$
\begin{aligned}
\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{2Ah^3}{3}+2Ch \\
&= \frac{h}{3}(2Ah^2+6C)
\end{aligned}
$$

کثیر رکنی کی مساوات سے

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

شکل 5.71: قاعدہ سمسن میں ذیلی وقفوں کی جوڑی کو انفرادی قطع مکافی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

شکل 5.72: سایہ دار رقبہ $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ ہے۔

لکھے جا سکتے ہیں جن سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
C &= y_1 \\
Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\
Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\
2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1
\end{aligned}
$$

یوں حاصل تکمل میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}[(y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1] = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

یعنی

$$\int_{-h}^{h} f(Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \tag{5.37}$$

ملتا ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کی جفت تعداد کی ذیلی وقفوں میں میں تقسیم کرتے ہوئے مساوات 5.37 کو یک بعد دیگرے ذیلی وقفوں کی جوڑیوں پر لاگو کر کے ان کا مجموعہ لینے سے قاعدہ سمسن حاصل ہو گا۔

قاعدہ سمسن

تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کا تخمین حاصل کرنے کے لئے درج ذیل استعمال کریں جو **قاعدہ سمسن**[34] کہلاتا ہے۔

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{5.38}$$

---

[34] Simpson's rule

y کی قیمتیں نقطہ خانہ بندی

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a + 2h, \cdots,\ x_{n-1} = a + (n-1)h,\ x_n = b$$

پر لیے جاتے ہیں جہاں n جفت اور $h = \frac{b-a}{n}$ ہے۔

قاعدہ سمسن میں قابو خلل

قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار

$$E_S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S \tag{5.39}$$

لمبائی قدم گھٹانے سے کم ہوتی ہے (جیسا قاعدہ ذوزنقہ بھی ہوتا ہے) البتہ قاعدہ سمسن میں خلل قابو کرنے کے لئے درکار عدم مساوات میں f کے چار بار تفرق کا استمراری ہونا ضروری ہے۔ اس بار بھی قابو خلل کا کلیہ اعلیٰ احصاء دیتی ہے:

قاعدہ سمسن میں اندازاً خلل

اگر $[a, b]$ میں $f^{(4)}$ استمراری ہو اور $\left|f^{(4)}\right|$ کی بالائی حد بندی کی کوئی ایک قیمت M ہو تب مطلق خلل درج ذیل ہو گی۔

$$|E_S| \le \frac{b-a}{180} h^4 M \tag{5.40}$$

قاعدہ ذوزنقہ کی طرح ہم یہاں بھی عموماً M کی کم سے کم قیمت دریافت نہیں کر پائیں گے۔ ہم M کی کوئی موزوں قیمت تلاش کر کے اسی کو استعمال کرتے ہوئے $|E_S|$ کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 5.55: درج ذیل تکمل کو قاعدہ سمسن سے حل کرتے ہوئے $n = 4$ لیں۔

$$\int_0^1 5x^4\,\mathrm{d}x$$

اس تخمین میں مساوات 5.40 کے تحت خلل اندازاً کتنی ہو گی؟

حل: ہم وقفہ تکمل کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کر کے تقسیمی نقطوں پر متکمل $f(x) = 5x^4$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{256}$	$\frac{80}{256}$	$\frac{405}{256}$	5

ہم $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات 5.38 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{12}\left[0 + 4\left(\frac{5}{256}\right) + 2\left(\frac{80}{256}\right) + 4\left(\frac{405}{256}\right) + 5\right] \approx 1.002\,60 \end{aligned}$$

خلل جاننے سے پہلے ہمیں وقفہ $0 \le x \le 1$ پر $f(x) = 5x^4$ کے چار بار تفرق $f^{(4)}$ کی بالائی حد بندی کی ایک قیمت M چاہیے۔ چونکہ $f^{(4)}(x) = 120$ مستقل ہے لہٰذا ہم بلا خطر $M = 120$ لے سکتے ہیں۔ یوں $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.40 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$|E_S| \le \frac{b-1}{180}h^4 M = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 (120) = \frac{1}{384} < 0.002\,61$$

□

کونسا قاعدہ بہتر نتائج دیتا ہے؟

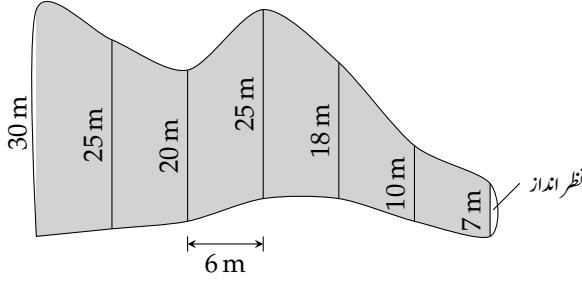
قابو خلل کے کلیات

$$|E_T| \le \frac{b-1}{12}h^2 M, \quad |E_S| \le \frac{b-a}{180}h^4 M$$

سے یہ جانا جا سکتا ہے کہ کونسا کلیہ بہتر نتیجہ دیگا جہاں بائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $\left|f''\right|$ کی بالائی حد بندی ہے جبکہ دائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $\left|f^{(4)}\right|$ کی بالائی حد بندی ہے۔ اس کے علاوہ قاعدہ سمسن میں جزو $\frac{b-a}{180}$ قاعدہ ذوزنقہ میں جزو $\frac{b-a}{12}$ سے 15 گنّا کم ہے۔ مزید قاعدہ سمسن میں h^4 جبکہ قاعدہ ذوزنقہ میں h^2 استعمال ہوتا ہے۔ یوں اگر $h = \frac{1}{10}$ ہو تب $h^2 = \frac{1}{100}$ جبکہ $h^4 = \frac{1}{10000}$ ہو گا۔ اس طرح اگر دونوں M کی قیمت 1 اور $b - a = 1$ ہوں تب $h = \frac{1}{10}$ کی صورت میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} |E_T| &\le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200} \\ |E_S| &\le \frac{1}{180}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{1\,800\,000} = \frac{1}{1500} \cdot \frac{1}{1200} \end{aligned}$$

ایک جتنی حسابی کوشش سے اس مثال میں قاعدہ سمسن بہت بہتر نتیجہ دیتا ہے۔

h^4 بالمقابل h^2 وہ اجزاء ہیں جن پر نظر رکھنی چاہیے۔ اگر h کی قیمت 1 سے کم ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت کم ہو گی۔ اگر h کی قیمت 1 ہو تب $h^4 = h^2$ ہو گا۔ اگر h کی قیمت 1 سے زیادہ ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت زیادہ ہو گی۔ ان آخری دو صورتوں میں قابو خلل کلیات ہمیں زیادہ مدد فراہم نہیں کر سکتے ہیں اور ہمیں $y = f(x)$ کی منحنی کو دیکھ کر فیصلہ کرنا ہو گا کہ قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ میں سے کونسا قاعدہ بہتر نتیجہ (اگر دیتا ہو) دیگا۔

شکل 5.73: گندے پانی کا تالاب۔ افقی فاصلے 6 m ہیں (مثال 5.56)۔

اعدادی مواد کے ساتھ کام

تجربہ گاہ میں پیمائش سے حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے قاعدہ سمسن کے ذریعہ ایسے تفاعل کے تکمل کی قیمت کو اگلے مثال میں حاصل کیا جائے گا جس کا کلیہ ہم نہیں جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ ذوزنقہ کو بھی اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال 5.56: ایک شہر میں گندے پانی کا تالاب پایا جاتا ہے جس کو بھرنا مقصود ہے۔یہ تالاب 2.5 m گہرا ہے (شکل 5.73)۔ تالاب سے پانی کی نکاسی کرنے کے بعد اس کو مٹی سے بھرا جائے گا۔ کتنی مٹی درکار ہو گی؟

حل: تالاب کا حجم جاننے کے لئے ہم اس کا سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیں گے۔ سطحی رقبہ کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہیں جہاں $h = 6\,\text{m}$ ہے جبکہ y کی قیمتوں کو تالاب پر ناپا گیا ہے (شکل 5.73)۔

$$\begin{aligned}S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\\ &= \frac{6}{3}(30 + 100 + 40 + 100 + 36 + 40 + 7) = 706\end{aligned}$$

سطحی رقبہ کو 2.5 سے ضرب دیتے ہوئے تقریباً $1765\,\text{m}^3$ حجم حاصل ہوتا ہے۔ □

پور و پور خلل

اگرچہ لمبائی قدم h کم کرنے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار کم ہو گی، حقیقت میں بعض اوقات اس کے برعکس بھی ہوتا ہے۔جب h کی قیمت بہت کم ہو، مثلاً $h = 10^{-5}$ ، تب S اور T کی حساب میں پور و پور خلل اتنا بڑھ سکتا ہے کہ نتائج میں بہتری کی بجائے خرابی پیدا ہو سکتی ہے۔ایسی صورت میں آپ کلیات خلل، جو پور و پور خلل کو جاننے سے قاصر ہیں، پر بھروسہ نہیں کر سکتے ہیں۔ لمبائی قدم h کو کسی خاص قیمت سے کم کرنے سے حقیقتاً نتائج خراب ہو سکتے ہیں۔ اس کتاب میں ایسی صورت حال پیدا نہیں ہو گی۔ اگر آپ کو ایسی صورت حال کا سامنا ہو، بہتر ہو گا کہ آپ اعدادی تراکیب پر لکھی گئی کسی کتاب کا سہارا لیں۔

سوالات

تکمل کی قیمت کا اندازہ

سوال 5.491 تا سوال 5.500 میں دو جزو پائے جاتے ہیں۔ایک جزو قاعدہ ذوزنقہ اور دوسرا جزو قاعدہ سمسن کے لئے ہے۔

1. قاعدہ ذوزنقہ

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.36 سے خلل $|E_T|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.35 سے $|E_T|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_T|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

2. قاعدہ سمسن

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات 5.40 سے خلل $|E_S|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات 5.39 سے $|E_S|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_S|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال 5.491: $\int_1^2 x \, \mathrm{d}x$
جواب: 1: (ا) 1.5 ، 0 ،(ب) 1.5 ، 0 ،(ج) 0 % ؛ 2: (ا) 1.5 ، 0 ،(ب) 1.5 ، 0 ،(ج) 0 %

سوال 5.492: $\int_1^3 (2x - 1) \, \mathrm{d}x$

سوال 5.493: $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) \, \mathrm{d}x$
جواب: 1: (ا) 2.75 ، 0.08 ،(ب) 2.67 ، 0.08 ،(ج) $0.0312 \approx 3\,\%$ ؛ 2: (ا) 2.67 ، 0 ، (ب) 2.67 ، 0 ،(ج) 0 %

سوال 5.494: $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) \, \mathrm{d}x$

سوال 5.495: $\int_0^2 (t^3 + t) \, \mathrm{d}t$
جواب: 1: (ا) 6.25 ، 0.5 ،(ب) 6 ، 0.25 ،(ج) $0.0417 \approx 4\,\%$ ؛ 2: (ا) 6 ، 0 ،(ب) 6 ، 0 ،(ج) 0 %

سوال 5.496: $\int_{-1}^{1}(t^3+1)\,\mathrm{d}t$

سوال 5.497: $\int_{1}^{2}\frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$
جواب: 1: (ا) 0.509 ، 0.03125 ، (ب) 0.5 ، 0.009 ، (ج) $0.018 \approx 2\,\%$ ؛ 2: (ا) 0.5 ، 0.002604 ، (ب) 0.5 ، 0.0004 ، (ج) $0\,\%$

سوال 5.498: $\int_{2}^{4}\frac{1}{(s-1)^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 5.499: $\int_{0}^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t$
جواب: 1: (ا) 1.8961 ، 0.161 ، (ب) 2 ، 0.1039 ، (ج) $0.052 \approx 5\,\%$ ؛ 2: (ا) 2.0045 ، 0.0066 ، (ب) 2 ، 0.00454 ، (ج) $0\,\%$

سوال 5.500: $\int_{0}^{1}\sin \pi t\,\mathrm{d}t$

سوال 5.501 تا سوال 5.504 میں (ا) قاعدہ ذوزنقہ، (ب) قاعدہ سمسن استعمال کرتے ہوئے دی گئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے آٹھ قدم $n=8$ کے لئے تکمل حل کریں۔ اپنے جواب کو 5 اعشاریہ درستگی تک پور و پور کریں۔ (ج) اس کے بعد تکمل کی اصل قیمت حاصل کریں اور خلل $|E_T|$ کو مساوات 5.35 اور خلل $|E_S|$ کو مساوات 5.39 سے حاصل کریں۔

سوال 5.501: $\int_{0}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361	0

جواب: (ا) 0.31929 ، (ب) 0.32812 ، (ج) $\frac{1}{3}$ ، 0.01404 ، 0.00521

سوال 5.502: $\int_{0}^{3}\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}\,\mathrm{d}\theta$

θ	0	0.375	0.75	1.125	1.5	1.875	2.25	2.625	3.0
$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$	0.0	0.09334	0.18429	0.27075	0.35112	0.42443	0.49026	0.58466	0.6

سوال 5.503: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

t	−1.5708	−1.1781	−0.7854	−0.3927	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708
$\frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}$	0.0	0.99138	1.26906	1.05961	0.75	0.48821	0.28946	0.13429	0

جواب: (ا) 1.95643 ، (ب) 2.00421 ، (ج) 2 ، 0.04357 ، -0.00421

سوال 5.504: $\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\,\mathrm{d}y$

y	0.78540	0.88357	0.98175	1.07992	1.17810	1.27627	1.37445	1.47262	1.57080
$(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$	2.0	1.51606	1.18237	0.93998	0.75402	0.60145	0.46364	0.31688	0

ذیلی وقفوں کی کم سے کم تعداد

سوال 5.505 تا سوال 5.516 میں خلل کی مقدار 10^{-4} سے کم مطلوب ہے۔ (ا) قاعدہ ذوزنقہ اور (ب) قاعدہ سمسن استعمال کریں۔ مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 کی مدد سے ذیلی وقفوں کی درکار تعداد تلاش کریں۔ (سوال 5.505 تا سوال 5.512 درحقیقت سوال 5.491 تا سوال 5.498 ہیں۔)

سوال 5.505: $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$
جواب: (ا) 1، (ب) 2

سوال 5.506: $\int_1^3(2x-1)\,\mathrm{d}x$

سوال 5.507: $\int_{-1}^1(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: (ا) 116، (ب) 2

سوال 5.508: $\int_{-2}^0(x^2-1)\,\mathrm{d}x$

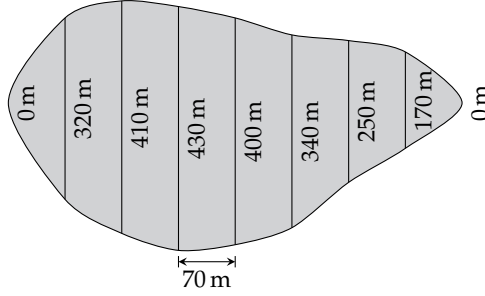
سوال 5.509: $\int_0^2(t^3+t)\,\mathrm{d}t$
جواب: (ا) 283، (ب) 2

سوال 5.510: $\int_{-1}^1(t^3+1)\,\mathrm{d}t$

سوال 5.511: $\int_1^2\frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$
جواب: (ا) 71، (ب) 10

سوال 5.512: $\int_2^4\frac{1}{(s-1)^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 5.513: $\int_0^3\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$
جواب: (ا) 76، (ب) 12

سوال 5.514: $\int_0^3\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

شکل 5.74: جھیل برائے سوال 5.517

سوال 5.515: $\int_0^2 \sin(x+1)\,\mathrm{d}x$
جواب: (ا) 82، (ب) 8

سوال 5.516: $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi)\,\mathrm{d}x$

عملی استعمال

سوال 5.517: آپ کے شہر میں ایک جھیل ہے جس کی اوسط گہرائی $7\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ اس کا سطحی رقبہ شکل 5.74 میں دکھایا گیا ہے۔ ماہی گیری کے موسم کی شروع میں اوسطاً فی $9\,\mathrm{m}^3$ ایک مچھلی پائی جاتی ہے۔ماہی گیری کے ایک اجازت نامہ پر اوسطاً فی موسم 20 مچھلیاں شکار کی جاتی ہیں۔ موسم کے اختتام پر جھیل میں پہلے دن کے لحاظ سے 25 % مچھلی باقی رہنا ضروری ہے۔ ماہی گیری کے موسم میں کتنے اجازت نامے منظور کیے جا سکتے ہیں؟ ترکیب سمسن استعمال کریں۔

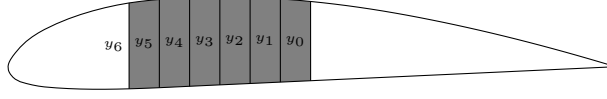
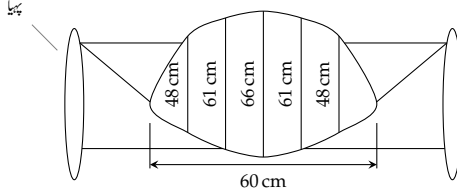
جواب: 4873

سوال 5.518: جہاز کا **ہوائی پترا**[35] شکل 5.75 میں دکھایا گیا ہے جس میں $25\,000\,\mathrm{L}$ تیل کی ٹینکی واضح ہے۔ تیل کی کثافت $0.708\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ ہے۔ درج ذیل معلومات دی گئی ہیں جن کے بیچ افقی فاصلہ $30\,\mathrm{cm}$ ہے۔تیل کی ٹینکی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y_0 = 45\,\mathrm{cm},\ y_1 = 48\,\mathrm{cm},\ y_2 = 54\,\mathrm{cm},\ y_3 = 57\,\mathrm{cm},\ y_4 = 60\,\mathrm{cm},\ y_5 = y_6 = 63\,\mathrm{cm}$$

سوال 5.519: شمسی چادر سے حاصل برقی طاقت سے چلنے والی گاڑی کا رقبہ عمودی تراش شکل 5.76 میں دکھایا گیا ہے۔ہوائی مزاحمت کا کچھ حصہ رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا کوشش کی جاتی ہے کہ رقبہ عمودی تراش کو کم سے کم رکھا جائے۔ اس گاڑی کا رقبہ عمودی تراش قاعدہ سمسن سے دریافت کریں۔

جواب: $2973\,\mathrm{cm}^2$

[35] aerofoil

شکل 5.75: ہوائی پترا

شکل 5.76: شمسی گاڑی برائے سوال 5.519

سوال 5.520: ایک گاڑی ساکن حالت سے روانہ ہو کر $130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ تک $37.1\,\mathrm{s}$ میں پہنچ پاتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت درج ذیل ہے۔

$\mathrm{km\,h^{-1}}$	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
s	0	2.2	3.2	4.5	5.9	7.8	10.2	12.7	16	20.6	26.2	37.1

اس رفتار تک پہنچتے ہوئے گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 5.521: کم درجی کثیر رکنیاں
تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ میں خلل

$$|E_T| = \frac{b-a}{12}h^2\left|f''(c)\right|$$

ہے جہاں وقفہ $[a,b]$ میں c (عموماً نامعلوم) نقطہ ہے۔ اگر f متغیر x کا خطی تفاعل ہو تب $f''(c)=0$ لہٰذا $E_T=0$ ہو گا اور کسی بھی h کے لئے تکمل کی اصل قیمت T ہو گی۔ یہ تعجب کی بات نہیں ہے چونکہ خطی تفاعل کی صورت میں ترسیم کو تخمینی طور پر ظاہر کرنے والے قطعات ترسیم پر ٹھیک بیٹھیں گے۔ تعجب کی بات سمسن خلل

$$|E_S| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

ہے جو درجہ چار سے کم کثیر رکنی f کی صورت میں ہر c کے لئے $f^{(4)}(c)=0$ کی بنا $E_S=0$ ہو گا اور یوں اگر ہم صرف دو قدم بھی استعمال کریں تب بھی S تکمل کی اصل قیمت ہو گی۔ یہ دیکھنے کی خاطر $n=2$ لیتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت قاعدہ

سمسن سے تلاش کر کے تکمل کی اصل قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

$$\int_0^2 x^3 \, \mathrm{d}x$$

جواب: 4 ، 4

سوال 5.522: تفاعل سائن تکمل کی قابل استعمال قیمتیں
تفاعل سائن تکمل

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t \qquad x \text{ کا سائن تکمل}$$

ان تفاعل میں سے ایک ہے جنہیں بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہے۔ تفاعل $\frac{\sin t}{t}$ کے الٹ تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا ہے البتہ اعدادی تراکیب سے $\operatorname{Si}(x)$ کی قیمتیں با آسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔

اگرچہ تکمل سائن لکھتے ہوئے یہ حقیقت بظاہر نظر نہیں آتی ہے درحقیقت ہم درج ذیل تفاعل کا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

جو $\frac{\sin t}{t}$ کی وقفہ $[0, x]$ تک استمراری توسیع ہے۔ اس تفاعل کی دائرہ کار کے ہر نقطہ پر تفاعل کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس کا ترسیم ہموار ہے (شکل 5.77) اور ہم قاعدہ سمسن سے بہترین نتائج توقع کرتے ہیں۔

ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ پر $\left|f^{(4)}\right| \leq 1$ ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $n = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہوئے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

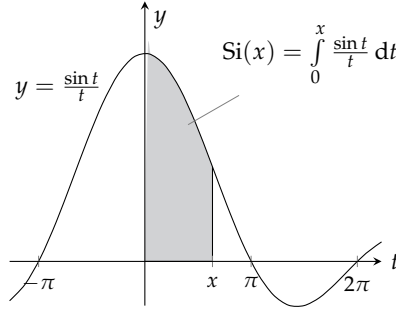
$$\operatorname{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

ب. $n = 4$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے $\operatorname{Si}(\pi/2)$ حاصل کریں۔

ج. جزو-ا میں خلل کو جزو-ب میں قیمت کا فی صد لکھیں۔

سوال 5.523: خلل کی حد بندی مساوات 5.36 اور مساوات 5.40 دیتی ہیں۔ حقیقت میں قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن کے نتائج اس سے بہتر ہوں گے۔ مثال 5.53 میں $\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$ کی اندازاً قیمت کو قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل کیا گیا۔

ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ لیتے ہوئے تکمل کو دوبارہ حل کریں۔

شکل 5.77: تفاعل سائن تکمل (سوال 5.522)

ب. تکمل کی اصل قیمت π اور آپ کے حاصل کردہ جواب میں فرق دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ مثال 5.53 میں $n = 10$ کے لئے حاصل خلل 0.133 سے موجودہ خلل بہت کم ہے۔

ج. ہم $[0, \pi]$ پر $\left|f''(x)\right| = |2\cos x - x\sin x|$ کی بہتر حد بندی معلوم کر کے مثال 5.53 میں $|E_T|$ کی بالائی حد بندی کو 0.133 سے بہتر بنا سکتے ہیں۔ $\left|f''(x)\right|$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کرتے ہوئے بہتر بالائی حد بندی دریافت کر کے اس کو بطور M لے کر $|E_T|$ کی بہتر قیمت تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ا میں حاصل نتیجہ اس سے بھی بہتر ہو ہے۔

جواب: (ا) 3.11571 ، (ب) 0.02588 ، (ج) $M = 3.11$ سے $|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200}(3.11) < 0.081$ ملتا ہے۔

سوال 5.524:

ا. دکھائیں کہ $f(x) = x\sin x$ کا چار بار تفرق $f^{(4)} = -4\cos x + x\sin x$ ہے۔ کمپیوٹر پر اس کو وقفہ $[0, \pi]$ پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطہ کو بڑا کر کے اس کی بالائی حد بندی دیکھ کر دریافت کریں۔

ب. جزو-ا میں حاصل قیمت کو M لے کر قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لیتے ہوئے درج ذیل تکمل حاصل کرنے میں خلل کی بالائی حد بندی کو مساوات 5.40 سے حاصل کریں۔

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$$

ج. قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لے کر $\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت حاصل کریں۔

د. تکمل کی اصل قیمت π اور جزو-ج میں حاصل جواب میں فرق کو 6 اعشاریہ درستگی تک لکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ب میں حاصل خلل کافی درست ہے۔

آپ سوال 5.525 اور سوال 5.526 کو قاعدہ سمسن سے حل کرنے سے پہلے درکار درستگی حاصل کرنے کی خاطر لمبائی قدم h کو مساوات 5.40 سے جاننا چاہتے ہیں۔ کیا ہوتا ہے؟ کیا قاعدہ ذوزنقہ اور مساوات 5.36 استعمال کرنے سے مسئلہ حل ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 5.525: $\int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x$

سوال 5.526: $\int_0^1 x^{5/2}\,\mathrm{d}x$

اعدادی تکمل بذریعہ کمپیوٹر

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، بعض متکمل کے الٹ تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا ہے یا بہت مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرز کے قطعی تکمل کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ سوال 5.527 تا سوال 5.530 کو کمپیوٹر کے ذریعہ اعدادی ترکیب سے حل کریں۔

سوال 5.527: $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
جواب: 1.08943

سوال 5.528: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ تقسیم صفر سے بچنے کی خاطر آپ تکمل کو 0 کی بجائے بہت چھوٹے مثبت عدد مثلاً 10^{-6} سے شروع کریں گے۔

سوال 5.529: $\int_0^{\pi/2} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ انکسار شعاع سے منسلک تکمل۔
جواب: 0.82812

سوال 5.530: $\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1-0.64\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ ترخیم $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ کی لمبائی۔

باب 6

تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبے، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین پانی کی نکاسی کے لئے درکار کام، سیلاب دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدد۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریمان مجموعوں کے حد یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدوں کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکمل کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جا سکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کی طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

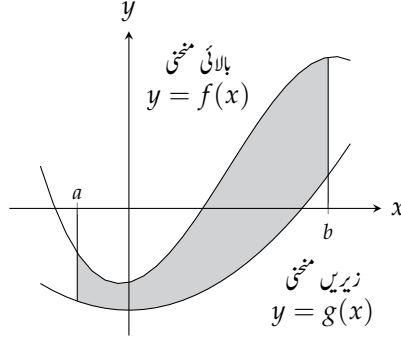
6.1 منحنیات کے بیچ رقبہ

محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطہ کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کا حد

فرض کریں ایک خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہیں جبکہ اس کا بایاں اور دایاں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل 6.1)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

تکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.2) جہاں k ویں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل 6.3)۔

$$\Delta S_k = \text{قد} \times \text{چوڑائی} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$

شکل 6.1: منحنیات $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$، $x = b$ کے بیچ خطہ۔

اس کے بعد ہم خطے کے رقبہ کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ f اور g استمراری ہیں لہٰذا $\|P\| \to 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x$ ہو گا:

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

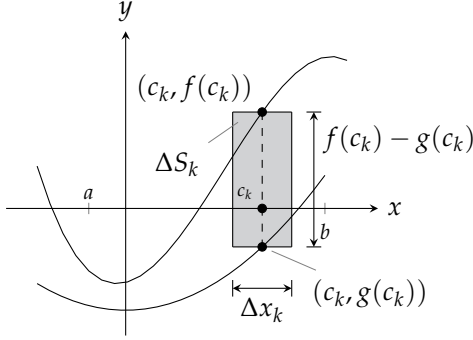
تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ a تا b متکمل $[f - g]$ کا تکمل ہو گا:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, \mathrm{d}x \tag{6.1}$$

□

مساوات 6.1 کو استعمال کرنے کے لئے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

دو منحنیات کے بیچ رقبے کی تلاش

شکل 6.2: ہم خطہ کو تخمیناً x محور کے عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔

شکل 6.3: k ویں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k لہٰذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہو گا۔

1. منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔ اس سے معلوم ہو گا کہ کونسی منحنی بالائی f اور کونسی زیریں g ہے۔ اس سے تکمل کے حد تعین کرنے میں بھی مدد ملتی ہے۔

2. تکمل کے حد تلاش کریں۔

3. متکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

4. متکمل $[f(x) - g(x)]$ کا تکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی تکمل سے حاصل عدد رقبہ ہو گا۔

مثال 6.1: منحنیات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے بیچ 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** ہم منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.4)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دیے گئے ہیں۔

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^x - \sin x$

چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

شکل 6.4: خطہ برائے مثال 6.1

شکل 6.5: خطہ برائے مثال 6.2

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ پایا جاتا ہو تب نقاط تقاطع سے تکمل کے حد حاصل ہوں گے۔

مثال 6.2: قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل 6.5)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدد تکمل کے حد ہوں گے۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد جاننے کے لئے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$2 - x^2 = -x$	$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر پر کریں
$x^2 - x - 2 = 0$	ایک جانب منتقلی
$(x+1)(x-2) = 0$	تجزی
$x = -1, \quad x = 2$	حل

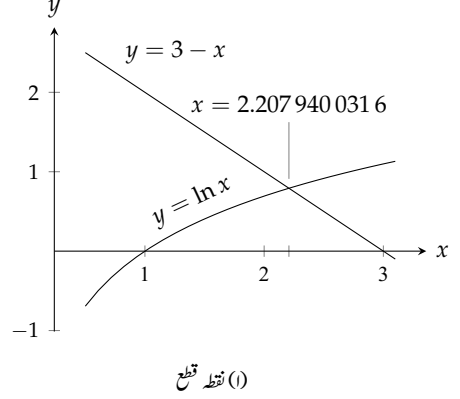
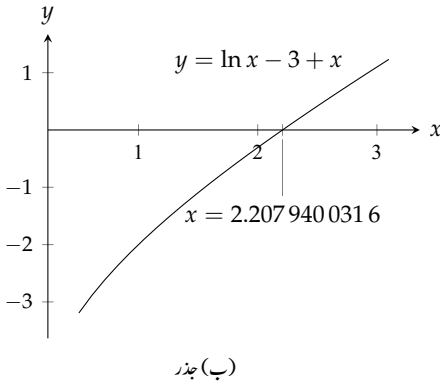
خطہ $x = -1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$

چوتھا قدم:

$$\begin{aligned}
S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} \\
&= \Big(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\Big) - \Big(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) \\
&= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

(ب) جذر

(ا) نقطہ قطع

شکل 6.6: تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

□

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع

تکمل کے حصول میں بعض اوقات تکمل کے حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لئے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کا نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x) = g(x)$ حل کرنے کے لئے ہم $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x) - g(x) = 0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل 6.6)۔

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

6.1.1 تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی خطے پر علیحدہ علیحدہ مساوات 6.1 کا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال 6.3: ربع اول میں $y = \sqrt{x}$ کے نیچے اور $y = x - 2$ کے اوپر رقبہ تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** ترسیم (شکل 6.7) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x) = \sqrt{x}$ ہے جبکہ $0 \le x \le 2$ پر اس کی نچلی سرحد $g(x) = 0$ اور $2 \le x \le 4$ پر نچلی سرحد $g(x) = x - 2$ ہے (نقطہ $x = 2$ پر $g(x)$ کے

دونوں کلیات ایک جیسے ہیں)۔ ہم $x = 2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لئے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔

دوسرا قدم: خطہ A میں تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 2$ ہیں۔ خطہ B کا بایاں حد $a = 2$ ہے۔اس کے دایاں حد جاننے کے لئے ہم مساوات $y = \sqrt{x}$ اور $y = x - 2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$$\sqrt{x} = x - 2 \qquad f(x) \text{ اور } g(x) \text{ کے برابر پر کریں}$$
$$x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{مربع لیں}$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \text{ایک جانب منتقلی}$$
$$(x-1)(x-4) = 0 \qquad \text{تجزی}$$
$$x = 1, \quad x = 4 \qquad \text{حل}$$

صرف $x = 4$ مساوات $\sqrt{x} = x - 2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے حل $x = 1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔ یوں دایاں حد $b = 4$ ہے۔

تیسرا قدم:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le 2$$
$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2, \qquad 2 \le x \le 4$$

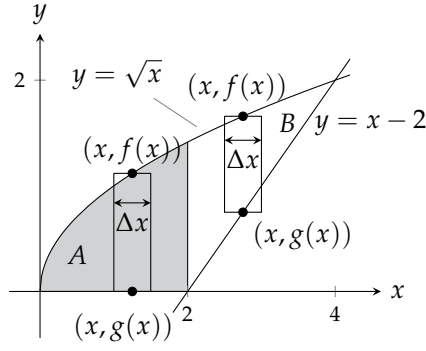
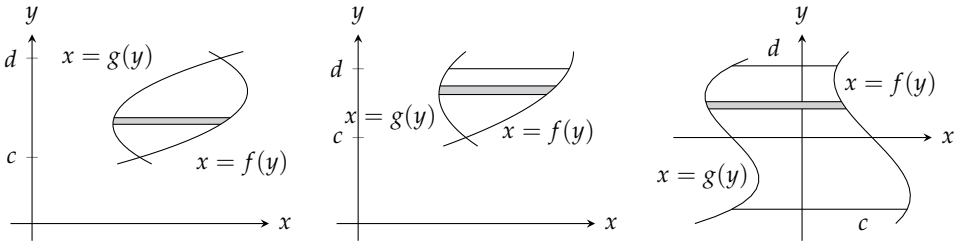
چوتھا قدم: ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

□

تکمل بلحاظ y

اگر سرحد کی مساواتیں y کی تفاعل ہوں تب تخمینی مستطیل کو انتصابی کی بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا (شکل 6.8):

$$S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y \tag{6.2}$$

شکل 6.7: خطہ برائے مثال 6.3

شکل 6.8: ان اشکال میں دایاں سرحد f اور بایاں سرحد g ہو گا لہٰذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

مثال 6.4: درج بالا مثال 6.3 کو اس بار مساوات 6.2 کی مدد سے حل کریں۔

حل: **پہلا قدم:** ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل 6.8)۔ خطے کا دایاں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہٰذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کا بایاں سرحد $x = y^2$ ہے لہٰذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔
دوسرا قدم: تکمل کا زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکمل کا بالائی حد جاننے کے لئے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لئے حل کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
y + 2 &= y^2 && f \text{ کو } g \text{ کے برابر پر کرتے ہیں} \\
y^2 - y - 2 &= 0 && \text{ایک ہاتھ منتقل} \\
(y + 1)(y - 2) &= 0 && \text{تجزی} \\
y = -1, \quad y &= 2 && \text{حل}
\end{aligned}
$$

تکمل کا بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تفاعل کا نقطہ قطع دیتا ہے)۔
تیسرا قدم:

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

چوتھا قدم:

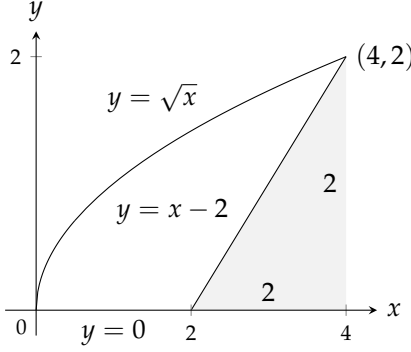
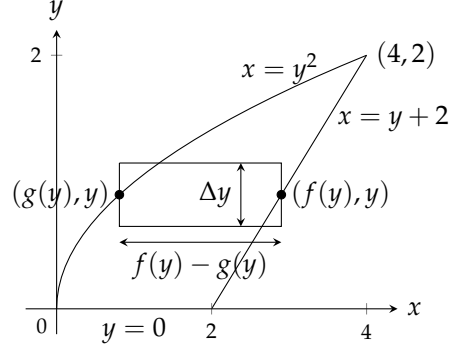
$$
\begin{aligned}
S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,\mathrm{d}y \\
&= \Big[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_0^2 \\
&= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

یہ وہی جواب ہے جو مثال 6.3 میں حاصل کی گیا۔ مثال 6.3 میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک ہی تکمل سے رقبہ معلوم کرنا ممکن تھا۔ □

تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال

تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

مثال 6.5: مزید ایک بار مثال 6.3 میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

شکل 6.9: خطہ برائے مثال 6.4

شکل 6.10: بالائی منحنی کے نیچے خطہ سے تکون منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

حل: ہم $0 \le x \le 4$ محور x اور $y = \sqrt{x}$ کے بیچ رقبہ سے تلا 2 اور قد 2 کے تکون کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

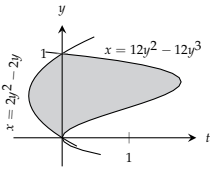
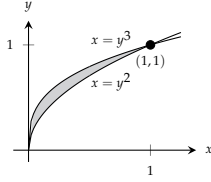
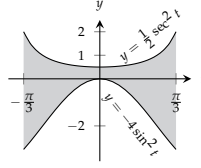
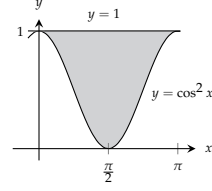
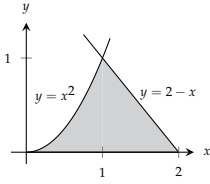
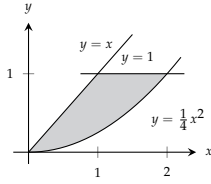
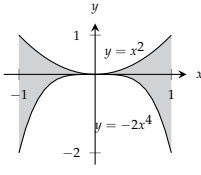
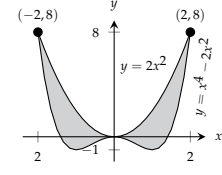
$$\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

□

گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہو گا۔

سوالات

سوال 6.1 تا سوال 6.8 میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.1: سایہ دار خطہ شکل 6.11 جہاں سرحد $y = 1$ اور $y = \cos^2 x$ ہیں۔
جواب: $\frac{\pi}{2}$

شکل 6.11 شکل 6.12 شکل 6.13 شکل 6.14

شکل 6.15 شکل 6.16 شکل 6.17 شکل 6.18

سوال 6.2: سایہ دار خطہ شکل 6.12 جہاں سرحد $y=\frac{1}{2}\sec^2 t$ ، $y=-4\sin^2 t$ ، $y=-\frac{\pi}{3}$ اور $y=\frac{\pi}{3}$ ہیں۔

سوال 6.3: سایہ دار خطہ شکل 6.13 جہاں سرحد $x=y^3$ اور $x=y^2$ ہیں۔
جواب: $\frac{1}{12}$

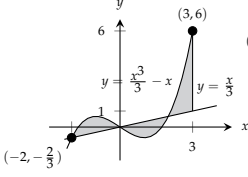
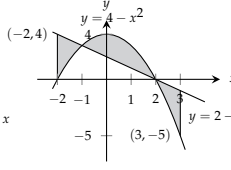
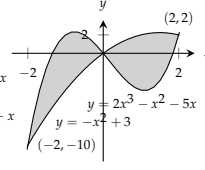
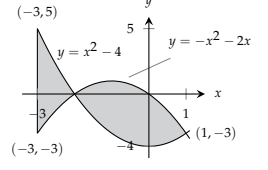
سوال 6.4: سایہ دار خطہ شکل 6.14 جہاں سرحد $x=12y^2-12y^3$ اور $x=2y^2-2y$ ہیں۔

سوال 6.5: سایہ دار خطہ شکل 6.15 جہاں سرحد $y=2x^2$ اور $y=x^4-2x^2$ ہیں۔
جواب: $\frac{128}{15}$

سوال 6.6: سایہ دار خطہ شکل 6.16 جہاں سرحد $y=x^2$ ، $y=-2x^4$ ، $x=-1$ اور $x=1$ ہیں۔

سوال 6.7: سایہ دار خطہ شکل 6.17 جہاں سرحد $y=1$ ، $y=x$ اور $y=\frac{x^2}{4}$ ہیں۔
جواب: $\frac{5}{6}$

سوال 6.8: سایہ دار خطہ شکل 6.18 جہاں سرحد $y=x^2$ ، $y=2-x$ اور $y=0$ ہیں۔

سوال 6.9 تا سوال 6.12 میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

شکل 6.22 شکل 6.21 شکل 6.20 شکل 6.19

سوال 6.9: سایہ دار رقبہ شکل 6.19 جہاں سرحد $y = x^2 - 4$ ، $y = -x^2 - 2x$ اور $x = -3$ ہیں۔
جواب: $\frac{38}{3}$

سوال 6.10: سایہ دار رقبہ شکل 6.20 جہاں سرحد $y = -x^2 + 3x$ اور $y = 2x^3 - x^2 - 5x$ ہیں۔

سوال 6.11: سایہ دار رقبہ شکل 6.21 جہاں سرحد $y = 4 - x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $x = -2$ اور $x = 3$ ہیں۔
جواب: $\frac{49}{6}$

سوال 6.12: سایہ دار رقبہ شکل 6.22 جہاں سرحد $y = \frac{x^3}{3} - x$ ، $y = \frac{x}{3}$ اور $x = 3$ ہیں۔

سوال 6.13 تا سوال 6.22 میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال 6.13: $y = x^2 - 2, \quad y = 2$
جواب: $\frac{32}{3}$

سوال 6.14: $y = 2x - x^2, \quad y = -3$

سوال 6.15: $y = x^4, \quad y = 8x$
جواب: $\frac{48}{5}$

سوال 6.16: $y = x^2 - 2x, \quad y = x$

سوال 6.17: $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 6.18: $y = 7 - 2x^2, \quad y = x^2 + 4$

سوال 6.19: $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2$
جواب: 8

سوال 6.20: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

سوال 6.21: $5y = x + 6 \quad y = \sqrt{|x|},$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟
جواب: $\frac{5}{3}$ تین نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں۔

سوال 6.22: $y = \left|x^2 - 4\right|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

سوال 6.23 تا سوال 6.30 میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.23: $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$
جواب: 18

سوال 6.24: $x = y^2, \quad x = y + 2$

سوال 6.25: $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$
جواب: $\frac{243}{8}$

سوال 6.26: $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

سوال 6.27: $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$
جواب: $\frac{8}{3}$

سوال 6.28: $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

سوال 6.29: $x = y^2 - 1, \quad x = |y|\sqrt{1 - y^2}$
جواب: 2

سوال 6.30: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

سوال 6.31 تا سوال 6.34 میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

سوال 6.31: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$
جواب: $\frac{104}{15}$

سوال 6.32: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال 6.33: $x + 4y^2 = 4 \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$
جواب: $\frac{56}{15}$

سوال 6.34: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال 6.35 تا سوال 6.42 میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.35: $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$
جواب: 4

سوال 6.36: $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

سوال 6.37: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$
جواب: $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

سوال 6.38: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

سوال 6.39: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 6.40: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

سوال 6.41: $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
جواب: 2

سوال 6.42: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال 6.43: ہوائی جہاز کے پنکھے کی طرح کا خطہ $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔
جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 6.44: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.45: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، لکیر $x = 2$ ، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور x محور کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 1

سوال 6.46: ربع اول میں بائیں جانب y محور اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 6.47: بالائی جانب لکیر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکافی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کی روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

ب. y کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

ج. x کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس بار بھی تکمل کے حد میں c پایا جائے گا۔)

جواب: (ا) $(\mp\sqrt{c}, c)$ ، (ب) $c = 4^{2/3}$ ، (ج) $c = 4^{2/3}$

سوال 6.48: منحنی $y = 3 - x^2$ اور لکیر $y = -1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے تکمل لے کر معلوم کریں۔

سوال 6.49: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $y = \frac{x}{4}$ ، بالائی بائیں منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$ اور بالائی دائیں منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں۔
جواب: $\frac{11}{3}$

سوال 6.50: ربع اول میں بائیں جانب y محور، نیچے لکیر $x = 2\sqrt{y}$ ، بالائی بائیں منحنی $x = (y-1)^2$ اور بالائی دائیں منحنی $x = 3 - y$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل 6.23)۔

سوال 6.51: قطع مکافی $y = x^2$ میں محصور تکون AOB شکل 6.24 میں دکھایا گیا ہے۔ تکون کا بالائی ضلع لکیر $y = a^2$ ہے۔ تکون اور قطع مکافی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a \to 0$ کر کے تلاش کریں۔
جواب: $\frac{3}{4}$

سوال 6.52: مثبت استمراری تفاعل f اور $a \le x \le b$ پر x محور کے بیچ رقبہ 4 ہے۔ منحنی $y = f(x)$ اور $y = 2f(x)$ کے بیچ رقبہ $x = a$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.53: درج ذیل میں سے کونسا تکمل شکل 6.25 میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 6.23: خطہ برائے سوال 6.50

شکل 6.24: خطہ برائے سوال 6.51

شکل 6.25: خطہ برائے سوال 6.53

ا. $\int_{-1}^{1}(x-(-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_{-1}^{1}(-x-(x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -2x\,\mathrm{d}x$

جواب: کوئی نہیں

سوال 6.54: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے بیچ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 6.55 تا سوال 6.58 میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یک بعد دیگرے جوڑی نقاط تقاطع کے بیچ $\left|f(x) - g(x)\right|$ کا تکمل حل کریں۔

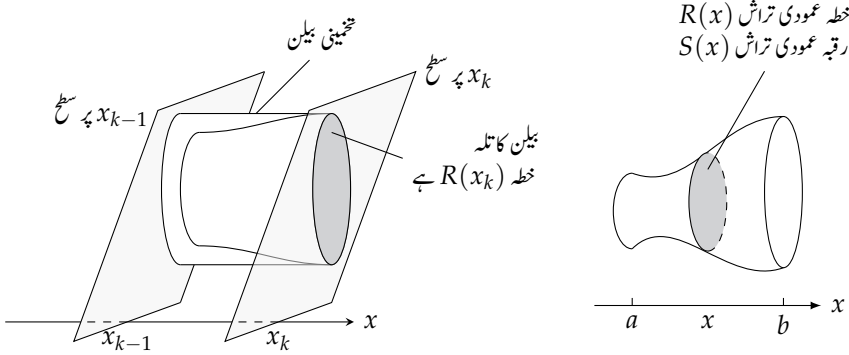
د. جزو-ج میں تکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال 6.55: $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}, \quad g(x) = x - 1$

سوال 6.56: $f(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 10, \quad g(x) = 8 - 12x$

سوال 6.57: $f(x) = x + \sin(2x), \quad g(x) = x^3$

سوال 6.58: $f(x) = x^2 \cos x, \quad g(x) = x^3 - x$

شکل 6.26: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل $S(x)$ کا تکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔

شکل 6.27: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ کتلا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تخمینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

6.2 ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

قوسی سرحد کے خطوں کے رقبہ عمودی تراش سے بیلنی حجم معلوم کرنے کے لئے رقبہ عمودی تراش کو بیلن کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلنی حجم سے دیگر اشکال کے خطوں کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے۔

ٹکیاں

فرض کریں ہم شکل 6.26 میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کا عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا جو x کا استمراری تفاعل بھی ہو گا۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جا سکتی ہے جس کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم x محور کے لحاظ سے وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بند نقطوں پر x محور کے عمودی سطحوں سے کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر سطحوں کے بیچ k ویں کتلا کا حجم تقریباً اس بیلن جتنا ہو گا جو ان سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے اور جس کا عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل 6.27)۔ اس بیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ تلہ} \\ &= S(x_k) \times (x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ کے بیچ فاصلہ}) \\ &= S(x_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کے حجم کے برابر ہو گا:

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

یہ وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں۔ کہ جیسے جیسے $[a,b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچے ویسے ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی تکمل ہو گا۔

تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو، کا $x=a$ سے $x=b$ تک حجم $x=a$ تا $x=b$ تفاعل S کا تکمل ہو گا:

$$H=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.3}$$

□

مساوات 6.3 استعمال کرنے کے لئے درج ذیل تین اقدام کرنے ہوں گے۔

ٹھوس جسم کی ٹکیوں سے حجم کی تلاش

1. ٹھوس جسم اور اس کے نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔
2. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔
3. تکمل کا زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔
4. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا تکمل حل کریں۔

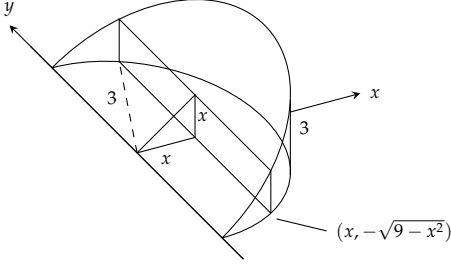
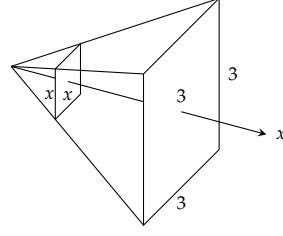
مثال 6.6: ایک اہرام کا قد $3\,\mathrm{m}$ اور اس کے چکور بنیاد کا ضلع $3\,\mathrm{m}$ ہے۔ اہرام کی چوٹی سے x میٹر نیچے اہرام کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا جس کا ضلع x میٹر ہو گا۔ اس اہرام کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم اہرام کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر اہرام کو x محور پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل 6.28)۔

دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$۔ چونکہ چکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہٰذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)=x^2$ ہو گا۔

تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ چکور $x=0$ تا $x=3$ پائے جاتے ہیں لہٰذا $a=0$ اور $b=3$ ہوں گے۔

چوتھا قدم: حجم۔

$$H=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3=9$$

شکل 6.29: قوسی پچر (مثال 6.7)

شکل 6.28: اہرام (مثال 6.6)

یوں اہرام کا حجم $9\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ □

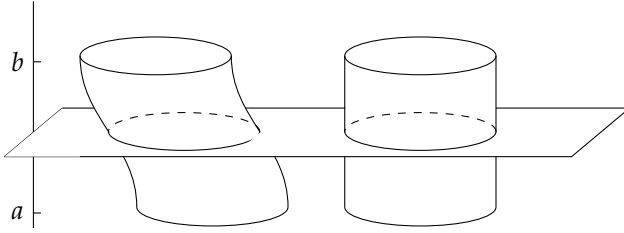
مثال 6.7: رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ایک مستوی بیلن کے محور کا عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو بیلن کے وسط پر $45°$ سے قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم پچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.29)۔ عمودی تراش x محور کے عمودی ہے۔
دوسرا قدم: کلیہ برائے $S(x)$۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{قد})(\text{چوڑائی}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

تیسرا قدم: تکمل کے حد۔ مستطیل $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں۔
چوتھا قدم: حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہٰذا $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ لے کر تکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\
&= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\
&= 18
\end{aligned}$$

□

شکل 6.30: ان اجسام کا حجم ایک دوسرے جیسا ہے۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

مثال 6.8: مسئلہ کوالیرے[1] محور x پر پڑے ہوئے ایسے دو اجسام جن کا ہر x پر رقبہ عمودی تراش ایک دوسرے جیسا ہو کا حجم بھی ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ یہ حقیقت مساوات 6.3 سے صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کا رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ ایک دوسرے جیسا ہے (شکل 6.30)۔ □

سوالات

رقبہ عمودی تراش

سوال 6.59 اور سوال 6.60 میں x محور کے عمودی، ٹھوس جسم کے، رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 6.59: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ اور نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-ب)۔

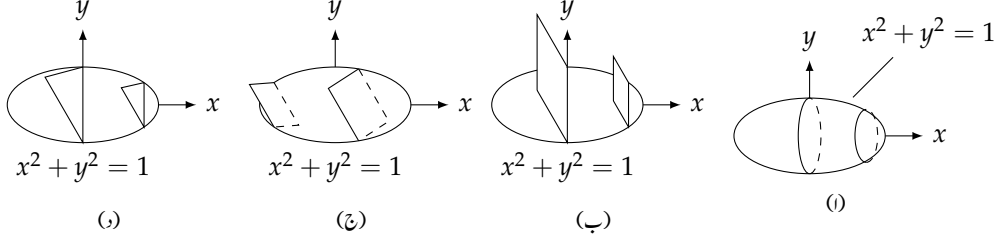
ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے (شکل 6.31-ج)۔

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.31-د)۔

جواب: (ا) $S(x) = \pi(1 - x^2)$، (ب) $S(x) = 4(1 - x^2)$،
(ج) $S(x) = 2(1 - x^2)$، (د) $S(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

سوال 6.60: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی جسم کے رقبہ عمودی تراش، قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ کے بیچ پائے جاتے ہیں۔

---

[1] اطالوی ریاضی دان بوناونتورا کوالیرے [1598-1647]

شکل 6.31: عمودی تراش برائے سوال 6.59

شکل 6.32: عمودی تراش برائے سوال 6.60

ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر xy مستوی میں ہیں (شکل 6.32-ا)۔

ب. عمودی تراش چکور ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں (شکل 6.60-ب)۔

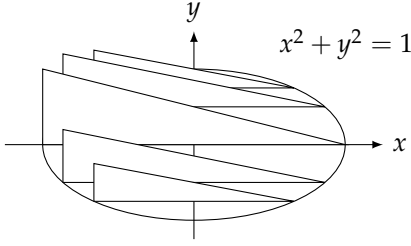
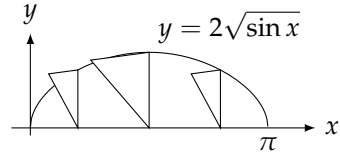
ج. عمودی تراش چکور ہیں جن کے وتر xy مستوی میں ہیں۔

د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے xy مستوی میں ہیں۔

ٹکیوں سے حجم کی تلاش

سوال 6.61 تا سوال 6.70 میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 6.61: ایک ٹھوس جسم $x=0$ اور $x=4$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش کی صورت چکور ہے جو x محور کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکافی $y=-\sqrt{x}$ سے $y=\sqrt{x}$ تک ہیں۔
جواب: 16

سوال 6.62: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکافی $y=x^2$ سے $y=2-x^2$ تک ہیں۔

شکل 6.34: عمودی تراش (سوال 6.68)

شکل 6.33: عمودی تراش (سوال 6.65)

سوال 6.63: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے تلا کے کنارے نصف دائرہ $y=-\sqrt{1-x^2}$ سے نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ تک ہیں۔
جواب: $\frac{16}{3}$

سوال 6.64: ایک ٹھوس جسم $x=-1$ اور $x=1$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے چکور عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y=-\sqrt{1-x^2}$ سے نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ تک ہیں۔ چکور کے وتر کی لمبائی چکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنّا ہوتی ہے۔

سوال 6.65: ایک ٹھوس جسم کا تلا منحنی $y=2\sqrt{\sin x}$ اور x محور پر وقفہ $[0,\pi]$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ x محور کے عمودی عمودی تراش درج ذیل ہیں۔

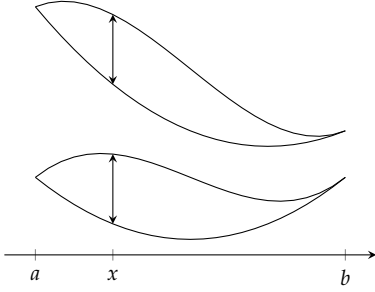
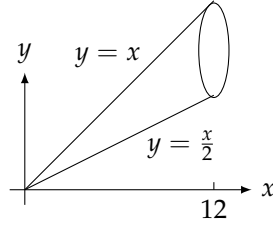
ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں (شکل 6.33)۔

ب. انتصابی چکور جن کے قاعدے x محور سے منحنی تک ہیں۔

جواب: (ا) $2\sqrt{3}$، (ب) 8

سوال 6.66: ایک ٹھوس جسم $x=-\frac{\pi}{3}$ اور $x=\frac{\pi}{3}$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کی خواص درج ذیل ہیں۔

ا. دائری اقراص جن کے قطر $y=\tan x$ سے $y=\sec x$ تک ہیں۔

ب. انتصابی چکور کن کے قاعدے $y=\tan x$ سے $y=\sec x$ تک ہیں۔

شکل 6.36: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالئیرے)۔

شکل 6.35: عمودی تراش (سوال 6.70)

سوال 6.67: ایک ٹھوس جسم $y = 0$ اور $y = 2$ پر y محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے دائری عمودی تراش y محور کے عمودی ہیں جن کے قطر y محور سے قطع مکافی $x = \sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔
جواب: 8π

سوال 6.68: ایک ٹھوس جسم کا تلا قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ y محور کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں پایا جاتا ہے (شکل 6.34)۔

مسئلہ کوالئیرے

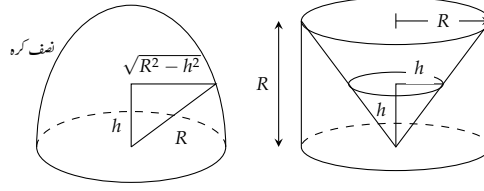
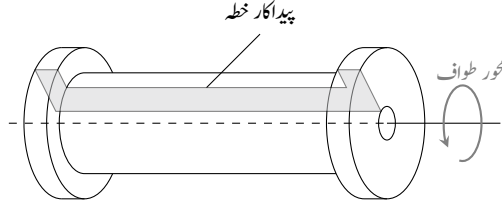
سوال 6.69: بلدار ٹھوس جسم
ایک چکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں پایا جاتا ہے۔ چکور کا ایک راس L پر پایا جاتا ہے۔ یہ چکور L پر h فاصلہ طے کرتے ہوئے ایک چکر کاٹ کر پیچ نما جسم دیتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چکور ہو گا۔

ا. اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

ب. اگر چکور ایک کی بجائے دو بار چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) s^2h ، (ب) s^2h

سوال 6.70: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر x محور کے عمودی سطحوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جسم کے عمودی تراش x محور کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل 6.35)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے تلا کا رداس 3 ہو؟

سوال 6.71: مسئلہ کوالئیرے کی ابتدائی صورت
کوالئیرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو x محور کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر

شکل 6.37: کرہ اور بیلن سے مخروط منفی کر کے ایک جیسا حجم ملتا ہے (سوال 6.72)۔

شکل 6.38: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جیسی ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ ایک دوسرے جیسا ہو گا (شکل 6.36)۔ ٹھوس اجسام کے لئے یہی مسئلہ کوالئیرے نے کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل 6.71 میں بالائی اور زیریں سرحدیں استمراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

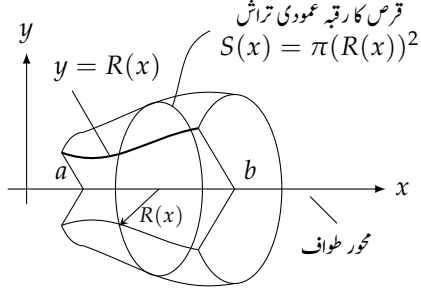
سوال 6.72: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالئیرے
نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔رداس R اور قد R کے قائمہ بیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹا کر نصف کرہ کا عمودی تراش حاصل ہوتا ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل 6.37)۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

6.3 اجسام طواف کے حجم۔قرص اور چھلا

مستوی خطے کو کسی محور کے گرد گمانے سے **جسم طواف**[2] پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.38)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لئے گھمائے جانے والے مستوی خطے کو **پیدا کار خطہ**[3] کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم ٹکیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استمراری تفاعل $y = R(x), \; a \leq x \leq b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر x محور گھومنے کا محور (**محور طواف**[4]) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 6.39)۔

---

[2] solid of revolution
[3] generating region
[4] axis of revolution

(ا) استمراری تفاعل $y = R(x)$ کو $x = a$ تا $x = b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔

(ب) قرص کا حجم $\mathrm{d}H = \pi(R(x))^2$ ہے۔

شکل 6.39: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x = a$ تا $x = b$ ، تفاعل S کا تکمل ہو گا۔

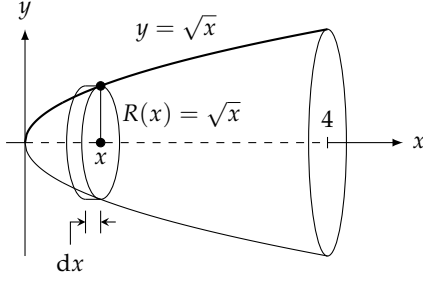
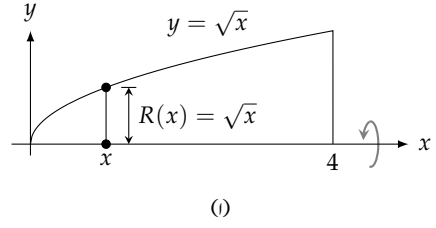
جسم طواف کا حجم (محور طواف x محور ہے)

استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ کو x محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_a^b \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

مثال 6.9: منحنی $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کو x محور کے گرد گمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل 6.40)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.4}\\
&= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x}\\
&= \pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi
\end{aligned}$$

شکل 6.40: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.9)

□

مساوات 6.4 سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ

ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

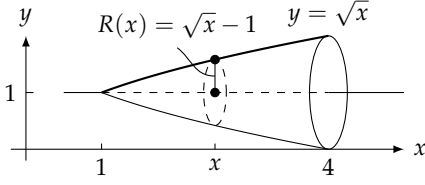
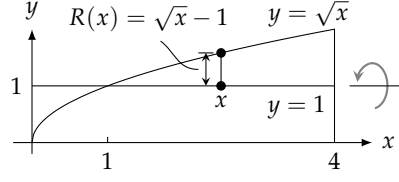
ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔

ج. رقبہ عمودی تراش کا تکمل حجم ہو گا۔

اگلے مثال میں محور طواف x محور نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: تکمل کے موزوں حد استعمال کریں۔

مثال 6.10: تفاعل $y = \sqrt{x}$، لکیر $y = 1$ اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 6.41)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2 \,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.4} \\
&= \int_1^4 \pi[\sqrt{x}-1]^2 \,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x}-1 \\
&= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \Big[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x\Big]_1^4 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$

شکل 6.41: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.10)

□

منحنی $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات 6.4 میں x کی جگہ y لکھا جاتا ہے۔

جسم طواف کا حجم (محور طواف y محور ہے)

استمراری تفاعل $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو y محور کے گرد گمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

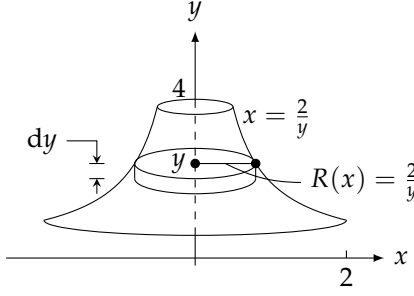
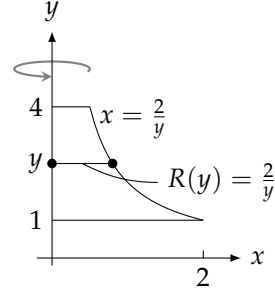
$$H = \int_c^d \pi[\text{رداس}]^2 \, dx = \int_c^d \pi[R(y)]^2 \, dy \tag{6.5}$$

مثال 6.11: منحنی $x = \frac{2}{y},\ 1 \le y \le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس بناتے ہیں (شکل 6.42)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2 \, dy && \text{مساوات 6.5} \\
&= \int_1^4 \pi\Big(\frac{2}{y}\Big)^2 \, dy && R(y) = \frac{2}{y} \\
&= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} \, dy = 4\pi\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^4 = 4\pi\Big[\frac{3}{4}\Big] = 3\pi
\end{aligned}$$

□

مثال 6.12: قطع مکافی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

شکل 6.42: مستوی خطہ، جسم طواف اور قرص (مثال 6.11)

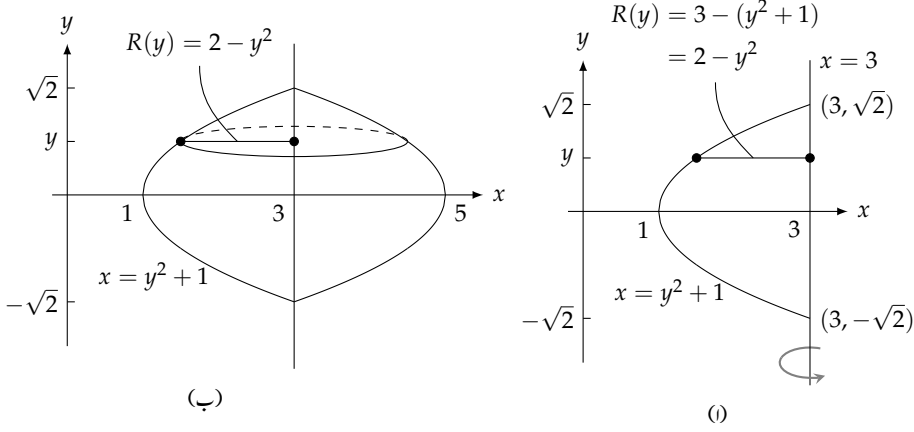
حل: ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کی نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 6.43)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y && \text{6.5 مساوات} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2-y^2]^2 \,\mathrm{d}y && R(y) = 3-(y^2+1) \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4-4y^2+y^4] \,\mathrm{d}y \\
&= \pi\Big[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

□

ترکیب چھلا

اگر گھمائے جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نا ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل 6.44)۔ ایسے جسم کا بیرونی رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$

شکل 6.43: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال 6.12)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

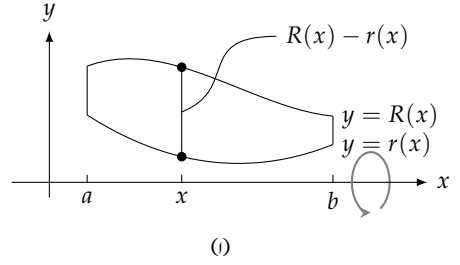
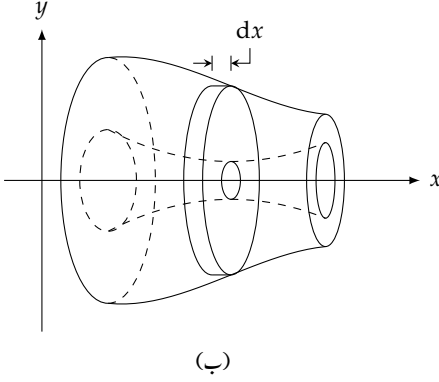
$$H = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

دھیان رہے کہ مساوات 6.6 میں تفاعل $\pi(R^2 - r^2)$ کا تکمل لیا جاتا ہے نا کہ تفاعل $\pi(R - r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس صفر ہو تب درج بالا سے مساوات 6.4 حاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب ٹکیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

مثال 6.13: منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطے کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل 6.45)۔

دوسرا قدم: نقاط تقاطع سے تکمل کے حد تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= -x + 3 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
(x + 2)(x - 1) &= 0 \\
x = -2, \quad x &= 1
\end{aligned}$$

شکل 6.44: یہاں جسم طواف قرص کی بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ ذرہ مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

تیسرا قدم: بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

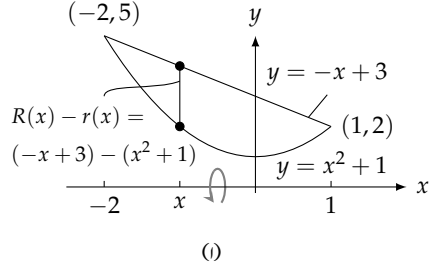
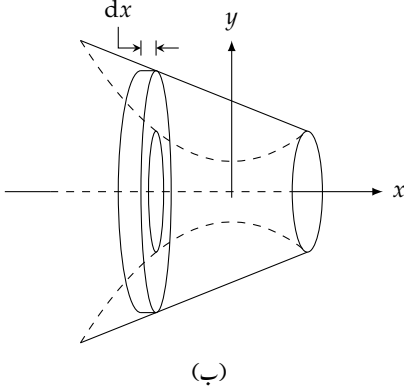
$R(x) = -x + 3$	بیرونی رداس
$r(x) = x^2 + 1$	اندرونی رداس

چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^1 \pi([-x+3]^2 - [x^2+1]^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5}
\end{aligned}
$$

□

ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع کھینچیں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطع نمائندہ عمودی تراش دے گا۔

شکل 6.45: مستوی خطہ اور چھلا نما جسم طواف (مثال 6.13)

ب. تکمل کے حد دریافت کریں۔

ج. عمودی تراش کا بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطع سے حاصل کریں۔

د. تکمل کی ذریعہ حجم حاصل کریں۔

اگر خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کی بجائے y کے ساتھ تکمل لیں۔

مثال 6.14: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ کھینچ کر خطہ پر محور طواف کے عمودی لکیری قطع بنائیں (شکل 6.46)۔ یہاں محور طواف y محور ہے۔

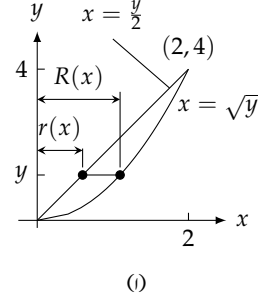
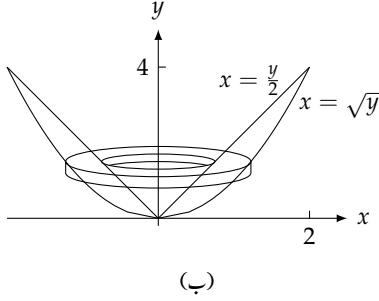
دوسرا قدم: قطع مکافی اور لکیر ایک دوسرے کو $y = 0$ اور $y = 4$ پر قطع کرتے ہیں للذا تکمل کے حد $c = 0$ اور $d = 4$ ہوں گے۔

تیسرا قدم: رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{y}{2}$ ہے۔

چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \pi\Big([\sqrt{y}]^2 - [\tfrac{y}{2}]^2\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^4 \Big(y - \frac{y^2}{4}\Big)\,\mathrm{d}y = \pi\Big[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\Big]_0^4 = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

(ا)

(ب)

شکل 6.46: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.14)

□

مثال 6.15: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم دریافت کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خطے کے خاکہ پر محور طواف $x = \frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطع بنائیں (شکل 6.47)۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد $y = 0$ اور $y = 1$ ہیں۔

تیسرا قدم: عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ ہے۔

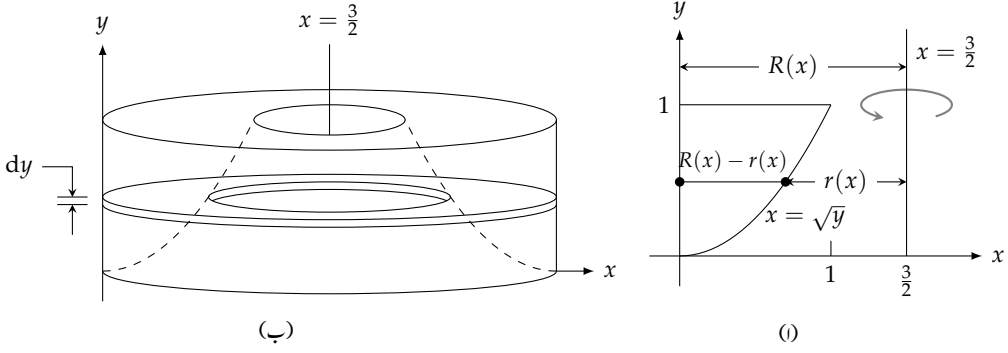
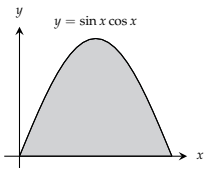
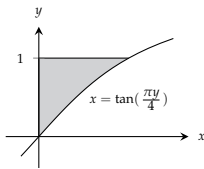
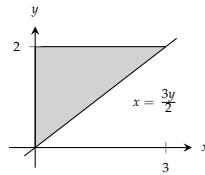
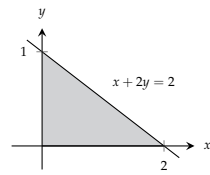
چوتھا قدم: تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi([\tfrac{3}{2}]^2 - [\tfrac{3}{2} - \sqrt{y}]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \pi\Big[2y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

□

سوالات

حجم بذریعہ ترکیب ٹکیا

سوال 6.73 تا سوال 6.76 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

شکل 6.47: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال 6.15)

شکل 6.51 شکل 6.50 شکل 6.49 شکل 6.48

سوال 6.73: سایہ دار خطہ شکل 6.48 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x+2y=2$ ہے۔
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.74: سایہ دار خطہ شکل 6.49 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\frac{3y}{2}$ ہے۔

سوال 6.75: سایہ دار خطہ شکل 6.50 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x=\tan(\frac{\pi y}{4})$ ہے۔
جواب: $4-\pi$

سوال 6.76: سایہ دار خطہ شکل 6.51 میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y=\sin x\cos x$ ہے۔

سوال 6.77 تا سوال 6.82 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.77: $y=x^2,\quad y=0,\quad x=2$
جواب: $\frac{32\pi}{5}$

سوال 6.78: $y=x^3,\quad y=0,\quad x=2$

سوال 6.79: $y=\sqrt{9-x^2},\quad y=0$
جواب: 36π

سوال 6.80: $y=x-x^2,\quad y=0$

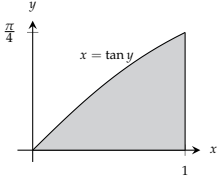
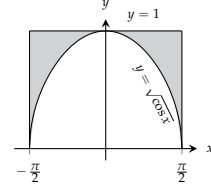
سوال 6.81: $y=\sqrt{\cos x},\quad 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad x=0,\quad y=0$
جواب: π

سوال 6.82: $y=\sec x,\quad y=0,\quad x=-\frac{\pi}{4},\quad x=\frac{\pi}{4}$

سوال 6.83 اور سوال 6.84 میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 6.83: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=\sqrt{2}$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=\sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\pi\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-\frac{11}{3}\right)$

سوال 6.84: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y=2$ ، زیریں سرحد منحنی $y=\sec x\tan x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y=2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.85 تا سوال 6.90 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔

شکل 6.52

شکل 6.53

سوال 6.85: $x=\sqrt{5}y^2, \quad x=0, \quad y=-1, \quad y=1$
جواب: 2π

سوال 6.86: $x=y^{3/2}, \quad x=0, \quad y=2$

سوال 6.87: $x=\sqrt{2\sin 2y}, \quad 0\le y\le \frac{\pi}{2}, \quad x=0$
جواب: 2π

سوال 6.88: $x=\sqrt{\cos\frac{\pi y}{4}}, \quad -2\le y\le 0, \quad x=0$

سوال 6.89: $x=\frac{2}{y+1}, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=3$
جواب: 3π

سوال 6.90: $x=\frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}, \quad x=0, \quad y=1$

حجم بذریعہ ترکیب چھلا

سوال 6.91 اور سوال 6.91 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.91: خطہ شکل 6.52 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\pi^2-2\pi$

سوال 6.92: خطہ شکل 6.53 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.93 تا سوال 6.100 میں دیے منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو x محور گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.93: $y=x, \quad y=1, \quad x=0$
جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.94: $y=2x, \quad y=x, \quad x=1$

سوال 6.95: $y=2\sqrt{x}, \quad y=2, \quad x=0$
جواب: 2π

سوال 6.96: $y=-\sqrt{x}, \quad y=-2, \quad x=0$

سوال 6.97: $y=x^2+1, \quad y=x+3$
جواب: $\frac{117\pi}{5}$

سوال 6.98: $y=4-x^2, \quad y=2-x$

سوال 6.99: $y=\sec x, \quad y=\sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\pi(\pi-2)$

سوال 6.100: $y=\sec x, \quad y=\tan x, \quad x=0, \quad x=1$

سوال 6.101 تا سوال 6.106 میں خطے کو y محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال 6.101: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کی راسیں $(1,0)$ ، $(2,1)$ اور $(1,1)$ ہیں۔
جواب: $\frac{4\pi}{3}$

سوال 6.102: مثلث جس کی راسیں $(0,1)$ ، $(1,0)$ اور $(1,1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

سوال 6.103: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکافی $y=x^2$ ، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x=2$ ہے۔
جواب: 8π

سوال 6.104: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y=\sqrt{x}$ اور زیریں سرحد لکیر $y=x$ ہے۔

سوال 6.105: ربع اول میں خطہ جس کا بایاں سرحد دائرہ $x^2+y^2=3$ ، دایاں سرحد لکیر $x=\sqrt{3}$ اور بالائی سرحد لکیر $y=\sqrt{3}$ ہے۔
جواب: $\sqrt{3}\pi$

سوال 6.106: خطے کی بائیں سرحد لکیر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال 6.107 اور سوال 6.108 میں خطے کو دیئے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 6.107: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$، زیریں سرحد محور x اور دایاں سرحد لکیر $x = 1$ ہیں۔ خطے کو لکیر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $\frac{7\pi}{6}$

سوال 6.108: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$، زیریں سرحد محور x اور بایاں سرحد لکیر $x = -1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم

سوال 6.109: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$، $y = 2$ اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x؛

ب. محور y؛

ج. لکیر $y = 2$؛

د. لکیر $x = 4$

جواب: (ا) 8π، (ب) $\frac{32\pi}{5}$، (ج) $\frac{8\pi}{3}$، (د) $\frac{224\pi}{15}$

سوال 6.110: ایک تکونی خطہ جس کی سرحدیں $y = 2x$، $y = 0$ اور $x = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

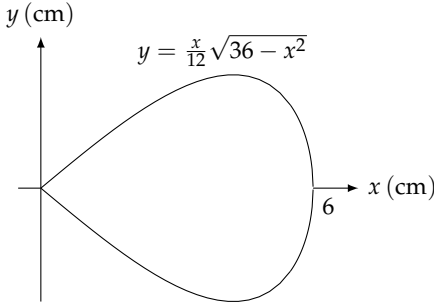
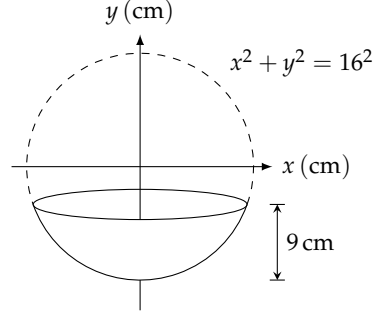
ا. لکیر $x = 1$؛

ب. لکیر $x = 2$

سوال 6.111: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y = x^2$ اور $y = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $y = 1$؛

ب. لکیر $y = 2$؛

ج. لکیر $y = -1$

شکل 6.55: ناشپاتی نما گولہ (سوال 6.114)

شکل 6.54: کروی برتن (سوال 6.113)

جواب: (ا) $\frac{16\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{56\pi}{15}$ ، (ج) $\frac{64\pi}{15}$

سوال 6.112: ایک مثلث جس کی راسیں $(0,0)$ ، $(b,0)$ اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y

سوال 6.113: ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کا حجم تکمل کی مدد سے دریافت کریں (شکل 6.54)۔
جواب: $H = 1053\pi \text{ cm}^3$

سوال 6.114: منحنی $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, 0 \le x \le 6\,\text{cm}$ کو x محور کے گرد گھما کر ناشپاتی نما پیتل کا گولہ بنایا جاتا ہے (شکل 6.55)۔ پیتل کی کثافت $8.5\,\text{g}\,\text{cm}^{-3}$ لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟

سوال 6.115: منحنی $y = \sin x, 0 \le x \le \pi x$ کو لکیر $y = c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0 \le c \le 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی کم سے کم حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس کم سے کم حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0,1]$ میں c کی کونسی قیمت زیادہ سے زیادہ حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالمقابل c کو پہلے $0 \le c \le 1$ کے لئے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لئے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0,1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $c = \frac{2}{\pi}$، (ب) $c = 0$

سوال 6.116: ہیلی کاپٹر کی پہنچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کا اضافی حوض نسب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3}$, $-1 \le x \le 1$ کو x محور کے گرد گھما کر حوض بنایا جاتا ہے۔ اس حوض میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال 6.117: اندرسہ کا حجم
دائری قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کو لکیر $y = b\,(b > a)$ کے گرد گھما کر **اندرسہ**[5] پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔
(اشارہ۔ $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔)
جواب: $H = 2a^2 b\pi^2$

سوال 6.118: (ا) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو، اس لمحہ گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟

سوال 6.119: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات 6.4 استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کا قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

جواب: (ب) $H = \frac{\pi r^2 h}{3}$

6.4 نلکی چھلے

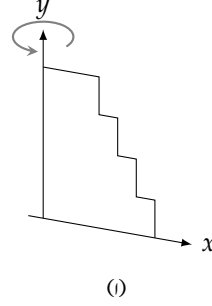
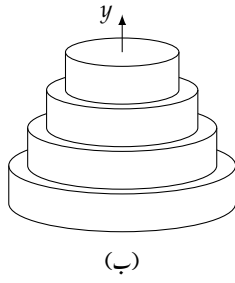
اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کی بجائے نلکی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل 6.56)۔

---

[5] torus

(ا)

(ب)

شکل 6.56: نلکی جسم طواف

نلکی کلیہ

فرض کریں ہم x محور اور وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے نیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینی رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہو گا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل 6.57)۔ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{خول کا اوسط رداس} \times \text{خول کا قد} \times \text{موٹائی}$$

ہو گا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

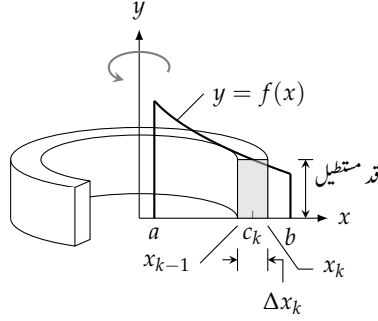
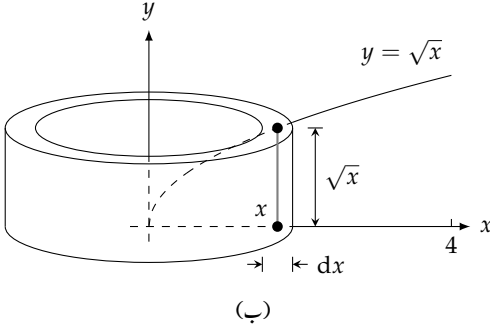
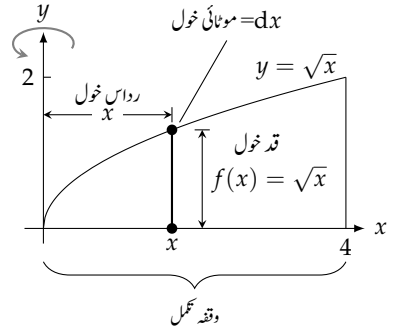
$$H \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

$\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے اس مجموعہ کا حد ٹھوس جسم کا حجم ہو گا:

$$H = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x) \, \mathrm{d}x$$

کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف

استمراری تفاعل $y = f(x), \; 0 \le a \le x \le b$ اور محور x کے نیچ خطے کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول})(\text{قد خول}) \, \mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi x f(x) \, \mathrm{d}x \tag{6.7}$$

شکل 6.57: k ویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل نلکی خول۔

شکل 6.58: نلکی خول (مثال 6.16)

مثال 6.16: منحنی $y=\sqrt{x}$ ، لکیر $x=4$ اور x محور کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطع دکھائیں۔ قطع کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطع کے فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی چوڑائی $\mathrm{d}x$ خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل 6.58 میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: تکمل کے حد معلوم کریں۔ خطہ میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہٰذا تکمل کے حد a اور b ہوں گے۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi (\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.7} \\ &= \int_0^4 2\pi (x)(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi \int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \Big[\frac{2}{5}x^{5/2}\Big]_0^4 = \frac{128\pi}{5} \end{aligned}$$

□

محور y کے گرد خطہ گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات 6.7 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اگر ہم خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات 6.7 میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

کلیہ خول برائے x محور کے گرد طواف

$$H = \int_c^d 2\pi (\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi y f(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.8}$$

درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \le c \le y \le d$ ہیں۔

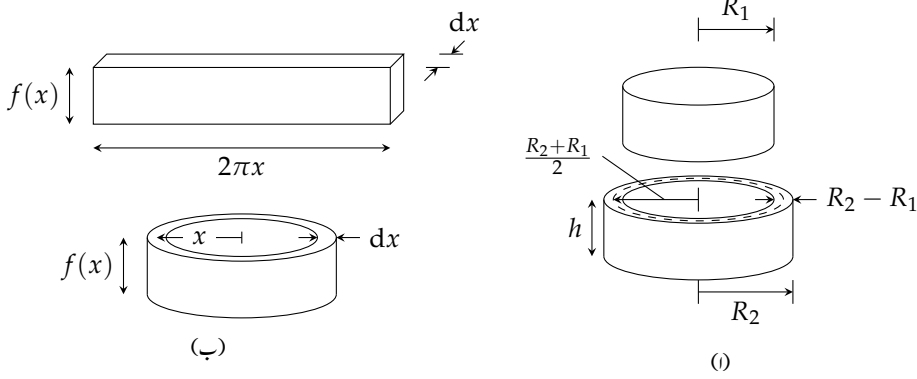
خول کا جیومیٹریائی حجم

ایک ٹھوس بیلن جس کا رداس R_2 اور قد h ہو کا حجم $\pi R_2^2 h$ ہو گا۔اگر اس جسم سے رداس R_1 کا ٹھوس بیلن کاٹا جائے تب حاصل خول کا حجم $\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h$ ہو گا (شکل 6.59-ا) جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \text{حجم خول} &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h \\ &= \pi (R_2^2 - R_1^2) h \\ &= \pi (R_2 + R_1)(R_2 - R_1) h && R_2^2 - R_1^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \\ &= 2\pi \big(\tfrac{R_2+R_1}{2}\big)(R_2 - R_1) h && \text{2 سے ضرب اور تقسیم} \\ &= 2\pi (\text{رداس خول})(\text{موٹائی خول})(\text{قد خول}) \end{aligned}$$

جہاں خول کا اوسط رداس $\frac{R_2+R_1}{2}$ ہے، خول کی موٹائی $R_2 - R_1 r$ ہے اور خول کا قد h ہے۔

ایک خول جس کا اوسط رداس x ، موٹائی $\mathrm{d}x$ اور قد $f(x)$ ہو کو شکل 6.59-ب میں کھول کر پٹی کی شکل دی گئی ہے۔ اس پٹی کا حجم درج ذیل ہو گا جو خول کے حجم کا کلیہ ہے (مساوات 6.7 اور مساوات 6.8 کو یاد رکھنے کا یہ بہترین طریقہ ہے)۔

$$H = 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x$$

شکل 6.59: خول کا حجم۔

مثال 6.17: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ اور x محور کے بیچ خطے کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطع دکھائیں۔ قطع کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کا فاصلہ (رداس خول) کی نشاندہی کریں۔ قطع کی موٹائی، خول کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہو گی۔ ہم نے شکل 6.60 میں y محور کے گرد بیلن دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں ہے۔

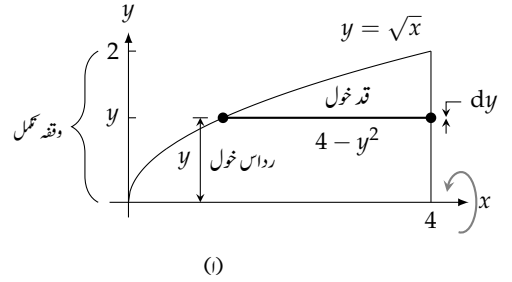
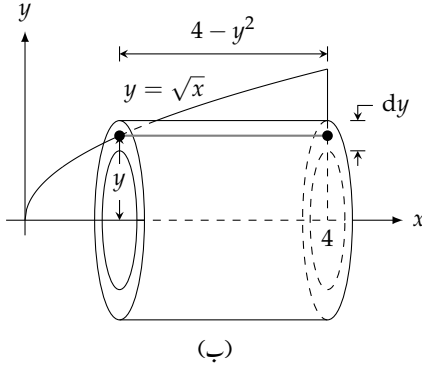
دوسرا قدم: تکمل کے حد معلوم کریں۔چونکہ خطہ میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہٰذا یہی اس کے حد ہیں۔

تیسرا قدم:

$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d 2\pi()()\,\mathrm{d}y && \text{مساوات 6.8}\\
&= \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\,\mathrm{d}y && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi
\end{aligned}
$$

یہ نتیجہ مثال 6.9 میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔ □

ترکیب خول کا استعمال

محور طواف (افقی یا انتصابی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

شکل 6.60: محور x کے گرد طواف (مثال 6.17)

ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

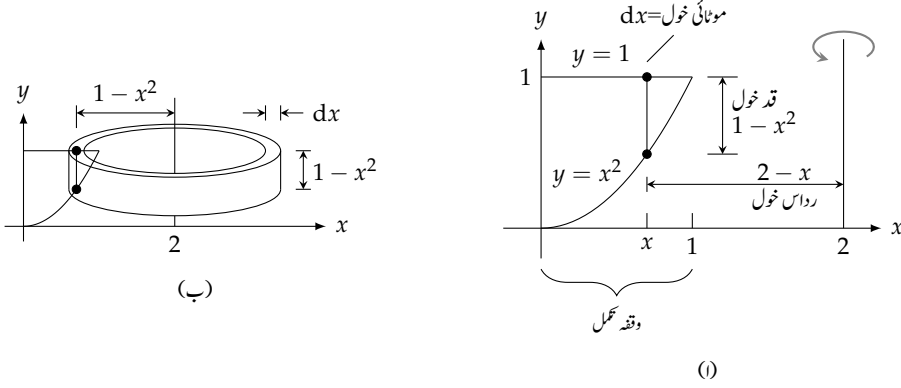
ب. تکمل کے حد معلوم کریں

ج. متکمل (2π)(رداس خول)(قد خول) کا موزوں متغیر (x یا y) کے ساتھ تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔

اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x = 2$ ہے۔

مثال 6.18: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$، لکیر $y = 1$ اور y محور کے بیچ خطے کو محور طواف $x = 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: **پہلا قدم:** خطے پر محور طواف کے متوازی قطع بنائیں۔ قطع کا قد (قد خول)، محور طواف سے قطع کا فاصلہ (رداس خول) اور قطع کی موٹائی (چوڑائی خول dx) کی نشاندہی کریں (شکل 6.61)۔ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔
دوسرا قدم: تکمل کے حد $a = 0$ اور $b = 1$ ہیں۔
تیسرا قدم:

$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات 6.7}\\
&= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\int_0^1 (2-x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}$$

شکل 6.61: خطہ اور خول (مثال 6.18)

□

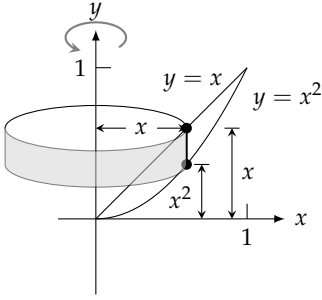
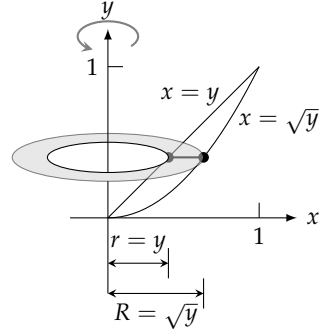
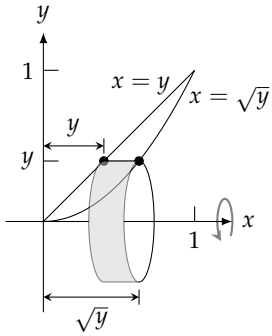
تفاعل $y = x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل 6.62 میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-6.62-ا اور ب میں y محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل-ج اور د میں x محور کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطے کے لئے دونوں محور طواف کے لئے دونوں تراکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر صورت میں نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر y محور کے گرد گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے تکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ متکمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہو گی جو ہمیں x کے لحاظ سے تکمل لینے کی اجازت دیگا۔

ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت ایک جیسے حجم حاصل ہوں گے۔ ہم حصہ 7.1 کے سوال 7.52 میں ان کی برابر کو ثابت کر پائیں گے۔

سوالات

سوال 6.120 تا سوال 6.125 میں خطے کو دکھائے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم ترکیب خول سے دریافت کریں۔

سوال 6.120: خطہ شکل 6.63 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 6π

سوال 6.121: خطہ شکل 6.64 میں دکھایا گیا ہے۔

$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2]\,\mathrm{d}y = \tfrac{\pi}{6}$$

(ا)

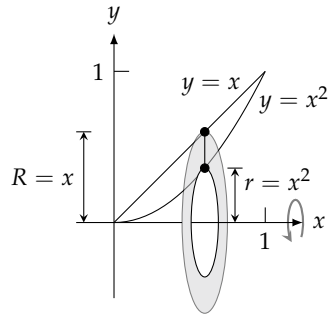
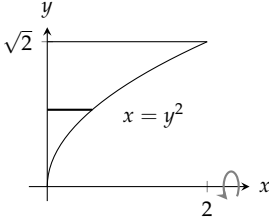
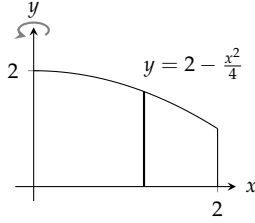
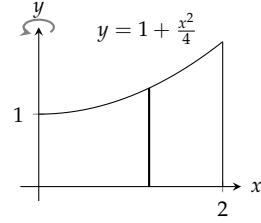
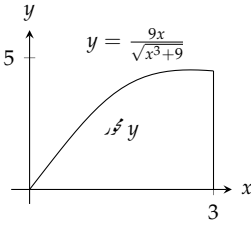
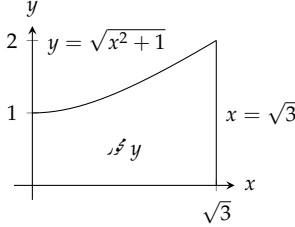
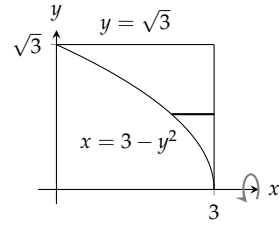
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

(ب)

$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2]\,\mathrm{d}x = \tfrac{2\pi}{15}$$

(ج)

$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{2\pi}{15}$$

(د)

شکل 6.62

شکل 6.65

شکل 6.64

شکل 6.63

شکل 6.68

شکل 6.67

شکل 6.66

سوال 6.122: خطہ شکل 6.65 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: 2π

سوال 6.123: خطہ شکل 6.66 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.124: خطہ شکل 6.67 میں دکھایا گیا ہے۔
جواب: $\frac{14\pi}{3}$

سوال 6.125: خطہ شکل 6.68 میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.126 تا سوال 6.133 میں دیے منحنیات اور لکیروں میں محیط خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے تلاش کریں۔

سوال 6.126: $y = x, \quad y = -\frac{x}{2}, \quad x = 2$
جواب: 8π

سوال 6.127: $y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad x = 1$

سوال 6.128: $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, (x \geq 0)$
جواب: $\frac{5\pi}{6}$

سوال 6.129: $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

سوال 6.130: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$
جواب: $\frac{128\pi}{5}$

سوال 6.131: $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

سوال 6.132: $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2$
جواب: 3π

سوال 6.133: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

سوال 6.134 تا سوال 6.141 میں طواف جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔ منحنیات اور لکیروں میں محیط رقبہ کو y محور کے گرد گھمایا گیا ہے۔

سوال 6.134: $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$
جواب: $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2} + 5)$

سوال 6.135: $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2$

سوال 6.136: $x = 2y - y^2, \quad x = 0$
جواب: $\frac{8\pi}{3}$

سوال 6.137: $x = 2y - y^2, \quad x = y$

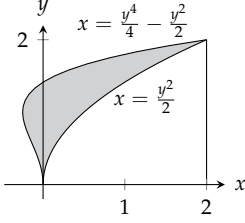
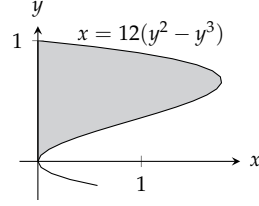
سوال 6.138: $y = |x|, \quad y = 1$
جواب: $\frac{4\pi}{3}$

سوال 6.139: $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

سوال 6.140: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$
جواب: $\frac{16\pi}{3}$

سوال 6.141: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

سوال 6.142 اور سوال 6.143 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 6.142: خطے کو شکل 6.69 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 6.69

شکل 6.70

ا. محور x کے گرد،

ب. محور طواف لکیر $y = 1$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = \frac{8}{5}$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{2}{5}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جواب: (ا) $\frac{6\pi}{5}$ ، (ب) $\frac{4\pi}{5}$ ، (ج) 2π ، (د) 2π

سوال 6.143: خطے کو شکل 6.70 میں دکھایا گیا ہے۔

ا. محور x کے گرد،

ب. محور طواف لکیر $y = 2$ ہے،

ج. محور طواف لکیر $y = 5$ ہے،

د. لکیر $y = -\frac{5}{8}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.144 تا سوال 6.144 میں خطوں کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔ آپ ترکیب چھلا یا ترکیب خول استعمال کر سکتے ہیں۔

سوال 6.144: تکون جس کے راس $(1,1)$ ، $(1,2)$ اور $(2,2)$ ہیں۔ (ا) x محور کے گرد، (ب) y محور کے گرد، (ج) لکیر $x = \frac{10}{3}$ کے گرد، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد۔
جواب: (ا) $\frac{5\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{4\pi}{3}$ ، (ج) 2π ، (د) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 6.145: ربع اول میں منحنی $x = y - y^3$ اور y محور میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے

سوال 6.146: ربع اول میں $x = y - y^3$ ، $x = 1$ اور $y = 1$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 1$ ، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{11\pi}{15}$ ، (ب) $\frac{97\pi}{105}$ ، (ج) $\frac{121\pi}{210}$ ، (د) $\frac{23\pi}{30}$

سوال 6.147: تکونی خطہ جس کے سرحد لکیر $2y = x + 4$ ، $y = x$ ، اور $x = 0$ ہیں کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$ ، اور (د) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.148: ربع اول میں $y = x^3$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، اور (ب) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{512\pi}{21}$ ، (ب) $\frac{832\pi}{21}$

سوال 6.149: سرحد $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{x^2}{8}$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x اور (ب) محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.150: سرحد $y = 2x - x^2$ اور $y = x$ میں محیط خطہ کو (ا) محور y اور (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: (ا) $\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$

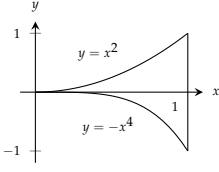
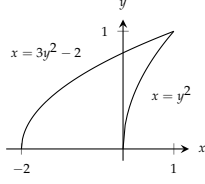
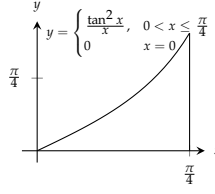
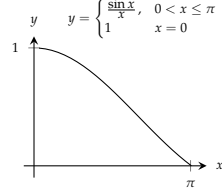
سوال 6.151: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 2$ اور $x = 0$ کے بیچ خطہ کو (ا) x محور، (ب) y محور، (ج) لکیر $x = 4$ ، (د) لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 6.152: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = x^{-1/4}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{16}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو x محور کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔
جواب: $\frac{9\pi}{16}$

سوال 6.153: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = \sqrt{x}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{4}$ ، اور نیچے جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو y محور کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔

سوال 6.154: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل 6.71)۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $x f(x) = \sin x, 0 \le x \le \pi$ ہو گا۔

شکل 6.74 شکل 6.73 شکل 6.72 شکل 6.71

ب. اس تفاعل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

جواب: (ب) 4π

سوال 6.155: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل 6.72)۔

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \tan x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ہو گا۔

ب. اس تفاعل کو y محور کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.156: محور x کے گرد شکل 6.73 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: قرص: دو تکمل؛ چھلا: دو تکمل؛ خول: ایک تکمل

سوال 6.157: محور y کے گرد شکل 6.74 میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.158: فرض کریں وقفہ $0 \le x$ پر تفاعل $f(x)$ غیر منفی اور استمراری ہے۔ منحنی f، لکیر $x = b$ اور کارتیسی محدد کے بیچ خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں b کوئی مثبت عدد ہے۔ اس جسم طواف کا حجم $2\pi b^3$ ہے۔ تفاعل $f(x)$ دریافت کریں۔
جواب: $3x$

شکل 6.75: منحنی AB کے قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ہو گی۔

شکل 6.76: نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پر ماس اور قطع متوازی ہیں۔

6.5 مستوی منحنیات کی لمبائیاں

نقشہ پر سڑک کی لمبائی جاننے کی خاطر ہم فیتہ استعمال کرتے ہوئے نقشہ پر سڑک کی منحنی پر قریب قریب نقطوں کے مابین قطعات کو سیدھا تصور کرتے ہوئے ان کی لمبائیوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس طرح اندازاً لمبائی کی درستگی کی حد قطعات کی تعداد اور ناپنے کی درستگی پر منحصر ہو گی۔

احصاء کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کو قریب سے قریب رکھ کر بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔ ان نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع حاصل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ قطعات لینے سے کثیر الاضلاع کی لمبائی، اصل منحنی کی لمبائی کے زیادہ قریب ہو گی۔ کثیر الاضلاع کی لمبائی کی حد کو تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم $x = a$ سے $x = b$ تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی عام طریقہ سے کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع بناتے ہیں جو اصل منحنی کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے (شکل 6.75)۔ اگر ہم کثیر الاضلاع کی لمبائی کا کلیہ تلاش کر سکیں ہم اسی کلیہ کو منحنی کی لمبائی کے لئے استعمال کر سکتے ہیں۔

قطع PQ کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ ہو گی (شکل 6.75)۔ یوں منحنی کی لمبائی تخمیناً درج ذیل مجموعہ ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.9}$$

وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی باریک کرنے سے حاصل مجموعہ تخمیناً زیادہ بہتر ہو گا۔ ہم دکھانا چاہیں گے کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.9 کا مجموعہ قابل معلوم حد دیگا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم مساوات 6.9 کو ایسی روپ میں لکھتے ہیں کہ اس پر مسئلہ 5.1 (صفحہ 534) کا اطلاق ممکن ہو۔ ہم تفرق کے مسئلہ اوسط قیمت سے شروع کرتے ہیں۔

تعریف: ایسا تفاعل جس کا پہلا تفرق استمراری ہو **ہموار**[6] کہلاتا ہے اور اس کی منحنی کو **ہموار منحنی**[7] کہتے ہیں۔

□

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ منحنی پر ایک ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پایا جائے گا جہاں منحنی کا مماس قطع PQ کا متوازی ہو گا (شکل 6.76)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \implies \Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

مساوات 6.9 میں Δy_k کی اس قیمت کو پر کرنے سے درج ذیل روپ ملتا ہے۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

چونکہ $[a, b]$ پر $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ استمراری ہے لہٰذا خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کا حد $\int_a^b \sqrt{a + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ منحنی کی لمبائی کی تعریف اس قطعی تکمل کی قیمت ہے۔

تعریف: اگر $[a, b]$ پر f ہموار ہو تب a سے b تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

□

مثال 6.19: درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

حل: ہم $a = 0$ ، $b = 1$ اور

$$\begin{aligned}
y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x
\end{aligned}$$

---

[6] smooth
[7] smooth curve

لیتے ہوئے مساوات 6.10 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

□

تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ میں عدم استمرار

کبھی کبھار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر موجود لیکن $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ موجود ہو گا اور ہم x کو y کا تفاعل لکھ کر منحنی کی لمبائی مساوات 6.10 کی درج ذیل مشابہ سے حاصل کر پاتے ہیں۔

منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کلیہ:

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.11}$$

مثال 6.20: منحنی $y = (\frac{x}{2})^{2/3}$ کی لمبائی $x = 0$ تا $x = 2$ معلوم کریں۔

حل: منحنی کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

نقطہ $x = 0$ پر غیر معین یعنی غیر موجود ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی حاصل کرنے کے لئے مساوات 6.10 نا قابل استعمال ہے۔

ہمیں x کو y کی صورت میں لکھنا ہو گا (شکل 6.77):

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} \\ x &= 2y^{3/2} \end{aligned}$$

یوں ہم دیکھتے ہیں کہ درکار منحنی کو تفاعل $x = 2y^{3/2}$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں منحنی کے سر $y = 0$ اور $y = 1$ پر ہوں گے۔

شکل 6.77: منحنی برائے مثال 6.20

شکل 6.78: تعلق $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کا حصول۔

اس کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$

وقفہ $[0, 1]$ پر استمراری ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی کی خاطر مساوات 6.11 قابل استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1) \approx 2.27 \end{aligned}$$

□

مختصر تفریقی کلیہ

لمبائی معلوم کرنے کی مساوات

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.12}$$

کو عموماً تفرقی روپ کی بجائے تفریقی روپ میں لکھا جاتا ہے۔ ایسا با ضابطہ طور پر کرنے کے لئے تفرق کو تفریقوں کا حاصل تقسیم تصور کریں۔ یوں پہلے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

دوسرے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

اس طرح مساوات 6.12 میں دیے دونوں تکمل درج ذیل ایک تفریقی کلیہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$L = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{6.13}$$

ظاہر ہے کہ $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو ایک جیسا متغیر کی صورت میں لکھنا ضروری ہے اور مساوات 6.13 میں دیا تکمل حل کرنے کے لئے تکمل کے موزوں حد بھی جاننا ضروری ہیں۔

ہم مساوات 6.13 کو مزید چھوٹا کر سکتے ہیں۔ $\mathrm{d}x^2$ اور $\mathrm{d}y^2$ کو ایک چھوٹے مثلث کے اضلاع تصور کریں۔ مسئلہ فیثا غورث سے اس مثلث کا وتر $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ ہو گا (شکل 6.78)۔ تفریق $\mathrm{d}s$ کو اب قوس کی تفریقی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے جس کا موزوں حدود کے بیچ تکمل لے کر قوس کی لمبائی دریافت کی جا سکتی ہے۔ مساوات 6.13 میں $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}s$ لکھنے سے مساوات کو $\mathrm{d}s$ کا تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

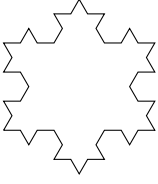
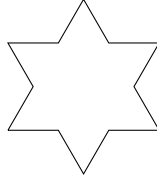
تعریف: تفریقی لمبائی قوس اور لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ درج ذیل ہیں۔

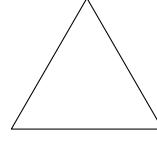
$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \qquad \text{تفریقی لمبائی قوس}$$

$$L = \int \mathrm{d}s \qquad \text{لمبائی قوس کا تفریقی کلیہ}$$

□

لا متناہی لمبائی کے قوسین

برف کی روئی پر صفحہ 296 پر غور کیا گیا۔ لا متناہی تکونی کثیر الاضلاع کی ترتیب $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ کی تحدیدی صورت کو برف کی روئی K کہتے ہیں۔ شکل 6.79 میں اس ترتیب کی پہلی تین صورتیں دکھائی گئی ہیں۔ بناوٹ کے دوران ہر نیا متعارف کردہ راس بعد کے تمام منحنیات میں بطور راس پایا جاتا ہے اور تحدیدی منحنی K میں بطور نقطہ نظر آتا ہے۔ یوں ہر منحنی C از خود منحنی K کی تخمینی صورت

(ج) منحنی C_3

(ب) منحنی C_2

(ا) منحنی C_1

شکل 6.79: برف کی روئی۔

ہو گی۔ یوں K کی لمبائی منحنیات C_n کی تحدیدی لمبائی کے برابر ہو گی۔ ہموار منحنیات کی لمبائی کی تعریف کے تحت کم از کم ایسا ہی ہونا چاہیے۔

آئیں C_n کی تحدیدی لمبائی تلاش کریں۔ اگر ابتدائی مثلث الاضلاع کے ضلع کی لمبائی 1 ہو تب C_1 کی کل لمبائی 3 ہو گی۔ C_1 سے C_2 حاصل کرتے ہوئے ہم C_1 کے ہر ضلع کی جگہ چار اضلاع بناتے ہیں جہاں ہر ضلع ابتدائی ضلع کا $\frac{1}{3}$ واں حصہ ہے۔یوں C_2 کی کل لمبائی $3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 3(\frac{4}{3})$ ہو گی۔ اسی طرح C_3 کی لمبائی حاصل کرنے کی خاطر ہمیں C_2 کی لمبائی کو $\frac{4}{3}$ سے ضرب دینا ہو گا۔یہی عمل دہراتے ہوئے C_n کی کل لمبائی $3(\frac{4}{3})^{n-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ ان نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

شمار منحنی	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
کل لمبائی	3	$3(\frac{4}{3})$	$3(\frac{4}{3})^2$	$\cdots$	$3(\frac{4}{3})^{n-1}$	$\cdots$

منحنی C_{10} کی لمبائی تقریباً 40 ہے جبکہ C_{100} کی لمبائی $7\,000\,000\,000\,000$ سے زیادہ ہے۔ لمبائی اتنی تیزی سے بڑھتی ہے کہ اس کی تحدیدی قیمت متناہی نہیں ہو سکتی ہے۔ یوں برف کی روئی کی لمبائی نہیں پائی جاتی ہے، یعنی، اس کی لمبائی لا متناہی ہے۔

لمبائی کی تعریف ہموار منحنیات کے لئے پیش کی گئی تھی جن کا ہر نقطہ پر مماس استمراری مڑتا ہے۔ برف کی روئی اتنی ناہموار ہے کہ لمبائی کا کلیہ کا اس پر اطلاق کرنا ممکن نہیں ہے۔

بنوا منڈلبرا کا نظریہ **گنجر غیر ہموار منحنیات**[8] ایسے متعدد منحنیات پیش کرتا ہے جن کی لمبائی لا متناہی ہے۔ایسی منحنیات کو بڑا کر کے دیکھنے سے یہ اتنی ہی غیر ہموار نظر آتی ہیں جتنی بغیر بڑا کئے نظر آتی ہیں۔ سمندر کے ساحل کی طرح، ان منحنیات کو بڑا کر کے ہموار نہیں بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

لمبائی قوس کے تکمل کا حصول

سوال 6.159 تا سوال 6.166 میں

[8]fractals

ا. لمبائی قوس کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی ترسیم کر کے دیکھیں کیسی لگتی ہے۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 6.159: $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$
جواب: (ا) $\int_{-1}^{2} \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 6.13

سوال 6.160: $y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le 0$

سوال 6.161: $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi$
جواب: (ا) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 3.82

سوال 6.162: $x = \sqrt{1-y^2}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

سوال 6.163: $y^2 + 2y = 2x + 1$ نقطہ $(-1,-1)$ سے $(7,3)$ تک۔
جواب: (ا) $\int_{-1}^{3} \sqrt{1+(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 9.29

سوال 6.164: $y = \sin x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال 6.165: $y = \int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$
جواب: (ا) $\int_0^{\pi/6} \sec x\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 0.55

سوال 6.166: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1}\,\mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{4}$

لمبائی قوس کا حصول

سوال 6.167 تا سوال 6.176 میں قوس کی لمبائی تلاش کریں۔ بہتر ہو گا کہ منحنیات کو ترسیم کر کے دیکھیں۔

سوال 6.167: $x = 0$ سے $x = 3$ تک، $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$
جواب: 12

سوال 6.168: $x = 0$ سے $x = 4$ تک، $y = x^{3/2}$

سوال 6.169: $y = 1$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)
جواب: $\frac{53}{6}$

سوال 6.170: $y=1$ سے $y=9$ تک، $x=\frac{y^{3/2}}{3}-y^{1/2}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 6.171: $y=1$ سے $y=2$ تک، $x=\frac{y^4}{4}+\frac{1}{8y^2}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)
جواب: $\frac{123}{32}$

سوال 6.172: $y=2$ سے $y=3$ تک، $x=\frac{y^3}{6}+\frac{1}{2y}$ (اشارہ۔ $1+(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

سوال 6.173: $y=\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{3}{8}x^{2/3}+5, \quad 1\le x\le 8$
جواب: $\frac{99}{8}$

سوال 6.174: $y=\frac{x^3}{3}+x^2+x+\frac{1}{4x+4}, \quad 0\le x\le 2$

سوال 6.175: $x=\int_0^y \sqrt{\sec^4 t-1}\,\mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{4}\le y\le \frac{\pi}{4}$
جواب: 2

سوال 6.176: $y=\int_{-2}^x \sqrt{3t^4-1}\,\mathrm{d}t, \quad -2\le x\le -1$

سوال 6.177: (ا) نقطہ $(1,1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.10)۔

$$L=\int_1^4 \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,\mathrm{d}x$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) $y=\sqrt{x}$ یا $y=-\sqrt{x}+2$، (ب) دو

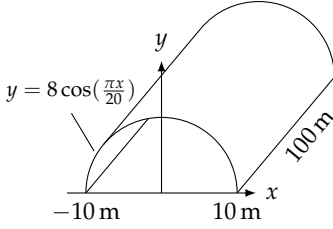
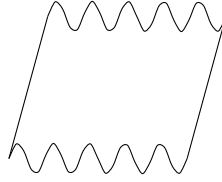
سوال 6.178: (ا) نقطہ $(0,1)$ میں سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات 6.11)۔

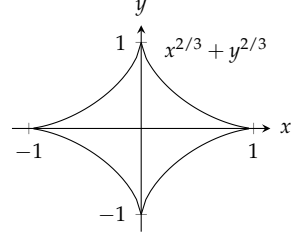
$$L=\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{y^4}}\,\mathrm{d}y$$

(ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.179: $x=0$ سے $x=\frac{\pi}{4}$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,\mathrm{d}t$$

جواب: 1

شکل 6.80: ستارہ نما۔

شکل 6.81: نالیدار چادر۔

شکل 6.82: سرنگ۔

سوال 6.180: ستارہ نما کی لمبائی
مساوات $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ خطوط کی ایک ایسی نسل کو ظاہر کرتی ہے جس کو ستارہ نما کہتے ہیں (شکل 6.80)۔ نصف ربع اول میں قوس کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دے کر کل لمبائی حاصل ہو گی۔ یوں $\frac{\sqrt{2}}{4} \le x \le 1$ پر منحنی $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}$ کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دیں۔

اعدادی تکمل

آپ سوچ رہے ہوں گے کہ کیوں اب تک لمبائی قوس میں زیادہ تر منحنیات کی مساواتیں پیچیدہ تھیں۔ اس کی وجہ لمبائی قوس کے تکمل میں $\sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}$ ہے جو عموماً مکمل مربع نہیں ہوتا ہے اور جس کی بنا متکمل کا الٹ تفرق ہم حاصل نہیں کر پاتے ہیں۔ حقیقت میں عموماً یہی جذر غیر بنیادی تکمل کا باعث بنتا ہے۔ اسی لئے، سوال 6.181 اور سوال 6.182 کی طرح، لمبائی قوس اور سطحی رقبہ کے تکمل عموماً اعدادی طریقوں سے حل کئے جاتے ہیں۔

سوال 6.181: آپ کا ادارہ چھتوں کے لئے لوہے کی نالیدار چادریں بناتا ہے۔ نالیدار چادروں کا عمودی تراش درج ذیل کے مطابق درکار ہے (شکل 6.81)۔

$$y = \sin \frac{3\pi}{50} x, \quad 0 \le x \le 50\,\mathrm{cm}$$

مستوی چادر سے نالیدار چادر بناتے ہوئے چادر کی چوڑائی یا لمبائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ درکار مستوی چادر کی چوڑائی معلوم کریں۔ اعدادی تراکیب استعمال کرتے ہوئے سائن نما چادر کی لمبائی تین اعشاریہ تک تلاش کریں۔
جواب: $50.44\,\mathrm{cm}$

سوال 6.182: آپ کے انجینئری ادارے کو سرنگ بنانے کا کام ملا ہے۔ سرنگ کی لمبائی $100\,\mathrm{m}$ جبکہ اس کی چوڑائی $20\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 6.82)۔ سرنگ کا عمودی تراش $y = 8\cos(\frac{\pi x}{20})$ کے مطابق ہے۔ مکمل ہونے کے بعد سرنگ کو اندر سے پن روک مسالہ کیا جائے گا جس پر 2000 روپیہ فی مربع میٹر لاگت متوقع ہے۔ مسالہ کرنے پر کل کتنا لاگت آئے گا؟ (اشارہ۔ اعدادی طریقہ سے کوسائن تفاعل کی لمبائی دریافت کریں۔)

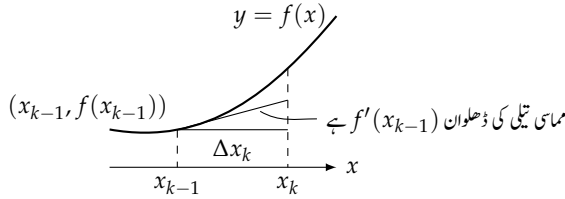
نظریہ اور مثالیں

سوال 6.183: کیا ایسی ہموار منحنی $y=f(x)$ ہو سکتی ہے جس کی وقفہ $0 \le x \le a$ پر لمبائی $\sqrt{2}a$ ہو۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.184: مماسی تیلیوں سے لمبائی قوس کے کلیہ کا حصول۔
فرض کریں $[a,b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کریں۔ ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ میں نقطہ $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ پر مماسی تیلی بنائیں (نیچے شکل دیکھیں)۔

ا. دکھائیں کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ پر k ویں مماسی تیلی کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ب. دکھائیں کہ a تا b منحنی $y=f(x)$ کی لمبائی L درج ذیل ہے۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{ویں تیلی کی لمبائی } k) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 6.185 تا سوال 6.190 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. منحنی ترسیم کریں۔ خانہ بندی کے نقطے $n=2,4,8$ لیتے ہوتے تخمینی کثیر الاضلاع ترسیم کریں۔

ب. مطابقتی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ لے کر قوس کی تخمینی لمبائی معلوم کریں۔

ج. تکمل سے قوس کی اصل لمبائی تلاش کریں۔ اصل لمبائی اور $n=2,4,8$ لے کر حاصل تخمینی لمبائیوں کا موازنہ کریں۔ n بڑھانے سے تخمینی لمبائی اور اصل لمبائی کا مقابلہ کریں۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

سوال 6.185: $f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال 6.186: $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال 6.187: $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

سوال 6.188: $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال 6.189: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 1$

سوال 6.190: $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

6.6 سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسی گھماتے ہوئے رسی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو **سطح طواف**[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسی کی لمبائی اور رسی کے ہر حصے کی جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کا رقبہ اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر بعد کے باب میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x),\ a \le x \le b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل 6.83-ا میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے جس کو بڑا کر کے شکل 6.83-ب میں دکھایا گیا ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو **مخروط مقطوع**[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبہ کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع (شکل 6.83-ج) کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کا اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

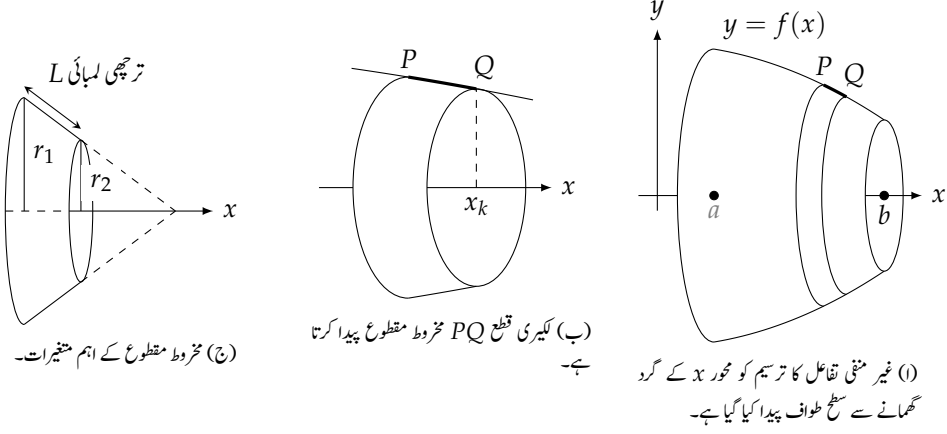
$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

---

[9] surface of revolution
[10] frustum

(ج) مخروط مقطوع کے اہم متغیرات۔

(ب) لکیری قطع PQ مخروط مقطوع پیدا کرتا ہے۔

(ا) غیر منفی تفاعل کا ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

شکل 6.83: سطح طواف کو قوس PQ سے پیدا پٹیوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

قطع PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع (شکل 6.84) کے لئے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کی پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

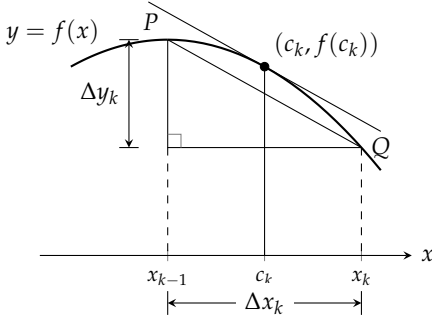
$$\sum_{k=1}^{n} \pi\big(f(x_{k-1}) + f(x_k)\big)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{6.14}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے مساوات 6.14 میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات 6.14 کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفرقات کے مسئلہ اوسط قیمت کی طرف دیکھتے ہیں۔

اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطع PQ کے متوازی ہو گا (شکل 6.85)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$
$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

شکل 6.84: لکیر اور قوس PQ کے ساتھ وابستہ متغیرات۔

شکل 6.85: خط مستقیم PQ اور نقطہ c_k پر مماس متوازی ہیں۔

مساوات 6.14 میں درج بالا Δy_k پر کرتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \tag{6.15}$$

اب یہاں ایک بری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بری خبر یہ ہے کہ مساوات 6.15 میں x_{k-1} ، x_k اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک دوسرے جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بلس کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچانے سے مساوات 6.15 میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل کو مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔یوں a تا b تفاعل f کی ترسیم کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: محور x کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ

اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو x محور کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

□

مساوات 6.16 میں جذر وہی ہے جو پیداکار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیہ میں پایا جاتا ہے۔

مثال 6.21: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x},\ 1 \le x \le 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.86)۔اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم درج ذیل لیتے ہوئے

$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\\ &= \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

مساوات 6.16 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}S &= \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\pi\cdot\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

□

محور y کے گرد سطح طواف

محور y کے گرد سطح طواف کے لئے ہم مساوات 6.16 میں x اور y کی جگہیں تبدیل کرتے ہیں۔

محور y کے گرد سطح طواف کے رقبہ کا کلیہ

اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \ge 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{6.17}$$

شکل 6.86: سطح طواف برائے مثال 6.21

شکل 6.87: سطح طواف برائے مثال 6.22

مثال 6.22: لکیری قطع $x=1-y,\ 0\le y\le 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے (شکل 6.87)۔ اس کا رقبہ پہلو تلاش کریں۔

حل: اس رقبہ کو جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

آئیں درج ذیل لے کر

$$c=0,\ d=1,\ x=1-y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-1$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

مساوات 6.17 سے اس رقبہ کا حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}S&=\int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\\&=2\pi\sqrt{2}\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1=2\pi\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\pi\sqrt{2}\end{aligned}$$

دونوں نتائج ایک جیسے ہیں جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

شکل 6.88: قوس AB کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا رقبہ $\int_a^b 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$ ہو گا۔

شکل 6.89: قوس $y = x^3$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

مختصر تفریقی روپ

درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

کو عموماً تفریقی لمبائی قوس $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کی صورت میں لکھا جاتا ہے:

$$S = \int_a^b 2\pi y\,\mathrm{d}s \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\,\mathrm{d}s$$

بایاں مساوات میں x محور سے قطع $\mathrm{d}s$ تک فاصلہ y ہے۔ دایاں مساوات میں y محور سے قطع $\mathrm{d}s$ کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

$$S = \int 2\pi(\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں رکن لمبائی قوس $\mathrm{d}s$ تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے (شکل 6.88)۔

مختصر تفریقی روپ

$$S = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

کسی مخصوص مسئلے میں آپ رکن لمبائی قوس $\mathrm{d}s$ اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کے حدود بھی اسی متغیر کی روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال 6.23: منحنی $y = x^3,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.89)۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم مختصر تفریقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho \,\mathrm{d}s \\ &= \int 2\pi y \,\mathrm{d}s \\ &= \int 2\pi y \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \qquad\qquad \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \end{aligned}$$

ہم نے یہاں فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا $\mathrm{d}s$ کو $\mathrm{d}x$ یا $\mathrm{d}y$ کی روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے $\mathrm{d}y$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3,\ \mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x,\ \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + (3x^2\,\mathrm{d}x)^2} = \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\ &= \int_0^{1/2} 2\pi x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1 + 9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2} \\ &= \tfrac{\pi}{27}[(1 + \tfrac{9}{16})^{3/2} - 1] \\ &= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2} - 1] \\ &= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64} - 1) \\ &= \tfrac{61\pi}{1728} \end{aligned}$$

□

سوالات

سطحی رقبہ کے تکمل

سوال 6.191 تا سوال 6.198 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ کو بھی ترسیم کریں۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال 6.191: محور x ; $y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4}$
جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 3.84

سوال 6.192: محور x ; $y=x^2,\quad 0\le x\le 2$

سوال 6.193: محور y ; $xy=1,\quad 1\le y\le 2$
جواب: (ا) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 5.02

سوال 6.194: محور y ; $x=\sin y,\quad 0\le y\le \pi$

سوال 6.195: محور x ; نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک $x^{1/2}+y^{1/2}=3,$
جواب: (ا) $2\pi\int_0^4(3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$ ، (ج) ≈ 63.37

سوال 6.196: محور y ; $y+2\sqrt{y}=x,\quad 1\le y\le 2$

سوال 6.197: محور y ; $x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{3}$
جواب: (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t\right)\sec y\,\mathrm{d}y$ ، (ج) ≈ 2.08

سوال 6.198: محور x ; $y=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t,\quad 1\le x\le \sqrt{5}$

سطحی رقبہ کا حصول

سوال 6.199: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ $=\frac{1}{2}$ (محیط تلہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $4\pi\sqrt{5}$

سوال 6.200: لکیری قطع $y=\frac{x}{2},\ 0\le x\le 4$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 6.201: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, 1 \le x \le 3$ کو x محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع= π ($r_1 + r_2$)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 6.202: لکیری قطع $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, 1 \le x \le 3$ کو y محور کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع= π ($r_1 + r_2$)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال 6.203 تا سوال 6.212 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال 6.203: $y = \frac{x^3}{9}, \quad 0 \le x \le 2, \quad x$ محور
جواب: $\frac{98\pi}{81}$

سوال 6.204: $y = \sqrt{x}, \quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{15}{4}, \quad x$ محور

سوال 6.205: $y = \sqrt{2x - x^2}, \quad 0.5 \le x \le 1.5, \quad x$ محور
جواب: 2π

سوال 6.206: $y = \sqrt{x+1}, \quad 1 \le x \le 5, \quad x$ محور

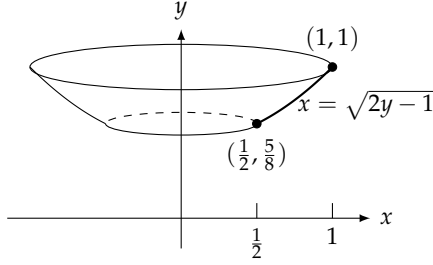
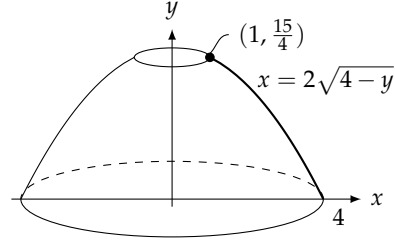
سوال 6.207: $x = \frac{y^3}{3}, \quad 0 \le y \le 1, \quad y$ محور
جواب: $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

سوال 6.208: $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2}, \quad 1 \le y \le 3, \quad y$ محور

سوال 6.209: y محور $x = 2\sqrt{4-y}, \quad 0 \le y \le \frac{15}{4},$ (شکل 6.90)
جواب: $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

سوال 6.210: y محور $x = \sqrt{2y-1}, \quad \frac{5}{8} \le y \le 1,$ (شکل 6.91)

سوال 6.211: x محور $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}, \quad 1 \le y \le 2,$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y \,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)
جواب: $\frac{253\pi}{20}$

سوال 6.212: y محور $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}, \quad 0 \le x \le \sqrt{2},$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x \,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

شکل 6.91

شکل 6.90

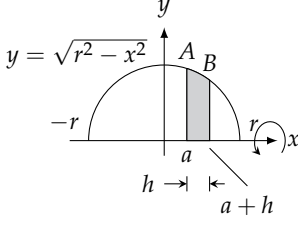
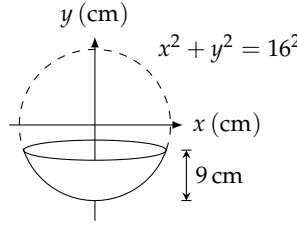
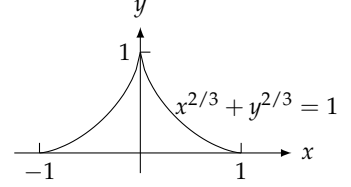
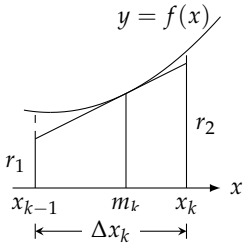
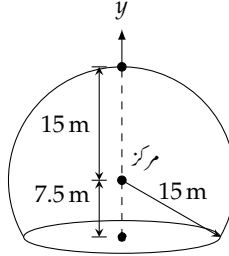
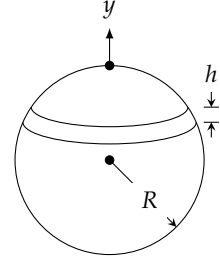
سوال 6.213: نئی تعریف کی پرکھ
تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \; -a \leq x \leq x$ کو x محور کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات 6.16 سے بھی رداس a کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.214: نئی تعریف کی پرکھ
لکیری قطع $y = \frac{r}{h}x, \; 0 \leq x \leq h$ کو x محور کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے تلا کا رداس r ہے لہٰذا اس کے ترچھا قد $\sqrt{r^2 + h^2}$ ہو گا۔ تکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیہ کی تصدیق کریں۔

سوال 6.215: (ا) منحنی $y = \cos x, \; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا حصہ 8.4 میں سکھایا جائے گا۔ (ب) اس سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔
جواب: (ا) $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1 + \sin^2 x}\, \mathrm{d}x$ ، (ب) ≈ 14.4236

سوال 6.216: ستارہ نما کا سطحی رقبہ
ستارہ نما $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو x محور سے اوپر پایا جاتا ہے کو x محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.92)۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2}, \; 0 \leq x \leq 1$) کو x محور کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

سوال 6.217: رنگ
ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل 6.93)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لئے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔
جواب: 452.4 L

سوال 6.218: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ
ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے ایک جتنی موٹی ٹکڑوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا

شکل 6.94 شکل 6.93 شکل 6.92

شکل 6.97 شکل 6.96 شکل 6.95

جاتا ہے (شکل 6.94)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ کو x محور کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کا قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو x محور کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبہ کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں ہے۔ (کرارا رقبہ کی قیمت h پر منحصر ہو گی۔)

سوال 6.219: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے رداس R کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتے ہیں (شکل 6.95)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال 6.220: موسمیاتی ریڈار کو شکل 6.96 میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (تلا کو شامل نہ کریں۔)

سوال 6.221: محور طواف کو قطع کرنے والے منحنیات سے حاصل سطح طواف
وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات 6.16 اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات 6.16 کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int 2\pi\rho \, ds = \int 2\pi \left| f(x) \right| ds \tag{6.18}$$

تفاعل $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ ، $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرا مخروط کا سطحی رقبہ مساوات 6.18 استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔
جواب: $5\sqrt{2}\pi$

سوال 6.222: قوس $y=\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}, \; -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات 6.18 میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل

سوال 6.223 تا سوال 6.223 میں محور x کے گرد دیے گئے منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گے۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستگی تک معلوم کریں۔

سوال 6.223: $y=\sin x, \quad 0\le x\le\pi$
جواب: 14.4

سوال 6.224: $y=\frac{x^2}{4}, \quad 0\le x\le 2$

سوال 6.225: $y=x+\sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3}\le x\le\frac{2\pi}{3}$
جواب: 54.9

سوال 6.226: $y=\frac{x}{12}\sqrt{36-x^2}, \quad 0\le x\le 6$

سوال 6.227: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ
فرض کریں $[a,b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کریں اور k ویں ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ کے وسطی نقطہ $m_k=\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$ پر منحنی کی مماس لکیر بنائیں (شکل 6.97)۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1=f(m_k)-f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2=f(m_k)+f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k ویں ذیلی وقفہ میں مماسی قطع کی لمبائی $L_k=\sqrt{(\Delta x_k)^2+(f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطع کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1+(f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a,b]$ پر $y=f(x)$ کو محور x گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k\text{ ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو})=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

6.7 معیار اثر اور مرکز کمیت

بہت سارے ساخت اور میکانی نظام کا رویہ ایسا ہوتا ہے جیسا ان کی کمیت ایک نقطہ میں سموئی ہو جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطہ کا مقام جاننا اہم ہے جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بعدی اور دو بعد چیزوں پر توجہ دی جائے گی۔ تین بعدی چیزوں پر کے باب 14 میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضی نمونہ بتدریج تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی منزل میں ہم محور x جس کا مبدا اس کا چول ہو، پر کمیت m_1 ، m_2 اور m_3 تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر منحصر ہے۔

m_1 m_2 m_3 x
x_1 x_2 x_3
مبدا پر چول

ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتا ہے جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت $m_k g$ کو کمیت k_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو **قوت مروڑ**[11] کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتا ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام گھومنے کے رجحان کا ناپ ہے۔ اس مجموعہ کو **نظام کی قوت مروڑ**[12] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{6.19}$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

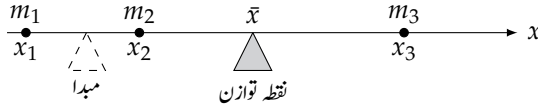
لکھا جا سکتا ہے جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

---

[11] torque
[12] system torque

عدد $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ کو **مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر** کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے معیار اثر m_1x_1 ، m_2x_2 اور m_3x_3 کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_k x_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کا قوت مروڑ صفر ہو گا۔

اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے ہر کمیت کا قوت مروڑ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ کے لحاظ سے } m_k \text{ کا معیار اثر} &= (\bar{x} \text{ سے } m_k \text{ کا فاصلہ})(\text{نیچے رخ قوت}) \\ &= (x_k - \bar{x})m_k g \end{aligned}$$

ان معیار اثر کے مجموعہ کو صفر کے برابر پر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لئے حل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} \sum (x_k - \bar{x})m_k g &= 0 && \text{معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے} \\ g\sum (x_k - \bar{x})m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب} \\ \sum (m_k x_k - \bar{x}m_k) &= 0 && g \text{ سے تقسیم اور } m_k \text{ پھیلایا گیا ہے} \\ \sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k &= 0 && \text{مجموعہ کا قاعدہ فرق} \\ \sum m_k x_k &= \bar{x}\sum m_k && \text{مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی} \\ \bar{x} &= \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} && \bar{x} \text{ کے لئے حل} \end{aligned}$$

یہ آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لئے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

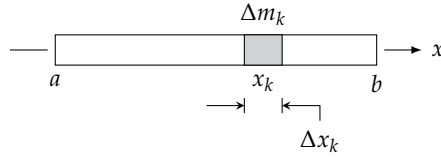
نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا **مرکز کمیت**[13] کہتے ہیں۔

---

[13] center of mass

تار اور پتلے سلاخ

بہت سارے موقعوں پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کی کمیت کا مرکز مطلوب ہوتا ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم تقسیم کمیت کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کی بجائے تکمل ہو گا جیسے نیچے سمجھایا گیا ہے۔

فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر پڑی ہے۔ ہم $[a, b]$ اس پٹی کی خانہ بندی کرتے ہوئے اس کو Δm_k کمیت کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k ویں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر پایا جاتا ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔

اول، پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ اور نقطہ x_k پر کمیت Δm_k رکھنے سے حاصل نظام کا مرکز کمیت تقریباً ایک ہی مقام پر ہوں گے:

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k \Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k \Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا:

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو جہاں δ استمراری ہے (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا:

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{6.20}$$

مساوات 6.20 کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفہ پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات 6.20 میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کے سلاخ یا پٹی کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \tag{6.21}$$

مساوات 6.21 کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔یوں تار، سلاخ اور پٹی کے لئے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں جبکہ مستوی سطحوں کے لئے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال 6.24: مستقل کثافت کا سلاخ یا پٹی
مستقل کثافت والے سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

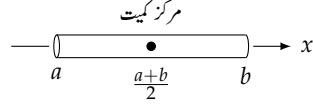
حل: ہم محور x پر $x = a$ سے $x = b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل 6.98)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b \delta x\,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \delta\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2) \\ M &= \int_a^b \delta\,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b \mathrm{d}x = \delta[x]_a^b = \delta(b - a) \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b - a)} = \frac{b + a}{2} \end{aligned}$$

مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطہ پر ہو گا۔ □

مرکز کمیت

a $\frac{a+b}{2}$ b x

شکل 6.98: مستقل کثافت کے پتلے سیدھے سلاخ کا مرکز کمیت دونوں سروں کے وسطی نقطہ پر ہو گا۔

شکل 6.99: متغیر موٹائی کے سیدھے سلاخ کو متغیر کثافت کا سیدھا سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 6.25: متغیر کثافت

ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹا ہوتا ہے (شکل 6.99) لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کی بجائے $\delta(x) = 1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 6.21 استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_0^{10} x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} x\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(x+\frac{x^2}{10}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50+\frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}
\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔ سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int_0^{10}\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \left[x+\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} 10+5 = 15\,\mathrm{kg}$$

مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$

□

مستوی پر تقسیم کمیت

فرض کریں ایک مستوی میں متناہی تعداد میں کمیت پائے جاتے ہیں۔ یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کمیت m_k ہو گا (شکل 6.100)۔ اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$

ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ہو گا جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$ ہو گا۔ دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \sum m_k y_k && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر} \\
M_y &= \sum m_k x_k && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}
\end{aligned}$$

شکل 6.100: ہر کمیت m_k کا ہر انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔

شکل 6.101: دو بعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔

نظام کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{6.22}$$

یک بعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل 6.101)۔

نظام کے مرکز کمیت کا y محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{6.23}$$

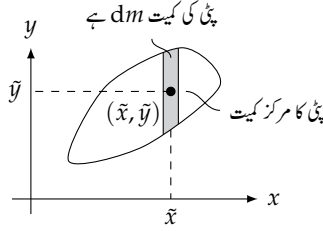
یک بعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لئے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتے ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ اس نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x}, \bar{y})$ میں پائی جاتی ہے۔ اس نقطہ کو نظام کی **کمیت کا مرکز**[14] کہتے ہیں۔

پتلی مستوی چادر

کئی بار ہمیں پتلی مستوی چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کی بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔ آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں xy مستوی میں ایک پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں (شکل 6.102 میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت Δm کو نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا جبکہ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات 6.22 اور مساوات 6.23 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

---

[14] center of mass

شکل 6.102: چادر کو انتصابی پتلی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پٹی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پٹی کی کمیت $\mathrm{d}m$ کو پٹی کی مرکز کمیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

یک بعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کم سے کم کرنے سے قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامت طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

مستوی میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

ان تکملات کی حصول کے لئے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال 6.26: ایک تکونی چادر جس کو شکل 6.103-ا میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل: **پہلی ترکیب:** انتصابی پٹیاں (شکل 6.103-ب)

(ا) نمائندہ پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ چوڑائی: $\mathrm{d}x$

لمبائی: $2x$ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\, \mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\, \mathrm{d}x = 6x\, \mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = 2x\, \mathrm{d}x$ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = x$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\, \mathrm{d}m = x \cdot 6x\, \mathrm{d}x = 6x^2\, \mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\, \mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\, \mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\, \mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

دوسری ترکیب: افقی پٹیاں (شکل 6.103-ج)

(ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا y محدد y ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2} + 1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

لمبائی: $1-\frac{y}{2}=\frac{2-y}{2}$ کمیت: $\mathrm{d}m=\delta\,\mathrm{d}S=3\cdot\frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

چوڑائی: $\mathrm{d}y$

رقبہ: $\mathrm{d}S=\frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x}=\frac{y+2}{4}$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m=\frac{y+2}{4}\cdot 3\cdot\frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y=\frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y=\int\tilde{x}\,\mathrm{d}m=\int_0^2\frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{8}\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right)=2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M=\int\mathrm{d}m=\int_0^2\frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\left[2y-\frac{y^2}{2}\right]_0^2=\frac{3}{2}(4-2)=3\,\mathrm{g}$$

(ج) چادر کی مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}}=\frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$

ہم اسی طرح M_x اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

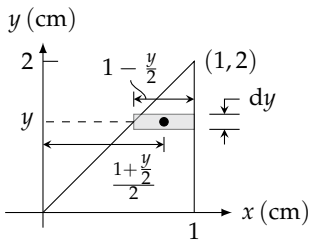
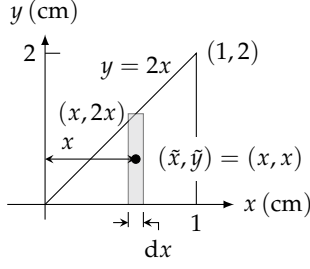
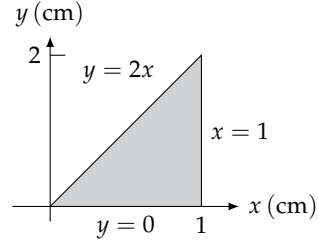
اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کمیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مدد گار ثابت ہوتے ہیں۔

مثال 6.27: مستقل کثافت ایک پتلا مستوی خطہ جس کی کثافت مستقل δ ہے کو بالائی طرف سے قطع مکافی $y=4-x^2$ اور زیریں طرف سے محور x گھیرتا ہے (شکل 6.104)۔ اس خطے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ خطے کی کثافت مستقل ہے اور تقسیم کمیت محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا مرکز کمیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x}=0$ ہو گا۔ ہمیں صرف $\bar{y}=\frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل تکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x=\int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$$

لہٰذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 6.103: چادر برائے مثال 6.26

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$ رقبہ: $\mathrm{d}S = (4-x^2)\,\mathrm{d}x$

لمبائی: $4-x^2$ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = \delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x$

چوڑائی: $\mathrm{d}x$ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{4-x^2}{2}\cdot\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x \tag{6.25}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}\delta \tag{6.26}$$

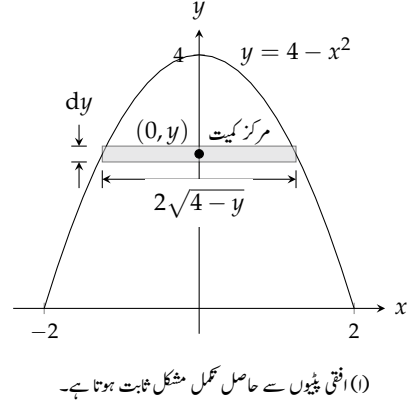
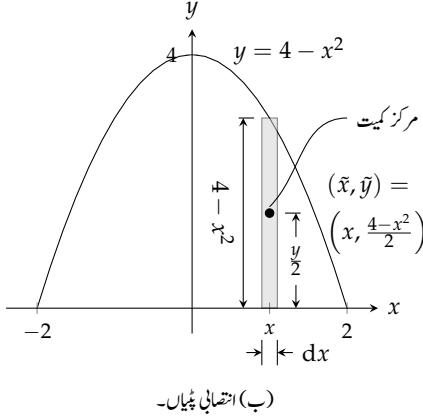
چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\delta \tag{6.27}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15}\delta}{\frac{32}{3}\delta} = \frac{8}{5}$$

(ا) افقی پٹیوں سے حاصل تکمل مشکل ثابت ہوتا ہے۔

(ب) انتصابی پٹیاں۔

شکل 6.104: چادر برائے مثال 6.27

چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{5}\right)$$

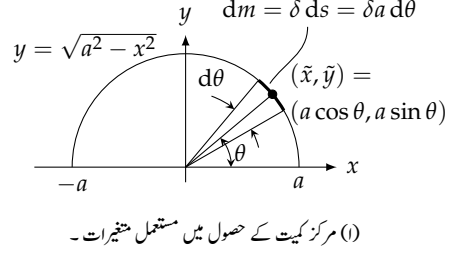
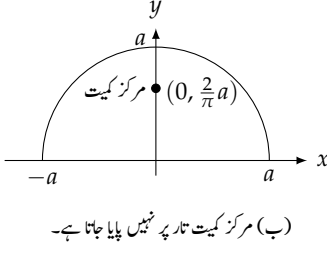
□

مثال 6.28: متغیر کثافت نقطہ (x, y) پر مثال 6.27 کی چادر کی کثافت $\delta = 2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: کمیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ یوں $\delta = 2x^2$ کے لئے مساوات 6.25 اور مساوات 6.27 درج ذیل صورت اختیار کریں گے۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} x^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}(16x^2 - 8x^4 + x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{2048}{105} \\
M &= \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2} \delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}(8x^2 - 2x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

شکل 6.105: نصف دائری تار (مثال 6.29)

چادر کی کمیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

□

مثال 6.29: ایک تار جس کی کثافت δ مستقل ہے سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم نصف دائرے کو تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.105)۔ کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے $\bar{y}$ تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطع کے لئے درج ذیل ہو گا۔

لمبائی: $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = a\sin\theta$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}s = \delta a\,\mathrm{d}\theta$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^{\pi} a\sin\theta \cdot \delta a\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi} \delta a\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\delta a^2[-\cos\theta]_0^{\pi}}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a$$

مرکز کمیت $(0, 2a/\pi)$ ہو گا جو مبدا سے تقریباً $\frac{2}{3}$ اوپر ہے۔ □

شکل 6.106: لوہے کا فریم برائے سوال 6.230

شکل 6.107: فریم برائے سوال 6.231

6.7.1 وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔یوں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کی نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کمیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ اس مادے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ایسی صورت میں مرکز کمیت کو عموماً **وسطانی مرکز**[15] کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکون، مخروط یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کو معیار اثر تقسیم کمیت سے معلوم کرتے ہوئے $\delta = 1$ لیں۔

سوالات

پتلے سلاخ

سوال 6.228: ایک بچہ جس کی کمیت $40\,\mathrm{kg}$ اور دوسرا بچہ جس کی کمیت $50\,\mathrm{kg}$ ہے ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر $40\,\mathrm{kg}$ بچہ چول سے $2\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟
جواب: $\frac{8}{5}\,\mathrm{m}$

سوال 6.229: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو $100\,\mathrm{kg}$ اور $20\,\mathrm{kg}$ کی پیمائش دیتے ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال 6.230: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے $90°$ زاویہ پر موڑ پر فریم بنایا جاتا ہے (شکل 6.106)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی حصے کا مرکز کمیت کہاں ہو گا؟)
جواب: $(\frac{L}{4}, \frac{L}{4})$

سوال 6.231: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو $90°$ پر موڑ کر فریم بنایا جاتا ہے جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل 6.107)۔ فریم کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

سوال 6.232 تا سوال 6.239 میں محور x کے مختلف وقفوں پر پڑی ہوئی پتلی سلاخ کی کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔مساوات 6.21 استعمال کرتے ہوئے مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

---

[15] centroid

سوال 6.232: $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$
جواب: $M_0 = 8,\ M = 8,\ \bar{x} = 1$

سوال 6.233: $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

سوال 6.234: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \le x \le 3$
جواب: $M_0 = \frac{15}{2},\ M = \frac{9}{2},\ \bar{x} = \frac{5}{3}$

سوال 6.235: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \le x \le 4$

سوال 6.236: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \le x \le 4$
جواب: $M_0 = \frac{73}{6},\ M = 5,\ \bar{x} = \frac{73}{30}$

سوال 6.237: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

سوال 6.238: $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$
جواب: $M_0 = 3,\ M = 3,\ \bar{x} = 1$

سوال 6.239: $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں

سوال 6.240 تا سوال 6.251 میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ والی پتلی چادر پائی جاتی ہے۔ چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

سوال 6.240: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{12}{5}$

سوال 6.241: قطع مکافی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

سوال 6.242: قطع مکافی $y = x - x^2$ اور لکیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = -\frac{3}{5}$

سوال 6.243: قطع مکافی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

سوال 6.244: محور y اور قطع مکافی $x = y - y^3,\ 0 \le y \le 1$ کے بیچ خطہ۔
جواب: $\bar{x} = \frac{16}{105},\ \bar{y} = \frac{8}{15}$

سوال 6.245: قطع مکافی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

سوال 6.246: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

سوال 6.247: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ۔

سوال 6.248: قطع مکافی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔
جواب: $\bar{x} = 1, \bar{y} - \frac{2}{5}$

سوال 6.249: (ا) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے بیچ خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

سوال 6.250: (ا) ربع اول میں لکیر $x = 3$، لکیر $y = 3$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے بیچ تکونی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)
جواب: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$

سوال 6.251: وہ خطہ جس کا بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$، بایاں سرحد $x = 1$ اور دایاں سرحد $x = a > 1$ ہوں۔ اس کے علاوہ $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$ بھی معلوم کریں۔

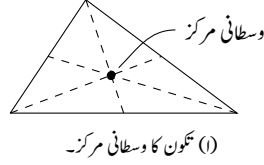
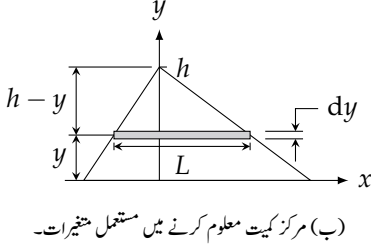
متغیر کثافت والے پتلی چادریں

سوال 6.252: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}, 1 \le x \le 2$ کے بیچ چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = \frac{1}{2}$

سوال 6.253: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکافی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 6.254: لکیر $x = 1$، لکیر $x = 4$ اور منحنی $y = \mp\frac{4}{\sqrt{x}}$ کے بیچ چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔
جواب: (الف) $\frac{224\pi}{3}$، (ب) $\bar{x} = 2, \bar{y} = 0$

سوال 6.255: منحنی $y = \frac{2}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \sqrt{x}$ ہو تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

(ب) مرکز کمیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔

(ا) تکون کا وسطانی مرکز۔

شکل 6.108: تکون برائے سوال 6.256

تکون کے وسطانی مراکز

سوال 6.256: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔
تکون کی راس سے مخالف ضلع کی وسط تک قطع کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلہ پر وسطانیے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل 6.108)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر پایا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کمیت $\mathrm{d}m$ کو L اور $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. تشابہ مثلثات کی مدد سے $L = \frac{b}{h}(h-y)$ لکھ کر $\mathrm{d}m$ کے کلیہ میں ڈالیں۔

ج. دکھائیں کہ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ ہو گا۔

د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

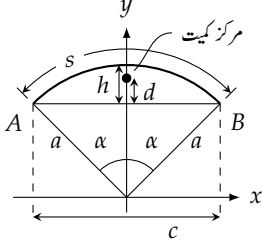
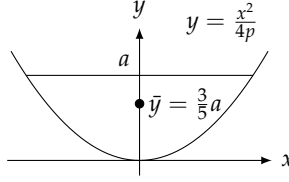
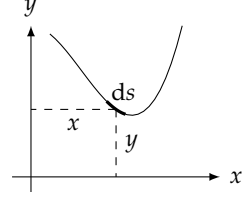
سوال 6.257 تا سوال 6.261 مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال 6.256 کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

سوال 6.257: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,3)$

سوال 6.258: $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$
جواب: $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3}$

سوال 6.259: $(0,0),\ (a,0),\ (0,a)$

سوال 6.260: $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$
جواب: $\bar{x} = \frac{a}{3},\ \bar{y} = \frac{b}{3}$

سوال 6.261: $(0,0),\ (a,0),\ (\frac{a}{2},b)$

شکل 6.111: برائے سوال 6.268

شکل 6.110: برائے سوال 6.267

شکل 6.109: برائے سوال 6.266

پتلی تار

سوال 6.262: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $\frac{13\delta}{6}$

سوال 6.263: مستقل کثافت کا ایک تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک پایا جاتا ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 6.264: کثافت $\delta = k \sin\theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

سوال 6.265: کثافت $\delta = 1 + k\lvert\cos\theta\rvert$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال 6.29 کو دوبارہ حل کریں۔

کلیاتِ انجینئری

سوال 6.266 تا سوال 6.269 میں دیے گئے فقروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 6.266: قابل تفرق مستوی منحنی کے وسطانی مراکز کے محدد درج ذیل ہوں گے (شکل 6.109)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}$$

سوال 6.267: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل 6.110 میں دکھائے گئے قطع مکافی خطے کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال 6.268: مستقل کثافت کی باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنایا جاتا ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 6.111)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال 6.269: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے
دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطع AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ایسا درج ذیل اقدام سے ہو گا۔

ا. 1. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{h}=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha-\alpha\cos\alpha} \tag{6.28}$$

2. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha)=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha-\alpha\cos\alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha)\approx\frac{2}{3}$ ہو گا۔ (حصہ 7.6 میں سوال 7.423 میں آپ اس کی تصدیق کر پائیں گے۔)

ب. آپ $\alpha=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات 6.28 کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لئے بھی خلل (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

6.8 کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سر انجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصل d حرکت کرے تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر کام W کرتی ہے:

$$W=Fd \tag{6.29}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ کام کی معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دکھا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات 6.29 کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس اگر آپ پورا دن گاڑی کو دکھا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات 6.29 کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات 6.29 سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلہ کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہو گی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلہ کی اکائی میٹر m ہے لہٰذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $\mathrm{N\cdot m}$ ہو گی جس کو خصوصی نام **جاول**[16] دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

[16] joule

مثال 6.30: فرض کریں آپ $80\,\mathrm{kg}$ کمیت کو $30\,\mathrm{cm}$ بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2\,\mathrm{J}$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی کو اٹھائیں جس سے پانی ٹپکتا ہو تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہو گی۔ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے تکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کے کام کو معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلہ میں استمراری قوت F کی تبدیلی (استمراری ہونے کی بنا) بہت کم ہو گی جس کو رد کیا جا سکتا ہے۔یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہو گی۔یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \tag{6.30}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچتا ہو ویسے ویسے یہ تخمین مزید بہتر ہو گی لہٰذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے تکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل **کام** کرتی ہے۔

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.31}$$

□

کام کی اکائی **جاول** J ہے۔

مثال 6.31: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{N}$ محور x پر $x = 1\,\mathrm{m}$ تا $x = 10\,\mathrm{m}$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9\,\mathrm{J}$$

□

مثال 6.32: گاؤں میں کنواں سے پانی نکالنے کے لئے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کھوہ کی گہرائی $20\,\mathrm{m}$ ، خالی بوکا کی کمیت $2\,\mathrm{kg}$ اور رسی کی کمیت $0.1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ بوکا میں ابتدائی طور پر $10\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔چونکہ بوکا سے پانی رستا ہے لہٰذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا اور رسی بلند کرنا کا کام۔

حل:

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لئے درکار قوت پانی کے وزن جتنا ہو گا جو ابتدا میں $(10)(9.8) = 98\,\mathrm{N}$ اور آخر میں صفر ہے۔یوں مبدا کو کنواں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = \underbrace{98}_{\text{ابتدائی وزن}} \underbrace{\left(\frac{20-x}{20}\right)}_{\text{اونچائی } x \text{ پر باقی تناسب}} = 98\Big(1-\frac{x}{20}\Big) = 98 - 4.9x\,\mathrm{N}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{20} (98-4.9x)\,\mathrm{d}x = \Big[98x - \frac{4.9x^2}{2}\Big]_0^{20} = 1960 - 980 = 980\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لئے درکار کام مساوات 6.29 کے تحت $(2)(9.8)(20) = 392\,\mathrm{J}$ ہو گا۔یوں پانی اور بوکا دونوں کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372\,\mathrm{J}$$

ج. پانی، بوکا اور رسی: مبدا سے x بلندی پر پانی، بوکا اور رسی کی کمیت کو $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98 - 4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20 - x)}_{\text{رسی کا متغیر وزن}}$$

صرف رسی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20 - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[19.6x - \frac{0.98x^2}{2}\Big]_0^{20} = 392 - 196 = 196\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا اور رسی تینوں کو کھینچنے کے لئے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568\,\mathrm{J}$$

□

قانون ہک برائے اسپرنگ

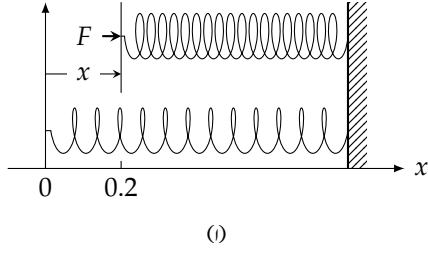
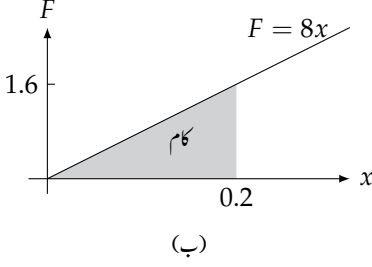
قانون ہک[17] کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لئے درکار قوت لمبائی x کے راست تناسب ہو گی:

$$F = kx \tag{6.32}$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو **مقیاس لچک**[18] کہتے ہیں۔ مقیاس لچک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کی دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات 6.32) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی ہے۔

مثال 6.33: ایک اسپرنگ جس کا مقیاس لچک $k = 8\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے کی لمبائی کو $1\,\mathrm{m}$ سے تبدیل کر کے $0.8\,\mathrm{m}$ کیا جاتا ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں (شکل 6.112)۔ اسپرنگ کا ایک سر مبدا پر ہے جبکہ اس کا دوسرا سر $x = 1$ پر باندھا ہوا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں جہاں x کی قیمت 0 تا $0.2\,\mathrm{m}$ ہو گی۔درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^{0.2} 8x\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{8x^2}{2}\Big]_0^{0.2} = 0.16\,\mathrm{J}$$

شکل 6.112: اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی اور قوت راست تناسب ہیں۔

□

مثال 6.34: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $1\,\mathrm{m}$ ہے کو $24\,\mathrm{N}$ قوت سے تان کر $1.8\,\mathrm{m}$ لمبا کیا جاتا ہے۔

ا. مقیاس لچک k تلاش کریں۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو $2\,\mathrm{m}$ تبدیل کرنے کے لئے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں $45\,\mathrm{N}$ کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

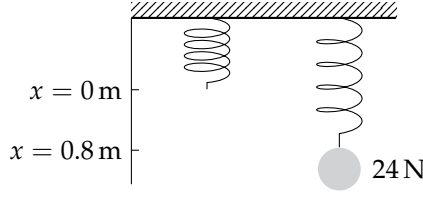
حل:

ا. مقیاس لچک: قیاس لچک کو مساوات 6.32 سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی $0.8\,\mathrm{m}$ ہے۔

$$24 = k(0.8) \quad \implies k = \frac{24}{0.8} = 30\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سر $x = 0$ پر ہو (6.113)۔ اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لئے درکار قوت $F = kx$ ہو گی جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔ یوں $x = 0$ سے $x = 2\,\mathrm{m}$ تک کھینچنے کے لئے کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{30x^2}{2}\right]_0^2 = 60\,\mathrm{J}$$

Hooke's law[17]
spring constant[18]

شکل 6.113: قوت نے اسپرنگ کی لمبائی کو بڑھایا ہے۔

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \quad \implies x = \frac{45}{30} = 1.5\,\mathrm{m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5\,\mathrm{m}$ ہو گی۔

□

پانی کی نکاسی

کسی برتن یا حوض سے پانی کی نکاسی کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ ہم پانی کو افقی تہوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک تہہ کو برتن سے باہر نکالتے ہیں۔یوں اگر تہہ کی موٹائی $\mathrm{d}y$ اور اس کے سطحی رقبہ S ہو تب اس کی کمیت $\rho S\,\mathrm{d}y$ اور وزن $\rho Sg\,\mathrm{d}y$ ہو گا جہاں پانی کی کثافت کو ρ اور کشش ثقل کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس تہہ کو بلندی h تک منتقل کرنے کے لئے $\mathrm{d}W = Fh = \rho Sgh\,\mathrm{d}y$ کام کرنا ہو گا۔یوں تمام تہوں کو نکالنے کے لئے تکمل حل کرنا ہو گا۔ اگلے مثال میں ایک ٹھوس مثال پیش کی گئی ہے۔

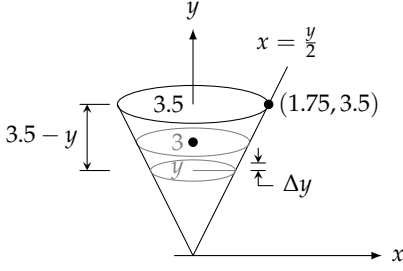
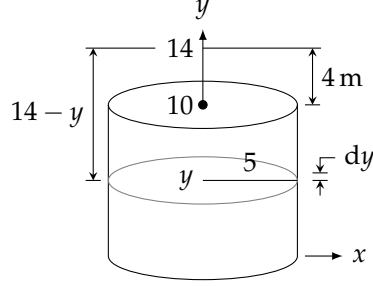
مثال 6.35: پانی سے بھرے ہوئے ایک بیلنی حوض کا رداس $5\,\mathrm{m}$ اور قد $h = 10\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کو $14\,\mathrm{m}$ بلندی پر منتقل کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

حل: ہم حوض کو کارتیسی محدد پر تصور کرتے ہوئے وقفہ $[0, 10]$ کی خانہ بندی کر کے پانی کو تہہ در تہہ تقسیم کرتے ہیں (شکل 6.114)۔ سطح y اور سطح $y + \mathrm{d}y$ کے بیچ پانی کا حجم

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi(5)^2\Delta y = 25\pi\Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اور کمیت

$$\mathrm{d}M = (\rho)(\Delta H) = (1000)(25\pi\Delta y) = 25\,000\pi\Delta y\,\mathrm{kg}$$

شکل 6.114: بیلنی حوض (مثال 6.35)

شکل 6.115: زیتون تیل کی مخروط حوض (مثال 6.36)

ہو گی جہاں پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ اس تہہ پر کشش ثقل کی وجہ سے نیچے رخ قوت عمل کرے گی للذا اس تہہ کو اٹھانے کی خاطر تہہ کی وزن کے برابر قوت F درکار ہو گی:

$$F = (g)(\mathrm{d}M) = (9.8)(25\,000\pi\Delta y) = 245\,000\pi\Delta y\,\mathrm{N}$$

یوں اس تہہ کو y کی بلندی سے $14\,\mathrm{m}$ کی بلندی تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام کرنا ہو گا۔

$$\mathrm{d}W = (\text{قوت})(\text{فاصلہ}) = (245\,000\pi)(14 - y)\Delta y\,\mathrm{J}$$

تمام پانی کو اس بلندی تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

$$W \approx \sum_{0}^{10} \Delta W = \sum_{0}^{10} \Delta y\,\mathrm{J}$$

کام کرنا ہو گا جو وقفہ $0 \le y \le 10$ پر تفاعل $245\,000\pi(14 - y)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ حوض خالی کرنے کے لئے درکار کام $\|P\| \to 0$ کی صورت میں اس ریمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 245\,000\pi(14 - y)\,\mathrm{d}y = 245\,000\pi \int_0^{10} (14 - y)\,\mathrm{d}y \\ &= 245\,000\pi\Big[14y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{10} = 245\,000\pi[90] \approx 69.3 \times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ایک کلو واٹ طاقت کا بجلی کا پمپ ایک سیکنڈ میں $1000\,\mathrm{J}$ کام کرتا ہے۔ اس پمپ کو یہ حوض خالی کرنے کے لئے تقریباً 19 گھنٹے اور 15 منٹ کا وقت درکار ہو گا۔ □

مثال 6.36: ایک مخروط حوض جس کو شکل 6.115 میں دکھایا گیا ہے کنارے سے $0.5\,\mathrm{m}$ نیچے تک زیتون کی تیل سے بھرا ہوا ہے۔ زیتون کی تیل کی کثافت $\rho = 930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

حل: ہم وقفہ $[0,3]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے خانہ بندی کے نقطوں پر افقی سطحیں تصور کرتے ہوئے تیل کو باریک تہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح y اور سطح $y+\Delta y$ کے بیچ تہہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2\Delta y = \frac{\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اس تہہ کو اٹھانے کے لئے اس تہہ کی وزن کے برابر قوت $F(y)$ درکار ہو گا:

$$F(y) = \rho g\Delta H = (930)(9.8)\left(\frac{\pi}{4}y^2\Delta y\right) = \frac{9114\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{N}$$

حوض کے کنارے سے اس تہہ تک کا فاصلہ $3.5-y$ ہے لہٰذا اس تہہ کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$\Delta W = \frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

$y=0$ سے $y=3$ تک تمام تہوں کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لئے تخمیناً

$$W \approx \sum_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

کام درکار ہو گا جو وقفہ $[0,3]$ پر تفاعل $\frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے درکار کام، خانہ بندی کا معیار صفر تک کرنے سے حاصل، ریمان مجموعے کا حد ہو گا:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5-y)y^2\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{9114\pi}{4}\int_0^3(3.5y^2-y^3)\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{9114\pi}{4}\left[\frac{3.5y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^3 \approx 80\,529\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

□

سوالات

متغیر قوت کا کام

سوال 6.270: اگر مثال 6.32 میں بوکا کا حجم $20\,\mathrm{L}$ ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہو تا کہ اب بھی بوکا کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے ایک بار بوکا نکالنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔
جواب: $1960\,\mathrm{J}$

سوال 6.271: فرض کریں کہ مثال 6.32 میں بوکا کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکا میں $4\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور رسی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔

سوال 6.272: ایک کوہ پیما چٹان سے لٹکی ہوئی $50\,\mathrm{m}$ رسی کو اوپر کھینچتا ہے۔ رسی کی کثافتی وزن $0.624\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: $780\,\mathrm{J}$

سوال 6.273: ریت کو تھیلے میں ڈال کر $6\,\mathrm{m}$ بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلا میں $50\,\mathrm{kg}$ ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ رسی اور تھیلا کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔

سوال 6.274: آج کل بالخصوص بلند عمارتوں میں سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ **مصعد**[19] بھی پائے جاتے ہیں۔ مصعد کو چھت پر رکھے ہوئے موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل رسی کی کثافت $6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہونے کی صورت میں صرف رسی کو زمین سے $60\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟
جواب: $1764\,\mathrm{J}$

سوال 6.275: نقطہ $(x,0)$ پر پائے جانے والے ذرہ جس کی کمیت m ہے پر قوت $F=\frac{k}{x^2}$ عمل کرتی ہے جہاں k مستقل ہے۔ یہ ذرہ ساکن حال سے شروع ہو کر نقطہ b سے نقطہ a پہنچتا ہے جہاں $0<a<b$ ہیں۔ اس ذرہ پر کتنا کام ہوا؟

سوال 6.276: ایک بیلن جس کا رقبہ عمودی تراش S ہے میں موجود گیس پر میکانی دباو ڈالا جاتا ہے (شکل 6.116)۔ اگر گیس کا حجم V اور اس کا دباو p ہو تب دکھائیں کہ گیس کو (p_1,V_1) حال سے (p_2,V_2) حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

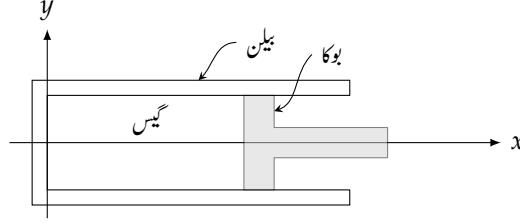
$$W=\int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\,\mathrm{d}V$$

(اشارہ: شکل 6.116 کو دیکھ کر بوکا پر قوت کو $F=pS$ اور چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}V=S\,\mathrm{d}x$ لکھا جا سکتا ہے۔)

سوال 6.277: اگر گیس کا ابتدائی حجم $V_1=1500\,\mathrm{cm^3}$، ابتدائی دباو $103\,360\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ اور اختتامی حجم $200\,\mathrm{cm^3}$ ہو تب سوال 6.276 کے تکمل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباو ایک **حرارت نا گزر عمل**[20] ہے جس میں حراری توانائی تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ حرارت نا گزر عمل کے قانون کے تحت $pV^{1.4}=c$ ہو گا جہاں c مستقل ہے۔

اسپرنگ

سوال 6.278: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $2\,\mathrm{m}$ ہے کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ بنانے کے لئے درکار کام $1800\,\mathrm{J}$ ہے۔ اس

[19] lift
[20] adiabatic process

شکل 6.116: گاڑی کا انجن ایک بیلن جس میں بوکا چلتا ہو پر مشتمل ہوتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباو تبدیل ہوتے ہیں (سوال 6.276)۔

اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔
جواب: $400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

سوال 6.279: ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $30\,\mathrm{cm}$ ہے پر $400\,\mathrm{N}$ قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر $45\,\mathrm{cm}$ لمبائی تک پہنچایا جاتا ہے۔ (ا) مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو $35\,\mathrm{cm}$ کرنے کے لئے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے $600\,\mathrm{N}$ قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

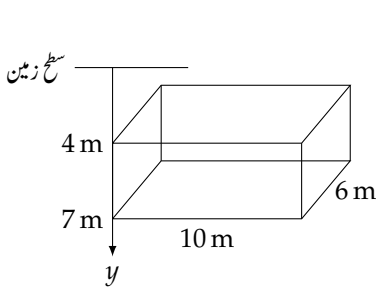
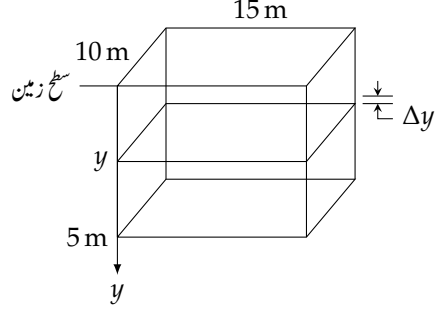
سوال 6.280: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو $2\,\mathrm{N}$ کی قوت $2\,\mathrm{cm}$ بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو $4\,\mathrm{N}$ کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟
جواب: $4\,\mathrm{cm}$ ، $0.08\,\mathrm{J}$

سوال 6.281: اگر $90\,\mathrm{N}$ کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے $1\,\mathrm{m}$ زیادہ کرتی ہو تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ زیادہ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال 6.282: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نسب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کی ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ جس کی قدرتی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$ ہے پر $100\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی کم سے کم لمبائی $12\,\mathrm{cm}$ حاصل ہوتی ہے۔ (ا) اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا cm دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا۔ اس کو دوسرا سنٹی میٹر دبانے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: (ا) $1.25 \times 10^6\,\mathrm{N\,m^{-1}}$، (ب) $62.5\,\mathrm{J}$ ، $187.5\,\mathrm{J}$

سوال 6.283: گھریلو استعمال کے ترازو پر $74\,\mathrm{kg}$ کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو $1.5\,\mathrm{mm}$ دبتا ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتا ہے۔ ایک شخص، جس کا ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو $3\,\mathrm{mm}$ دبتا ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

پانی کی نکاسی

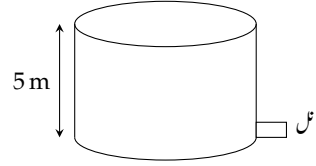
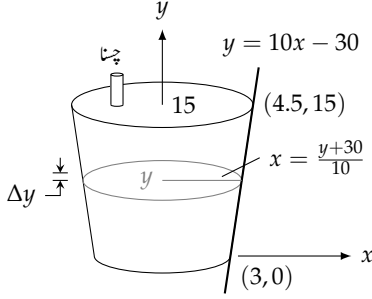
ثقلی اسراع کی قیمت کو عموماً $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیا جاتا ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر $9.832\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور عرضی خط استوا پر $9.780\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً $0.5\,\%$ ہے۔

شکل 6.118: زیر زمین حوض (سوال 6.285)

شکل 6.117: زیر زمین حوض (سوال 6.284)

سوال 6.284: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض جس کو شکل 6.117 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔(ا) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟
جواب: (ا) 18.375×10^6 J ، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ۔ (د) 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

سوال 6.285: زیر زمین حوض جس کو شکل 6.118 میں دکھایا گیا ہے پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے 4 m نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔(ا) حوض کو خالی کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟

سوال 6.286: اگر حوض کے کنارے سے 4 m بلند کی بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال 6.35 میں کتنا کام درکار ہو گا؟
جواب: 38 484 510 J

سوال 6.287: اگر مثال 6.35 میں حوض آدھا بھرا ہو تب حوض کے کنارے سے 4 m بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال 6.288: ایک بیلنی حوض جس کا رداس 4 m اور قد 10 m ہے مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت $0.81\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: 19.95×10^6 J

شکل 6.120: مخروط مقطوع ڈبیا(پیمائش سنٹی میٹروں میں ہے۔)

شکل 6.119: بیلنی حوض (سوال 6.289)

سوال 6.289: ایک حوض جس کا قد $5\,\mathrm{m}$ ہے سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل 6.119)۔قدرتی پانی سطح زمین سے $7\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جا سکتا ہے۔ (ا) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جا سکتا ہے۔ (ب) حوض کے نچلی سر پر موجود نل کے ذریعہ پانی کو حوض تک منتقل کیا جا سکتا ہے۔ دنوں تراکیب میں کونسا بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

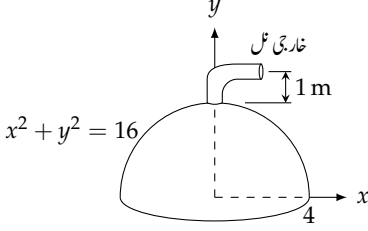
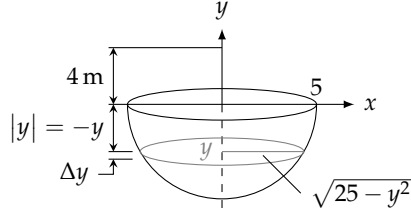
سوال 6.290: ایک مشروب جس کی کثافت $0.769\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے سے مخروط مقطوع ڈبیا بھرا ہوا ہے (6.120)۔اس ڈبیا کا بالائی رداس $4.5\,\mathrm{cm}$ ، زیریں رداس $3\,\mathrm{cm}$ اور گہرائی $15\,\mathrm{cm}$ ہے۔ مشروب کو چسنا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے $2.5\,\mathrm{cm}$ باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا۔
جواب: $0.43\,\mathrm{J}$

سوال 6.291: فرض کریں مثال 6.36 میں مخروط حوض دودھ سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت $1032\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ (ا) دودھ کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ (ب) دودھ کو حوض کے کنارے سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال 6.292: **بے زنگ فولاد**[21] کا بڑا حوض بنانے کے لئے آپ منحنی $y = x^2, 0 \le x \le 4\,\mathrm{m}$ کو محور y کے گرد گھماتے ہو۔ یہ حوض سمندری پانی سے بھرا ہوا ہے جس کی کثافت تقریباً $10\,000\,\mathrm{N\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خالی کرنے کی خاطر اس پانی کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟
جواب: $21\,446\,605.9\,\mathrm{J}$

سوال 6.293: نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے پانی سے بھرا ہوا ہے (شکل 6.121)۔پانی کو حوض کے بالائی کنارے سے $4\,\mathrm{m}$ بلندی تک پمپ کرنے کے لئے کتنا کام درکار ہو گا؟ پانی کی کثافت کو $9800\,\mathrm{N\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال 6.294: نصف کروی حوض جس کا رداس $4\,\mathrm{m}$ ہے کو شکل 6.122 میں دکھایا گیا ہے جو **بنزین**[22] سے بھرا ہوا ہے۔ بنزین کی کثافت $876\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔حوض کو خارجی نل، جو حوض کے بالائی سطح سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے، کے ذریعہ خارج کرنے کے لئے کتنا

[21] stainless steel
[22] benzene

شکل 6.122: نصف کروی حوض (سوال 6.294)

شکل 6.121: نصف کروی حوض (سوال 6.293)

کام کرنا ہو گا؟

جواب: 4 027 512 J

سوال 6.295: آپ کے گاؤں میں پانی کی فراہمی کے لئے 8 m قد کا ایک حوض تعمیر کیا جاتا ہے جس کا تلا زمین سے 20 m بلندی پر ہے۔ زیر زمین پانی کی سطح 100 m نیچے ہے۔ پانی کو 10 cm رداس کے پائپ سے 3 kW پمپ کی مدد سے حوض کی تلا میں نل کے ذریعہ بھرا جاتا ہے۔ خالی حوض کتنی دیر میں بھرے گا؟ (پائپ کو پانی سے بھرنے کے لئے درکار وقت کو نظر انداز کریں۔)

دیگر استعمال

سوال 6.296: مصنوعی سیارے کا خلائی مدار میں بھیجنا

کشش ثقل کی قیمت زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر منحصر ہوتا ہے۔ کمیت m کے مصنوعی سیارے پر کشش ثقل درج ذیل ہو گا

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

جہاں زمین کی کمیت $M = 5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ ہے جبکہ تجاذبی مستقل $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہے۔ زمین کا رداس $6\,370\,000\,\mathrm{m}$ ہے۔ یوں زمین سے $35\,780\,\mathrm{km}$ بلندی پر مدار تک $1000\,\mathrm{kg}$ مصنوعی سیارے کو منتقل کرنے کے لئے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$W = \int_{6\,370\,000}^{35\,780\,000} \frac{1000MG}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

حقیقت میں مصنوعی سیارہ ایک راکٹ پر نسب ہو گا جس کو یہاں نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ تکمل کا زیریں حد سطح زمین کو ظاہر کرتا ہے جہاں سے سیارہ روانہ ہو گا۔

جواب: $5.144 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$

سوال 6.297: منفی برقیوں (الیکٹرانوں) کو ایک دوسرے کے قریب ہونے پر مجبور کرنا۔ دو منفی برقیے جن کے بیچ فاصلہ r ہو کے مابین درج ذیل قوت دفع پائی جاتی ہے جہاں $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ برقی مستقل ہے اور $e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

منفی برقیہ[23] کا **بار**[24] ہے۔

$$F=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ا. فرض کریں کہ ایک منفی برقیہ نقطہ $(1,0)$ پر واقع ہے جبکہ دوسرے برقیے کو محور x پر نقطہ $(-1,0)$ سے مبدا تک منتقل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کے لئے کتنا کام کرنا ہو گا؟

ب. فرض کریں ایک برقیہ $(1,0)$ اور دوسرا $(-1,0)$ پر واقع ہیں۔ تیسرے ابرقیے کو $(5,0)$ سے $(3,0)$ تک منتقل کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

کام اور حرکی توانائی

سوال 6.298: اگر متغیر قوت $F(x)$ ایک جسم جس کی کمیت m ہو کو محور x پر x_1 سے x_2 تک منتقل کرتی ہے۔ جسم کی سمتی رفتار v کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ قانون نیوٹن $F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ اور زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کو استعمال کرتے ہوئے دکھائی کہ اس جسم کو x_1 سے x_2 منتقل کرنے میں درج ذیل کام درکار ہو گا

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

جہاں x_1 پر جسم کی رفتار v_1 اور x_2 پر اس کی رفتار v_2 ہے۔ طبیعیات میں $\frac{1}{2}mv^2$ کو رفتار v پر چلنے والے جسم کی **حرکی توانائی**[25] کہتے ہیں۔ یوں کسی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اس جسم پر کیے گئے کام کے برابر ہو گی۔

سوال 6.299 تا سوال 6.305 میں سوال 6.298 کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال 6.299: ٹینس کا کھیل
ایک کھلاڑی $58\,\mathrm{g}$ کمیت کی گیند کو زور سے مار کر $175\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 6.300: ایک گیند جس کی کمیت $145\,\mathrm{g}$ ہو کو کھلاڑی $145\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: $117.6\,\mathrm{J}$

---

[23] electron
[24] charge
[25] kinetic energy

سوال 6.301: ایک سائکل سوار بمع سائکل کی کمیت $80\,\mathrm{kg}$ ہے۔ ساکن حال سے $40\,\mathrm{km}$ کی رفتار تک پہنچنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

سوال 6.302: ایک گاڑی جس کی کمیت $880\,\mathrm{kg}$ ہے کی رفتار $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ کر $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کرنے کے لئے کتنی توانائی درکار ہو گی؟
جواب: $67\,901\,\mathrm{J}$

سوال 6.303: فٹ بال
ایک فٹ بال جس کی کمیت $430\,\mathrm{g}$ ہے کو لات سے مار کر $95\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچایا جاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال 6.304: ایک کھلاڑی بازو کے زور سے $180\,\mathrm{g}$ کمیت کی گیند کو $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟
جواب: $56.25\,\mathrm{J}$

سوال 6.305: ایک اینٹ جس کی کمیت $3.5\,\mathrm{kg}$ ہے $4\,\mathrm{m}$ بلند چھت سے گرتی ہے۔ زمین پر پہنچنے کے لمحے پر اس کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟

6.9 فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہو۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \tag{6.33}$$

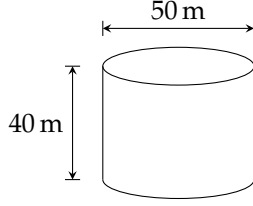
مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

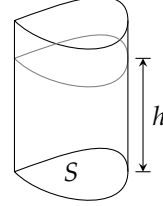
شکل 6.123 میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے جہاں تلا کا رقبہ S ، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh ، کمیت ρSh اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبہ پر قوت $g\rho h$ ہو گی جس کو **فشار**[26] p یا **دباو** کہتے ہیں۔

$$p = \rho g h \tag{6.34}$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر $\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے۔ آپ نے دیکھا کہ سیال کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔

مستقل گہرائی کے رقبہ S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

$$F = pS \tag{6.35}$$

شکل 6.123: فشار سیال۔

شکل 6.124: بیلنی حوض برائے مثال 6.37

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات 6.34 دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتصابی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

مثال 6.37: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی $40\,\mathrm{m}$ ہے جبکہ حوض کا رداس $25\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 6.124)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی نچلی $1\,\mathrm{m}$ پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

حل: اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نچلے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho g h = (1000)(9.8)(40) = 392\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$$

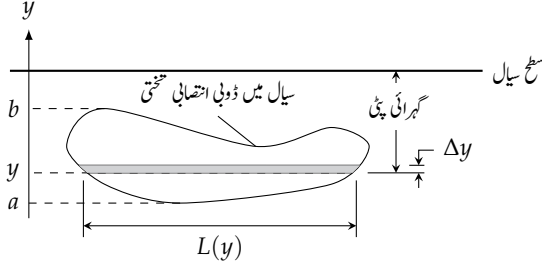
ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi r h = 2\pi(25)(1) = 50\pi\,\mathrm{m^2}$$

ہے لہٰذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61\,575\,216.01\,\mathrm{N}$$

□

اس مثال میں پٹی کے نچلے حصے کی گہرائی $40\,\mathrm{m}$ اور بالائی حصے کی گہرائی $39\,\mathrm{m}$ تھی لہٰذا ان پر فشار پر مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

شکل 6.125: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

متغیر گہرائی پر فشار

فرض کریں ہم کثافت ρ کی سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو xy مستوی میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل 6.125)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے باریک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو کی چوڑائی Δy ہو گی جبکہ اس پٹی کے نچلی ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کی نچلی کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta F &= (\text{پٹی کے نچلے کنارے پر فشار})(\text{رقبہ پٹی})\\ &= \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y\end{aligned}$$

پورے تختی پر قوت تخمیناً

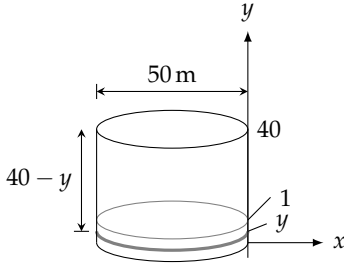
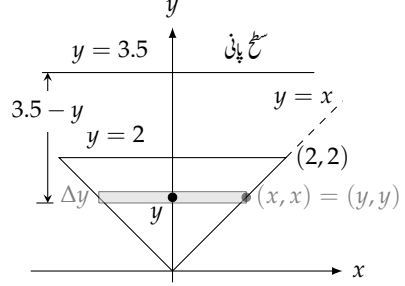
$$\sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y \tag{6.36}$$

ہو گی جو $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر تک پہنچنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: تکمل برائے قوت سیال
فرض کریں محور y پر $y = a$ سے $y = b$ تک کا خطہ، سیال میں ڈوبے ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گا۔

$$F = \int_a^b \rho g \cdot (\text{گہرائی پٹی}) \cdot L(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.37}$$

---

pressure[26]

شکل 6.126: تختی پر قوت پانی (مثال 6.38)

شکل 6.127: بیلنی حوض برائے مثال 6.39

□

مثال 6.38: ایک مساوی الساقین مثلث تختی جس کا تلا $4\,\mathrm{m}$ اور قد $2\,\mathrm{m}$ ہے ایک پانی کے تالاب میں یوں ڈوبا ہوا ہے کہ اس کا تلا اوپر ہو۔ تلا پر پانی کی گہرائی $1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کے ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

حل: ہم تختی کی نچلی راس کو محدد کے مبدا پر تصور کرتے ہیں (شکل 6.126)۔ یوں سطح پانی $y = 3.5$ پر ہو گا جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y = 2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $y = x$ اور بایاں کنارہ $y = -x$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

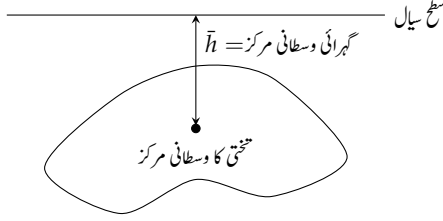
$$L(y) = 2x = 2y$$

اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہو گی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g (\text{گہرائی پٹی}) L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 9800(3.5 - y)2y\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \int_0^2 (7y - 2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \left[\frac{7y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = 84\,933\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

□

قوت سیال کا حصول

کسی بھی محددی نظام میں سیال میں ڈوبے ہوئے انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

شکل 6.128: قوت سیال اور وسطانی مرکز۔

ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کی عمومی کلیہ تلاش کریں۔

ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ سے ضرب دے کر تکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

مثال 6.39: ہم اب مثال 6.37 میں بیلنی حوض کی نچلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

ہم حوض کی تلا کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل 6.127) جبکہ محدد y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

ا. گہرائی پٹی: $40 - y$

ب. لمبائی پٹی: 50π

یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \rho g (\text{گہرائی})(\text{لمبائی})\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho g (40 - y)(50\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= 9800(50\pi)\int_0^1 (40 - y)\,\mathrm{d}y = 60\,805\,525.81\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

□

اس مثال میں حاصل قوت مثال 6.37 سے کچھ کم ہے جو متوقع تھا۔

قوت سیال اور وسطانی مرکز

اگر ہمیں سیال میں ڈوبے انتصابی تختی کا وسطانی مرکز معلوم ہو تب ہم اس تختی کے ایک طرف پر قوت سیال با آسانی معلوم کر سکتے ہیں (شکل 6.128)۔ مساوات 6.37 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g \times (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \rho g \int_a^b (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \rho g \times (\text{تختی کے خطے کا سطح سیال پر لکیر کے لحاظ سے معیار اثر}) \\
&= \rho g \times (\text{تختی کا رقبہ}) \times (\text{تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی})
\end{aligned}
$$

قوت سیال اور وسطانی مرکز

سیال میں ڈوبی انتصابی تختی کے ایک طرف پر قوت سیال F معلوم کرنے کی لئے ρg ، تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی $\bar{h}$ اور تختی کے رقبہ S کا حاصل ضرب لیں۔

$$F = \rho g \bar{h} S \tag{6.38}$$

مثال 6.40: ایک مثلث تختی پر قوت سیال کو مثال 6.38 میں تلاش کیا گیا۔ مساوات 6.38 استعمال کرتے ہوئے اس کو دوبارہ تلاش کریں۔

حل: مثلث کا وسطانی مرکز محدد y پر تلا سے راس کی جانب ایک تہائی فاصلہ پر پایا جاتا ہے (شکل 6.126) لہٰذا $\bar{h} = 1.5 + 2/3 = \frac{13}{6}$ ہو گا۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$S = \frac{1}{2}(\text{قاعدہ})(\text{قد}) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

یوں تختی کے ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گا۔

$$F = \rho g \bar{h} S = (1000 \times 9.8)\left(\frac{13}{6}\right)(4) = 84\,933\,\mathrm{N}$$

□

مساوات 6.38 کہتی ہے کہ سیال میں ڈوبی انتصابی تختی پر قوت سیال وہی ہو گا جو تختی کے پورے رقبے کو تختی کے وسطانی مرکز، جو $\bar{h}$ گہرائی پر ہے، منتقل کرنے سے حاصل ہو گا۔ عموماً اشکال کا وسطانی مرکز جدول سے دیکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات 6.38 قوت سیال معلوم کرنے کا ایک آسان ذریعہ بنتا ہے۔ ظاہر ہے کہ وسطانی مرکز حاصل کرتے ہوئے کسی نے مساوات 6.37 کی تکمل کی طرح کا تکمل حل کرتے ہوئے وسطانی مرکز حاصل کیا ہو گا۔ چونکہ اس وقت آپ سیکھ رہے ہیں لہٰذا فی الحال قوت سیال دریافت کرنے کے لئے مسئلے کا خاکہ بنائیں اور مساوات 6.37 استعمال کریں۔

شکل 6.129: مثلث تختی (سوال 6.308)

شکل 6.130: مثلث تختی (سوال 6.309)

سوالات

سوال 6.306: حوض کی اندرونی سطح پر مثال 6.37 میں کل کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: $1.23 \times 10^9\,\mathrm{N}$

سوال 6.307: اگر مثال 6.37 میں حوض نصف بھرا ہو تب نچلی ایک میٹر پٹی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟
جواب: $6.08 \times 10^7\,\mathrm{N}$

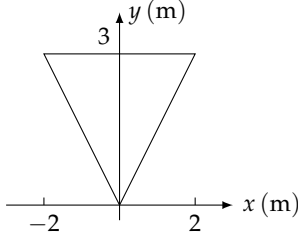
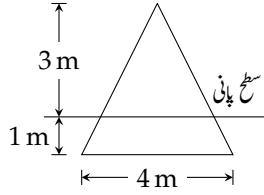
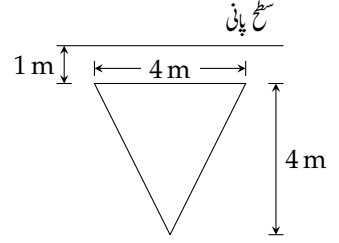
سوال 6.308: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.129 کا محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 6.309: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال 6.38 میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل 6.130 کا محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال 6.310: اگر مثال 6.38 میں تختی کو مزید دو میٹر نیچے منتقل کیا جائے تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟
جواب: $163\,333\,\mathrm{N}$

سوال 6.311: اگر مثال 6.38 میں تختی کو اتنا اوپر منتقل کیا جائے کہ اس کا تلا سطح پانی پر ہو تب اس کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

سوال 6.312: مساوی الساقین مثلث تختی کو شکل 6.131 میں دکھایا گیا ہے جس کا تلا سطح پانی سے $1\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔

ا. تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

شکل 6.133: مثلث الساقین (سوال 6.314)

شکل 6.132: مثلث الساقین (سوال 6.313)

شکل 6.131: مثلث الساقین (سوال 6.312)

ب. اگر صاف پانی کی بجائے سمندری پانی ہو تب قوت سیال کتنی ہو گی؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔

جواب: (ا) $182\,933\,\mathrm{N}$، (ب) $188\,238\,\mathrm{N}$

سوال 6.313: اگر گزشتہ سوال میں تختی کو تلا کے گرد آدھا چکر گھمایا جائے تب اس کا کچھ حصہ پانی سے باہر ہو گا (شکل 6.132)۔ اب تختی کی ایک طرف پر کتنی قوت سیال ہو گی؟

سوال 6.314: ایک حوض کے سر مساوی الساقین مثلث ہیں (شکل 6.133)۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) $58\,800\,\mathrm{N}$، (ب) $61.9\,\mathrm{cm}$، (ج) چونکہ فشار صرف گہرائی پر منحصر ہے لہٰذا لمبائی کا قوت سیال پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔

سوال 6.315: پانی کے حوض کے سر چکور ہیں جہاں چکور کا ضلع $2\,\mathrm{m}$ ہے۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کے سر پر قوت کو آدھا کرنے کے لئے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

ج. کیا حوض کی لمبائی سے حوض کے سر پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.316: مچھلیاں دیکھنے کے لئے ایک مچھلی گھر کی دیوار میں $2\,\mathrm{m}$ چوڑا اور $1\,\mathrm{m}$ اونچا شیشہ نسب ہے۔ شیشے کا تلا سطح پانی سے $1.25\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ اس شیشے پر قوت پانی کتنی ہو گا۔ (سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔)
جواب: $15\,126.3\,\mathrm{N}$

سوال 6.317: مچھلیوں کے حوض کا تلا $1.5 \times 0.5\,\mathrm{m}$ اور اس کی گہرائی $0.75\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کی سطح بالائی کنارے سے $5\,\mathrm{cm}$ نیچے ہے۔

ا. حوض کے اطراف پر قوت سیال دریافت کریں۔

ب. حوض کی تلا پر قوت سیال دریافت کریں۔

سوال 6.318: دودھ کے ڈبے کا تلا $10 \times 10\,\mathrm{cm}$ اور اس کا قد $20\,\mathrm{cm}$ ہے۔ دودھ سے بھرے ہوئے ڈبے کی ایک طرف پر قوت سیال معلوم کریں۔ کثافت دودھ کو $1032\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔
جواب: $20.2\,\mathrm{N}$

سوال 6.319: زیتون کی تیل کے ڈبے کا تلا $14 \times 12\,\mathrm{cm}$ اور قد $26.5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ بھرے ہوئے ڈبے کی تلا اور ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔ زیتون کی تیل کی کثافت $930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال 6.320: ایک دائری تختی کا آدھا حصہ پانی میں انتصابی ڈوبا ہے۔ تختی کا رداس $0.25\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔
جواب: $102.08\,\mathrm{N}$

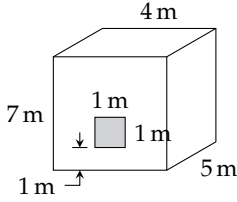
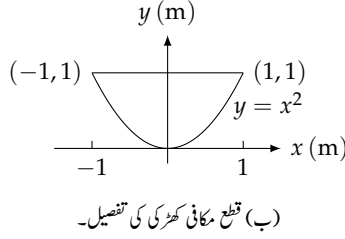
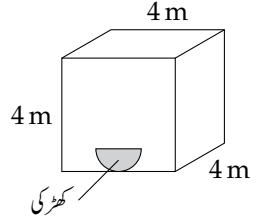
سوال 6.321: دودھ کی فراہمی کے لئے ٹرک پر نسب $2\,\mathrm{m}$ قطر کا افقی بیلنی حوض استعمال کیا جاتا ہے۔ آدھے بھرے حوض کے ایک سر پر قوت سیال تلاش کریں۔

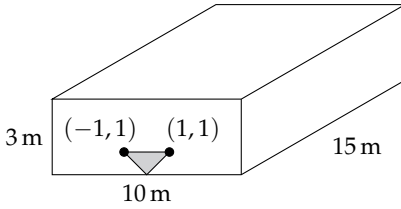
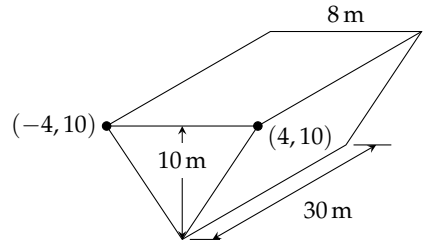
سوال 6.322: ایک مکعب حوض کی دیوار میں قطع مکافی کھڑکی دی گئی ہے جو $150\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.134)۔ اس حوض میں $25\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ کثافت کا سیال بھرا جائے گا۔

ا. جب حوض میں سیال کی گہرائی $1.25\,\mathrm{m}$ ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

جواب: (ا) $22\,827\,\mathrm{N}$، (ب) $2.6544\,\mathrm{m}$

سوال 6.323: پانی کی ایک مکعب حوض کی دیوار میں $1 \times 1\,\mathrm{m}$ چکور کھڑکی دی گئی ہے جو $40\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل 6.135)۔

شکل 6.135: حوض میں چکور کھڑکی (سوال 6.323)۔

(ب) قطع مکافی کھڑکی کی تفصیل۔

(ا) حوض میں کھڑکی۔

شکل 6.134: حوض میں قطع مکافی کھڑکی (سوال 6.322)

شکل 6.137: پانی کا مستطیل تالاب (سوال 6.325)

شکل 6.136: حوض کے آخری سر تکونی ہیں (سوال 6.324)۔

ا. اگر حوض میں پانی کی گہرائی $3\,\mathrm{m}$ ہو تب کھڑکی پر قوت سیال کتنا ہو گا؟

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

سوال 6.324: پانی کے حوض کو شکل 6.136 میں دکھایا گیا ہے۔ حوض کے آخری تکونی سر $1\,200\,000\,\mathrm{N}$ قوت برداشت کر سکتے ہیں۔ حوض میں پانی کی وہ حجم تلاش کریں جس پر حوض کے تکونی سر اپنی برداشت کی حد پر ہوں گے۔

جواب: $1133.77\,\mathrm{m^3}$

سوال 6.325: ایک مستطیل تالاب شکل 6.137 میں دکھایا گیا ہے جس کی ایک طرف میں تکونی کھڑکی دی گئی ہے جو $62\,000\,\mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے۔ اس خالی تالاب میں $10\,\mathrm{m^3\,h^{-1}}$ سے پانی بھرا جا رہا ہے۔ تکونی کھڑکی کتنی دیر میں اپنی برداشت کے حد پر ہو گی؟

سوال 6.326: ایک انتصابی تختی جس کا قد a اور چوڑائی b ہے کو کثافت ρ کے سیال میں ڈبویا جاتا ہے۔ تختی کا بالائی کنارہ سطح سیال پر ہے۔ تختی کے کے لمبے کنارے پر اوسط فشار سیال کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 6.327: دکھائیں کہ سوال 6.326 میں تختی کی ایک طرف پر قوت کی مقدار سوال 6.326 میں حاصل اوسط فشار ضرب تختی کا رقبہ ہو گا۔

6.10 بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال

اس باب میں ریمان مجموعہ کے استعمال سے ہم نے چیزوں کا حساب کرنا سیکھا۔ یہ عمل درج ذیل تین اقدام پر مشتمل ہے۔

ا. مطلوبہ چیز کو ایک یا ایک سے زائد تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے جو بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری ہوں۔

ب. وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے ہر ذیلی وقفہ میں ایک نقطہ c_k منتخب کیا جاتا ہے۔ k ویں ذیلی وقفہ کی لمبائی Δx_k ہو گی۔

مطلوبہ چیز کی تخمینی قیمت کو مجموعہ کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

اس مجموعہ کی شناخت بطور وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کی ریمان مجموعہ کی جاتی ہے۔

ج. خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے ریمان مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔

ریمان مجموعہ کا حد قطعی تکمل ہو گا۔

قطعی تکمل استعمال کرتے ہوئے چیز کا حساب لگایا جاتا ہے۔

درج بالا اقدام سے لکیر کی لمبائی، خطے کا رقبہ، اجسام کا حجم، کام، وغیرہ کا حساب ممکن ہے۔

حقیقت میں انجینئری، حیاتیات، علم کیمیا، اقتصادیات، ارضیات، طب، اور دیگر شعبوں میں ہزاروں کی تعداد میں چیزوں کو ان اقدام سے حل کیا جا سکتا ہے۔

اس حصہ میں ان اقدام پر دوبارہ غور کیا جائے گا اور کئی نئے تکمل متعارف کیے جائیں گے جو ان اقدام سے پیدا ہوتے ہیں۔

فاصلہ بالمقابل ہٹاو

اگر کسی محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام تفاعل $s(t)$ دیتا ہو اور یہ جسم ایک ہی سمت میں حرکت کرتا ہو تب $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کے سمتی رفتار تفاعل $v(t)$ کا تکمل اس دورانیے میں طے شدہ فاصلہ دے گا۔ اگر جسم اس دورانیے میں سمت تبدیل کرتا ہو تب طے شدہ فاصل حاصل کرنے کے لئے ہمیں جسم کی رفتار $\left|v(t)\right|$ کا تکمل لینا ہو گا۔ جسم کی سمتی رفتار کا تکمل جسم کا **ہٹاو**[27] $s(b) - s(a)$ دے گا جو اس کی ابتدائی اور اختتامی مقامات کے بیچ فاصلہ ہے۔

یہ دیکھنے کے لئے ہم وقتی وقفہ $a \le t \le b$ کی خانہ بندی کرتے ہیں جہاں k ویں وقفے کی لمبائی Δt_k ہے۔ اگر Δt_k بہت کم ہو تب دورانیہ t_{k-1} تا t_k جسم کی سمتی رفتار $v(t)$ میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی لہٰذا اس ذیلی وقفے کی دائیں سر پر جسم کی سمتی رفتار $v(t_k)$ کو اس ذیلی وقفہ پر جسم کی سمتی رفتار تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں k ویں ذیلی وقفہ کے دوران جسم کے مقام میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$v(t_k)\Delta t_k$$

اگر $v(t_k)$ مثبت ہو تب یہ تبدیلی مثبت ہو گی اور اگر $v(t_k)$ منفی ہو تب یہ تبدیلی منفی ہو گی۔ دونوں صورتوں میں k ویں ذیلی وقفہ میں جسم

$$\left|v(t_k)\right| \Delta t_k$$

فاصلہ طے کرے گا۔ یوں پورے وقفے پر جس کل درج ذیل فاصلہ طے کرے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \left|v(t_k)\right| \Delta t_k \tag{6.39}$$

مساوات 6.39 میں مجموعہ، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل رفتار $\left|v(t)\right|$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ تخمینی مجموعہ بہتر نتیجہ دے گا۔ یوں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ میں جسم کا طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لئے درج ذیل تکمل استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{طے شدہ فاصلہ} = \int_a^b \left|v(t)\right| \mathrm{d}t \tag{6.40}$$

یہ ریاضیاتی نمونہ ہر بار بالکل درست فاصلہ دیتا ہے۔

اگر ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقتی دورانیے کی اختتام پر ابتدائی مقام سے جسم کتنا دور ہو گا تب ہم $v(t)$ کا تکمل نا کہ $\left|v(t)\right|$ کا تکمل لیں گے۔

آئیں دیکھیں ایسا کیوں ہو گا۔ فرض کریں کی تفاعل $s(t)$ جسم کا مقام دیتا ہے اور F تفاعل v کا الٹ تفرق ہے۔ تب

$$s(t) = F(t) + C$$

[27] displacement

ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ یوں لمحہ $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کا ہٹاؤ

$$s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا یعنی:

$$\text{ہٹاؤ} = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.41}$$

مثال 6.41: ایک لکیر پر لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ تک ایک جسم کی رفتار $v(t) = 5\cos t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ اس کا کل ہٹاؤ کتنا ہو گا؟

حل:

رفتار لا تکمل فاصلہ ہو گا

$$\begin{aligned}
\text{طے شدہ فاصلہ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |5\cos t|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 5\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= 5(1-0) - 5(-1-1) = 5 + 10 = 15\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

سمتی رفتار کا تکمل ہٹاؤ ہو گا

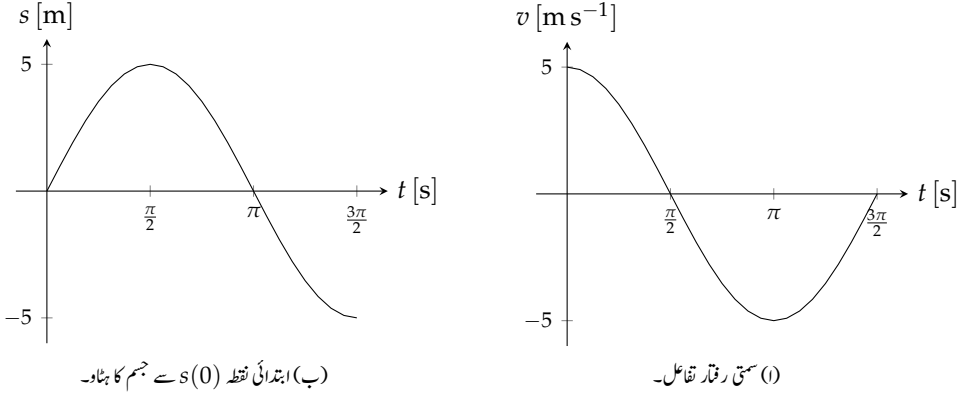
$$\begin{aligned}
\text{ہٹاؤ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 5(-1) - 5(0) = -5\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

اس دورانیے میں جسم $5\,\mathrm{m}$ آگے اور $10\,\mathrm{m}$ پیچھے سفر کرتا ہے۔ یوں یہ $15\,\mathrm{m}$ فاصل طے کرتا ہے جبکہ اس کا ہٹاؤ $-5\,\mathrm{m}$ ہو گا (شکل 6.138)۔ □

قاعدہ دولس

آپ جانتے ہیں کہ چننے کے بعد سیب کا ذائقہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں شکر وقت کے ساتھ نشاستہ میں تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں نشاستہ کی مقدار معلوم کرنے کے لئے ہم سیب کا ایک باریک کتلے کو خوردبین میں دیکھتے ہیں۔ نشاستہ کے ہر دانہ کا سطح عمودی تراش خوردبین میں صاف نظر آتا ہے لہٰذا کتلے کی سطح میں نشاستہ کے رقبہ عمودی تراش کا تناسب معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہ دو بعدی تناسب سیب میں نشاستہ کے تین بعدی تناسب کے برابر ہو گا۔ دو بعدی اور تین بعدی تناسب کی یکسانیت اوسط قیمت کی تصور پر مبنی ہے۔

(ا) سمتی رفتار تفاعل۔

(ب) ابتدائی نقطہ $s(0)$ سے جسم کا ہٹاو۔

شکل 6.138: سمتی رفتار تفاعل اور ہٹاو (مثال 6.41)

فرض کریں ہم کسی ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کی تناسب جاننا چاہتے ہیں۔ ہم ٹھوس جسم سے موزوں نمونہ حاصل کرتے ہیں جس کو کاٹ کر ایک مکعب حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکعب کا ضلع L ہے۔ اس مکعب کو شکل 6.139 میں دکھایا گیا ہے جہاں مکعب کا ضلع x محور پر ہے۔ ہم وقفہ $[0, L]$ کے عمودی سطحوں سے اس مکعب کو کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں x پر دانہ دار مادے کے رقبے کا تناسب $r(x)$ ہے۔ فرض کریں کہ $r(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے۔

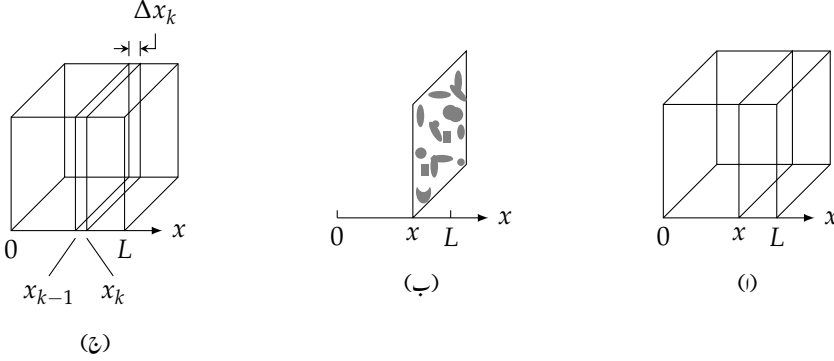
اب وقفہ $[0, L]$ کی خانہ بندی کریں۔نقطہ خانہ بندی پر x محور کے عمودی سطحوں سے مکعب کو کتلوں میں تقسیم کریں۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی جو نقطہ x_{k-1} اور نقطہ x_k پر موجود سطحوں کے بیچ فاصلہ ہو ہے۔اگر یہ سطحیں کافی قریب ہوں تب یہ دانوں کو بیلنی شکل میں کاٹیں گے۔ ان بیلنوں کا قاعدہ x_k پر ہو گا۔ ان سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی حجمی تناسب وہی ہو گی جو x_k پر سطح میں دانہ دار مادہ کی سطحی تناسب ہے جو ان بیلنوں کے قاعدہ کے برابر ہے جو از خود تقریباً $r(x)$ ہو گا۔یوں دو قریبی سطحوں کے بیچ دانہ دار مادہ کی مقدار درج ذیل ہو گی۔

$$(\text{تناسب}) \times (\text{کتلے کا حجم}) = r(x)L^2\Delta x_k$$

پورے مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار

$$\sum_{k=1}^{n} r(x)L^2\Delta x_k$$

ہو گی جو وقفہ $[0, L]$ پر تفاعل $r(x)L^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب پہنچانے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا لہٰذا درج ذیل تکمل، جو ریمان مجموعہ کی حد کو ظاہر کرتا ہے، مکعب میں دانہ دار مادہ کی مقدار دے گا۔

$$\int_0^L r(x)L^2\,\mathrm{d}x$$

شکل 6.139: قاعدہ دوسل کے مراحل۔

اس مقدار کو مکعب کے حجم L^3 سے تقسیم کرنے سے مکعب میں دانہ دار مادہ کی تناسب حاصل ہو گی۔ اگر ہم نے موزوں نمونی مکعب منتخب کیا ہو تب پورے ٹھوس جس میں دانہ دار مادہ کا تناسب وہی ہو گا جو اس نمونی مکعب میں ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\text{ٹھوس جسم میں دانہ دار مادہ کا تناسب} &= \text{مکعب میں دانہ دار مادہ کا تناسب} \\
&= \frac{\int_0^L r(x) L^2 \, \mathrm{d}x}{L^3} \\
&= \frac{1}{L} \int_0^L r(x) \, \mathrm{d}x \\
&\text{نمائندہ سطح عمودی تراش میں دانہ دار مادے کا سطحی تناسب}
\end{aligned}
$$

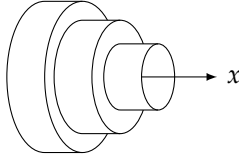
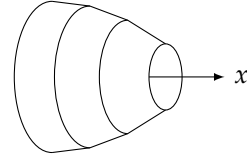
یہ **قاعدہ دولس**[28] ہے جسے فرانسیسی ماہر ارضیات اشیلہ ارنسٹ دولس $[1817 - 1881]$ نے دریافت کیا۔ یوں وقفہ $[0, L]$ پر $r(x)$ کی اوسط قیمت $\bar{r}$ سے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادے کا تناسب حاصل ہو گا۔حقیقت میں کئی رقبہ عمودی تراش پر $\bar{r}$ حاصل کر کے ان کی اوسط لی جاتی ہے۔

جناب دولس پتھر میں دانہ دار مادہ کی تناسب میں دلچسپی رکھتے تھے۔ وہ نمونی پتھر کی ایک سطح کو اچھی طرح چمکدار بنا کر سطح کے برابر مومی کاغذ کو چمکیلی سطح پر رکھ کر دانہ دار خطوں کی نشاندہی کرتے۔کاغذ کا وزن کرنے کے بعد، دانہ دار خطوں کو کاغذ سے کاٹ کر کاغذ کا وزن دوبارہ کرتے۔ یوں دانہ دار خطوں کے رقبہ کا تناسب حاصل کیا جاتا۔ یہ ترکیب آج بھی تیل کی تلاش میں استعمال کیا جاتا ہے۔

ناکارہ تکمل، ناکارہ نمونہ کشی

بعض اوقات ریمان مجموعہ سے حاصل تکمل ہمارے کسی کام کے نہیں ہوتا ہے۔ اس کا دارومدار مسئلے کی نمونہ کشی پر منحصر ہے۔بعض طریقہ کار موزوں اور بعض غیر موزوں ہوتے ہیں۔ آئیں ایک غیر موزوں ریمان مجموعہ کی مثال دیکھیں۔

---

[28] Delesse's rule

(ا) سطحی رقبہ مخروطی پٹیوں سے حاصل ہوتا ہے۔ (ب) سطحی رقبہ بیلنی پٹیوں سے حاصل نہیں ہوتا ہے۔

شکل 6.140: مخروط پٹی لینے سے کار آمد تکمل جبکہ بیلنی پٹی سے غیر کارآمد تکمل حاصل ہو گا۔

ہم شکل 6.140 میں سطحی رقبہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ مخروطی ٹکیاں لینے سے شکل 6.140-ا حاصل ہوتا ہے جس سے سطحی رقبے کا کلیہ

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ ہر بار بالکل درست نتیجہ دیتا ہے جو دیگر ذرائع سے حاصل معلومات کے عین مطابق ہوتا ہے۔

آئیں شکل 6.140-ب کی طرح بیلنی پٹیاں لے کر ریمان مجموعہ حاصل کر کے دیکھیں۔ یہ ریمان مجموعہ بھی مرتکز ہوتا ہے جو درج ذیل نسبتاً آسان تکمل دیتا ہے۔

$$S=\int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.43}$$

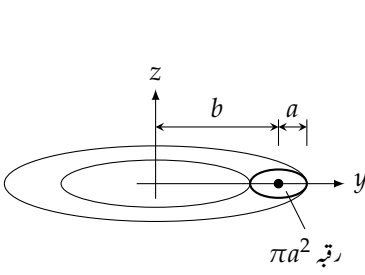
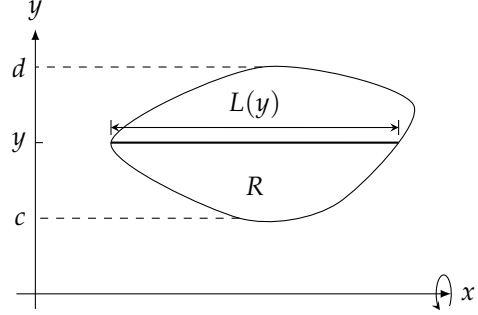
ہم کہہ سکتے ہیں کہ حجم کی تلاش میں ہم نے بیلنی پٹیاں استعمال کیں لہٰذا یہاں بھی ان کا استعمال درست ہو گا۔ حقیقت میں مساوات 6.43 کوئی پیش گوئی نہیں کرتا ہے اور نا ہی اس سے کبھی درست نتائج حاصل ہوتا ہیں جو دیگر تراکیب سے حاصل جوابات کے ساتھ مشابہت رکھتے ہوں۔ نمونہ کشی کے دوران موازنہ کے قدم پر یہ کلیہ ناکام ثابت ہوتا ہے۔

یاد رہے کہ اگر آپ ایک بہت اچھا نظر آنے والے تکمل حاصل کرنے میں کامیاب ہوں، اس کا یہ مطلب نہیں ہے کہ حاصل تکمل درست نتائج بھی دے گا۔ آپ کو تکمل کے نتائج کو پرکھنا بھی ہو گا۔

مسئلہ پاپس

وسطانی مراکز کا سطح طواف کے رقبہ اور جسم طواف کے حجم کے ساتھ تعلق کو **مسئلہ پاپس**[29] پیش کرتا ہے[30]۔

مسئلہ 6.1: **مسئلہ پاپس برائے حجم** اگر کسی مستوی خطہ کو سطح مستوی میں لکیر کے گرد گھمایا جائے جہاں خطے کو لکیر قطع نہ کرتی ہو تب جسم طواف کا حجم خطے کا رقبہ ضرب وہ فاصلہ جو ایک چکر کے دوران وسطانی نقطہ طے کرتا ہو کے برابر ہو گا۔ اگر خطے کا رقبہ S اور وسطانی نقطے

[29] Pappus's theorem
[30] اسکندریا کا رہائشی قدیم یونانی ریاضی دان۔ مسائل پاپس تقریباً 1700 سال قدیم ہیں۔

شکل 6.141: خطہ R کو ایک بار محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

شکل 6.142: اندرسہ (مثال 6.42)

کا محور سے فاصلہ ρ ہو تب جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi\rho S \tag{6.44}$$

ثبوت: ہم محور طواف کو محور x اور خطہ R کو ربع اول میں لیتے ہیں۔ ہم y پر، محور y کے عمودی، خطہ کے عمودی تراش کی لمبائی کو $L(y)$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 6.141)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ استمراری ہے۔ اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

ہم نلکی خول کی ترکیب سے اس جسم طواف کا حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.45}$$

خطہ R کے وسطانی مرکز کا y محدد

$$\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y = S\bar{y}$$

ہو گا جس کو مساوات 6.45 کے آخری تکمل میں پر کرنے سے $H = 2\pi\bar{y}S$ ملتا ہے۔ اس میں رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $H = 2\pi\rho S$ حاصل ہوتا ہے۔

□

شکل 6.143: نصف کرہ کا وسطانی مرکز (مثال 6.43)

شکل 6.144: مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ (مسئلہ 6.2)

مثال 6.42: رداس a کے دائری قرص کو محور کے گرد گھما کر اندرسہ[31] پیدا کیا جاتا ہے (شکل 6.142)۔ قرص کے مرکز اور محور کے بیچ فاصلہ $b \geq a$ ہے۔ اس اندرسہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$

□

مثال 6.43: نصف کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ربع اول میں محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھمانے سے نصف کرہ حاصل ہوتا ہے (شکل 6.143)۔ تشاکلی کی بنا وسطانی مرکز کا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ مساوات 6.44 میں ρ کی جگہ $\bar{y}$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{H}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{2\pi(\frac{1}{4}\pi a^2)} = \frac{4a}{3\pi}$$

□

مسئلہ 6.2: **مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ**
اگر ایک ہموار مستوی منحنی کے قوس کو ایسی لکیر کے گرد ایک بار گھمایا جائے جو اس قوس کو قطع نہ کرتی ہو تب قوس کی لمبائی ضرب ایک چکر کے دوران قوس کی وسطانی مرکز کا طے شدہ فاصلہ، طواف قوس سے پیدا سطح کا رقبہ ہو گا۔ اگر محور طواف سے وسطانی مرکز کا فاصلہ ρ اور قوس کی لمبائی L ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$S = 2\pi\rho L \tag{6.46}$$

اس مسئلے کی ثبوت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ محور طواف کو محور x سے ظاہر کیا جا سکتا ہے اور قوس کو متغیر x کو استمراری تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے۔

---

[31] torus

ثبوت: ہم محور x کو محور طواف لیتے ہیں اور ربع اول میں $x = a$ تا $x = b$ تک قوس پایا جاتا ہے۔ اس قوس کے طواف سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \,\mathrm{d}s = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y \,\mathrm{d}s \tag{6.47}$$

قوس کے وسطانی مرکز کا y محدد

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y} \,\mathrm{d}s}{\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}s} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y \,\mathrm{d}s}{L}$$

ہو گا جس کو مساوات 6.47 کے آخری تکمل میں پر کرنے سے $S = 2\pi\bar{y}L$ ملتا ہے۔رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $S = 2\pi\rho L$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال 6.44: اندرسے کا سطحی رقبہ (مثال 6.42 میں) درج ذیل ہو گا۔

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

□

سوالات

فاصلہ اور ہٹاو

سوال 6.328 تا سوال 6.335 میں ایک جسم محددی لکیر پر سمتی رفتار $v(t)$ سے حرکت کرتا ہے۔ (ا) سمتی رفتار کو ترسیم کر کے دیکھیں کہاں یہ مثبت اور کہاں منفی ہے۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے دورانیے میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ج) جسم کا ہٹاو بھی تلاش کریں۔

سوال 6.328: $v(t) = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
جواب: (ب) $20\,\mathrm{m}$، (ج) $0\,\mathrm{m}$

سوال 6.329: $v(t) = \sin \pi t, \quad 0 \le t \le 2$

سوال 6.330: $v(t) = 6\sin 3t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
جواب: (ب) $6\,\mathrm{m}$، (ج) $2\,\mathrm{m}$

سوال 6.331: $v(t) = 4\cos 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 6.332: $v(t) = 49 - 9.8t, \quad 0 \le t \le 10$
جواب: (ب) $245\,\text{m}$، (ج) $0\,\text{m}$

سوال 6.333: $v(t) = 8 - 1.6t, \quad 0 \le t \le 10$

سوال 6.334: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \le t \le 2$
جواب: (ب) $6\,\text{m}$، (ج) $4\,\text{m}$

سوال 6.335: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \le t \le 3$

سوال 6.336: تفاعل $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے جہاں $t \ge 0$ ہے۔(t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام معلوم کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

ھ. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور مقام جسم کا ترسیم کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔

جواب: (ب) $2 < t < 4$، (ج) $6\,\text{m}$، (د) $\frac{22}{3}\,\text{m}$

سوال 6.337: تفاعل $s = -t^3 + 6t^2 - 9t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے جہاں $t \ge 0$ ہے۔(t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

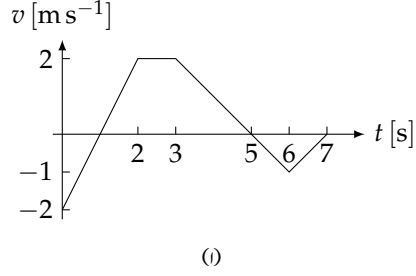
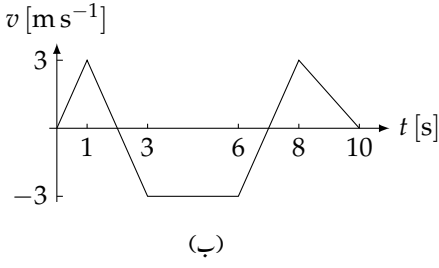
ب. کب جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. کیا جسم کبھی بھی مبدا کے کے دائیں جانب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

ھ. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

(ا)

(ب)

شکل 6.145: سمتی رفتار (سوال 6.338)

و. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور مقام جسم کا ترسیم کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال 6.338: دو اجسام محددی لکیر پر حرکت کرتے ہیں۔ ان اجسام کی سمتی رفتاروں کو شکل 6.145 میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے وقفے کے لئے اجسام کتنا فاصلہ طے کرتے ہیں اور ان کا ہٹاو کتنا ہو گا؟

جواب: (ا) کل فاصلہ 7 ، ہٹاو 3 ؛ (ب) کل فاصلہ 19.5 ، ہٹاو -4.5

سوال 6.339: ایک نمونی ریل گاڑی کی 10 سیکنڈوں کے لئے پٹڑی پر آگے پیچھے حرکت درج ذیل ہے۔ قاعدہ سمسن سے کل فاصلہ اور ہٹاو تلاش کریں۔

وقت	سمتی رفتار	وقت	سمتی رفتار
0	0	6	−11
1	12	7	−6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	−5	10	0
5	−13		

سطحی رقبہ کی نمونہ کشی

سوال 6.340: لکیر $y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ 0 \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کا رقبہ

$$\text{سطح طواف} = \frac{1}{2}(\text{تلا کا محیط})(\text{ترچھا قد}) = \frac{1}{2}(2\pi)(2) = 2\pi$$

ہونا چاہیے۔ مساوات 6.43 میں $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ پر کرنے سے کیا حاصل ہوتا ہے؟

جواب: $\sqrt{3}\pi$

سوال 6.341: وہ واحد شکل جس کے لئے مساوات 6.43 درست نتائج دیتا ہے بیلن ہے۔ لکیر $y = r,\ 0 \le x \le h$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کریں۔ دکھائیں کہ مساوات 6.43 سے اس سطح طواف کا رقبہ $S = 2\pi rh$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال 6.342: ہر وہ جسم جو مائع میں تیرتا ہو اپنی کمیت کے برابر مائع کی جگہ لیتا ہے (اصول آرشمیدس)۔ یوں ہٹائے گئے مائع کی کمیت معلوم کر کے اس جسم کی کمیت معلوم کی جا سکتی ہے۔ ایک کشتی کی کمیت جاننے کی خاطر ہم خط آب کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کر کے نقطہ خانہ بندی پر کشتی کے ڈوبے ہوئے حصے کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ معلوم کرتے ہیں۔ اس کے بعد قاعدہ سمسن استعمال کر کے $S(x)$ کے تکمل کی تخمین تلاش کرتے ہیں۔ نقاط خانہ بندی پر ڈوبے ہوئے رقبے $S(x)$ درج ذیل ہیں جہاں نقطوں کے بیچ فاصلہ $1\,\mathrm{m}$ ہے اور رقبہ کی اکائی m^2 ہے۔

نقطہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رقبہ	0	1.07	3.84	7.82	12.20	15.18	16.14	14.00	9.21	3.24	0

ا. ہٹائے گئے پانی کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ کشتی کتنی کمیت کا پانی ہٹاتی ہے؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔

جواب: (ا) $82.67\,\mathrm{m}^3$، (ب) $85\,071\,\mathrm{kg}$

مسئلہ پاپس

سوال 6.343: ایک چکور خطہ کے راس $(0,2)$، $(2,0)$، $(4,2)$ اور $(2,4)$ ہیں۔ اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ایک ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم اور سطحی رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $H = 32\pi$، $S = 32\sqrt{2}\pi$

سوال 6.344: لکیر $2x + y = 6$ اور محددی لکیروں کے بیچ تکونی خطہ کو لکیر $x = 5$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم مسئلہ پاپس کی مدد سے معلوم کریں۔ (جیسا آپ صفحہ 704 پر سوال 6.256 میں دیکھ چکے ہیں، تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا اور یہ قاعدہ کی وسطی نقطہ سے مخالف راس کی جانب لکیر پر ایک تہائی فاصلہ پر ہو گا۔)

سوال 6.345: دائرہ $(x-2)^2 + y^2 = 1$ کو محور y کے گرد گھما کر اندرسہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اس اندرسہ کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $4\pi^2$

سوال 6.346: مسئلہ پاپس سے عمودی دائرہ مخروط کا سطحی رقبہ پہلو تلاش کریں۔

سوال 6.347: رداس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ پاپس سے نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0$، $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$

سوال 6.348: آپ نے سوال 6.347 میں دریافت کیا کہ نصف دائرہ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ کا وسطانی مرکز $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ ہے۔ اس نصف دائرہ کو لکیر $y=a$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔حاصل سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.349: محور x اور $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ کے بیچ خطہ R کا رقبہ $\frac{1}{2}\pi ab$ ہے۔ خطہ R کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ہے۔ خطہ R کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ a پر منحصر نہیں ہو گا۔

جواب: $\bar{x}=0$ ، $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$

سوال 6.350: محور x اور نصف دائرہ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز $\left(0, \frac{4a}{3\pi}\right)$ ہے (مثال 6.43)۔ اس خطہ کو لکیر $y=-a$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال 6.351: لکیر $y=x-a$ کے گرد سوال 6.350 کا خطہ گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

جواب: $\frac{\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)}{6}$

سوال 6.352: نصف دائرہ $y=\sqrt{a^2-x^2}$ کا وسطانی مرکز $\left(0, \frac{2a}{\pi}\right)$ ہے۔ اس نصف دائرہ کو لکیر $y=x-a$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 6.353: محور x کے لحاظ سے مثال 6.43 کے نصف دائری خطہ کا معیار اثر تلاش کریں۔ اگر آپ پہلے سے جانتے ہوئے معلومات استعمال کریں تب آپ کو تکمل لینے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

جواب: $\frac{2a^3}{3}$

باب 7

ماورائی تفاعل

وہ تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو **الجبرائی**[1] کہلاتا ہے۔

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

اس مساوات میں تمام P متغیر x کے کثیر رکنی ہیں جہاں کثیر رکنیوں کے عددی سر ناطق ہیں۔ یوں $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ الجبرائی ہے چونکہ یہ مساوات $(x+1)y^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے جس میں $P_2 = x + 1$ ، $P_1 = 0$ اور $P_0 = -1$ ہیں۔ کثیر رکنی اور ناطق عددی سر والے ناطق تفاعل، الجبرائی ہوں گے۔اسی طرح الجبرائی تفاعل کے مجموعے، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، ناطق طاقت اور ناطق جذر بھی الجبرائی ہوں گے۔

وہ تفاعل جو الجبرائی نہیں ہوں **ماورائی**[2] کہلاتے ہیں۔ چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل sin ، cos ، tan ، csc ، sec ، cot اور ان کے الٹ ماورائی ہیں۔ اسی طرح قوت نمائی تفاعل اور لوگارتھمی تفاعل بھی ماورائی تفاعل ہیں۔

وہ اعداد جو ناطق عددی سر والے کثیر رکنی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں **الجبرائی** کہلاتے ہیں۔چونکہ -2 مساوات $x + 2 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا -2 الجبرائی عدد ہے۔ اسی طرح $x^2 - 3 = 0$ کو $\sqrt{3}$ مطمئن کرتا ہے لہٰذا $\sqrt{3}$ بھی الجبرائی عدد ہے۔ وہ اعداد جو الجبرائی نہ ہوں **ماورائی** کہلاتے ہیں۔ e اور π ماورائی اعداد ہیں۔

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی الٹ تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکونیاتی تفاعل کے اہم الٹ پائے جاتے ہیں۔ پابند وقفہ پر تفاعل کو پابند شدہ تفاعل کہتے ہیں۔ اسی طرح لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل کے دیگر الٹ جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ ہذلولی تفاعل اور ان کے الٹ تفاعل کا استعمال آویزاں رسی، منتقلی حرکی توانائی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتے ہیں۔ اس باب میں ان تمام تفاعل پر غور کیا جائے گا۔ ان مسئلوں کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں یہ تفاعل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

---

[1] algebraic
[2] transcendental

7.1 الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات

اس حصہ میں ہم الٹ تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کی کلیات، ترسیمات، اور الٹ جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

ایک ایک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لئے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو بار مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے جذر المربع اور جذر الکعب ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو **ایک ایک تفاعل**[3] کہتے ہیں۔

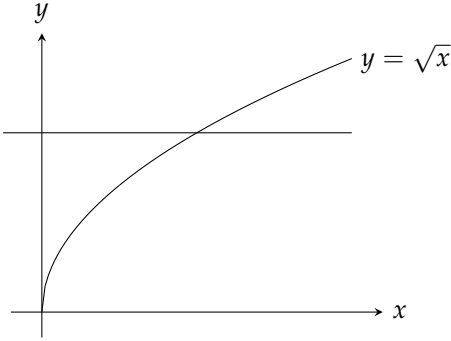
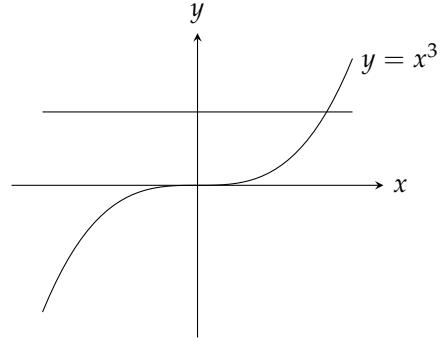
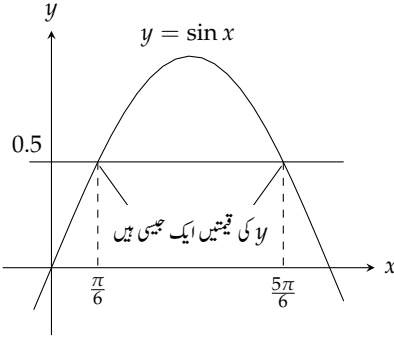
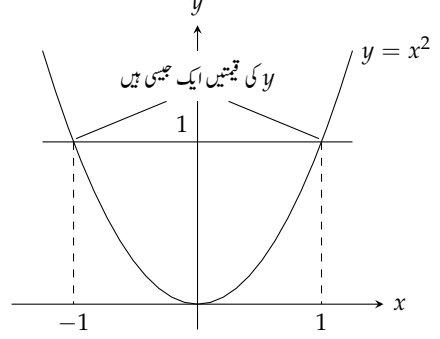
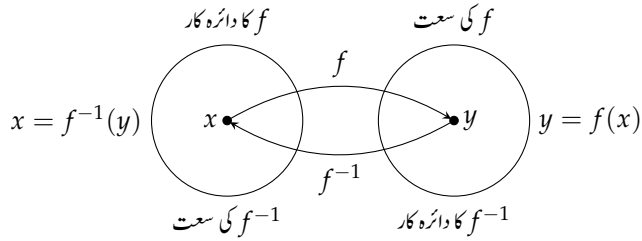
تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب **ایک ایک** ہو گا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال 7.1: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لئے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہٰذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یہ ایک ایک تفاعل ہے۔ □

مثال 7.2: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہٰذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل نہیں ہے۔ اس کے برعکس چونکہ ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہٰذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ ایک ایک تفاعل ہے۔ □

ایک ایک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہٰذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہو گا (شکل 7.1)۔

افقی لکیر کا پرکھ
کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت ایک ایک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہو۔

شکل 7.1: ایک ایک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک بار قطع کرتی ہے جبکہ غیر ایک ایک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی لکیروں کو ایک سے زیادہ بار قطع کرتی ہے۔

شکل 7.2: تفاعل f کا الٹ ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا ہو۔

الٹ

چونکہ ایک ایک تفاعل کا ہر مخارج انفرادی مداخل سے آتا ہے لہٰذا ایک ایک تفاعل کو الٹ کرتے ہوئے ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ مخارج حاصل ہوتا ہے (شکل 7.2)۔ ایک ایک تفاعل f کو الٹ کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا **الٹ**[4] کہتے ہیں جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f(x)^{-1}$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں ہے۔ ہم f^{-1} کو "f کا الٹ" پڑھتے ہیں۔

جیسا شکل 7.2 سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لئے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا الٹ $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جو x ہو گا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لئے مختص کرتا ہو **شناختی تفاعل**[5] کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا الٹ تفاعل ہونے کے لئے پرکھا جا سکتا ہے۔ اگر $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = x$ ہو تب f اور g ایک دوسرے کے الٹ تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے الٹ تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت f کا الٹ ہو گا اگر g جذر الکعب لیتا ہو ورنہ یہ f کا الٹ نہیں ہو گا۔

تفاعل f اور g ایک دوسرے کے الٹ صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

ایک تفاعل کا الٹ صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ ایک ایک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا الٹ تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی الٹ تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہٰذا ان کا الٹ ہو گا (صفحہ 345 پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 4.3)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہٰذا ان کا الٹ ہو گا۔

الٹ کی تلاش

تفاعل کے الٹ کی ترسیم کا تفاعل کے ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل کی طرح بڑھتا ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لئے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لئے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو الٹ کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں۔

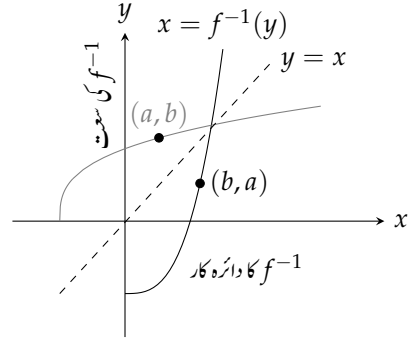
تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخل مخارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا $45°$ کی لکیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتصابی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(c)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل 7.3 میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھانا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

---

[3] one to one function
[4] inverse
[5] identity function

(ا) نقطہ x پر f کی قیمت جاننے کے لئے ہم x سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور y تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔

(ب) تفاعل f کی ترسیم کو f^{-1} کی ترسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔ وہ x جو y دیتا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم y سے افقی رخ ترسیم تک اور پھر انتصابی رخ محور x تک پہنچ کر درکار x پڑھتے ہیں۔ f کا دائرہ کار f^{-1} کی سعت ہو گی جبکہ f کی سعت f^{-1} کا دائرہ کار ہو گا۔

(ج) تفاعل f^{-1} کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم f کا لکیر $y = x$ میں عکس لیتے ہیں۔

(د) آخر میں ہم حرف x اور حرف y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر x کے تفاعل f^{-1} کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

شکل 7.3: تفاعل f کے الٹ f^{-1} کی ترسیم۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔

مثال 7.3: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

حل: قدم ا: x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2 \end{aligned}$$

قدم ب: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا الٹ تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہو گا۔

اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

□

مثال 7.4: تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

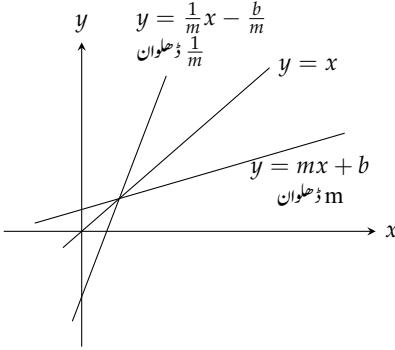
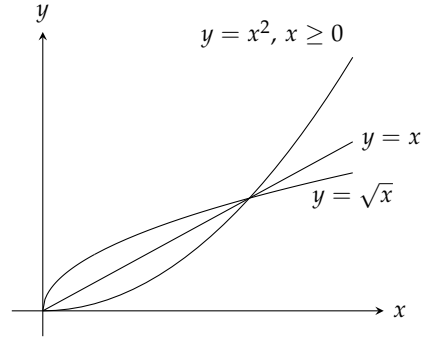
حل: قدم ا: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{x^2} = |x| = x \end{aligned}$$

$x \geq 0$ کی بنا $|x| = x$ ہو گا

قدم ب: جزو-ا میں حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

یوں تفاعل $y = x^2, x \geq 0$ کا الٹ $y = \sqrt{x}$ ہو گا (شکل 7.4)۔

شکل 7.4: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2,\ x \geq 0$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں (مثال 7.4)۔

شکل 7.5: لکیر $y = x$ میں منعکس غیر انتصابی لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

یہاں دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$ ایک ایک تفاعل ہے لہٰذا اس کا الٹ پایا جاتا ہے جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل ہے جو ایک ایک تفاعل نہیں ہے لہٰذا اس کا الٹ نہیں پایا جاتا ہے۔ □

کمپیوٹر کا استعمال

تفاعل $y = f(x)$ کا الٹ تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جا سکتا ہے۔

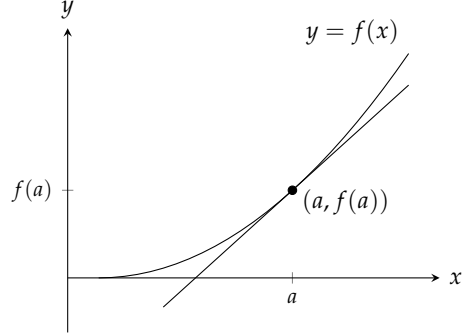
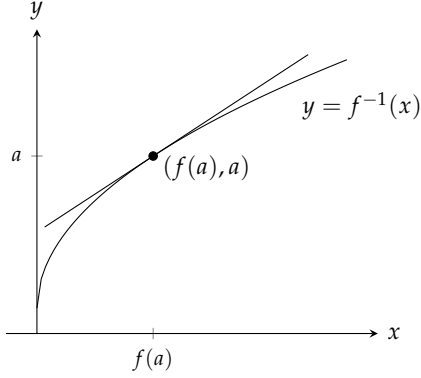
$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$

آپ تفاعل اور تفاعل کے الٹ کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں:

$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t) \qquad \text{تفاعل}$$
$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t \qquad \text{تفاعل کا الٹ}$$

اس سے بھی زیادہ بہتر ہو گا کہ تفاعل، تفاعل کا الٹ اور شناختی تفاعل $y = x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t \qquad \text{شناختی تفاعل}$$

تفاعل $y = \frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y = x + \cos x$ کے ساتھ ان کے الٹ تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں x اور y محور کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تا کہ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا الٹ تشاکلی نظر آئیں۔

شکل 7.6: الٹ تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کا بالعکس متناسب $\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a}$ ہو گا۔

قابل تفرق تفاعل کے الٹ کے تفرق

تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (مثال 7.3) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x - 2) = 2$$

یہ تفرقات ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم لکیر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم لکیر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے بالعکس متناسب ہیں (شکل 7.5)۔

یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لئے نہیں ہے۔ لکیر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتصابی لکیر کے عکس کا ڈھلوان اس لکیر کے ڈھلوان کے بالعکس متناسب ہو گا۔ یوں اگر دیے گئے لکیر کا ڈھلوان $m \neq 0$ (شکل 7.5) ہو تب منعکس لکیر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا (سوال 7.36)۔

تفاعل اور اس کے الٹ کے ڈھلوانوں کا بالعکس متناسب تعلق دیگر تفاعل کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا (شکل 7.6)۔ یوں نقطہ $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق، نقطہ a پر f کے تفرق کا بالعکس متناسب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتے ہیں۔

مسئلہ 7.1: **الٹ تفاعل کے تفرق کا قاعدہ**

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہو اور I پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ $f(I)$ کے ہر نقطہ پر f^{-1} قابل تفرق

ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ $f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا تفرق نقطہ a پر تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کا بالعکس متناسب ہو گا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}} \tag{7.1}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \tag{7.2}$$

مثال 7.5: تفاعل $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ اور اس کے الٹ $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$

نقطہ $(4,2)$ لکیر $y = x$ کی دوسری طرف نقطہ $(2,4)$ کا عکس ہے (شکل 7.7)۔ ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x = 2(2) = 4 \qquad \text{نقطہ } (2,4) \text{ پر}$$

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\mathrm{d}x} \qquad \text{نقطہ } (4,2) \text{ پر}$$

□

بعض اوقات f^{-1} کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات 7.1 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جا سکتی ہیں۔

مثال 7.6: مان لیں $f(x) = x^3 - 2$ ہے۔ $f^{-1}(x)$ کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ $x = 6 = f(2)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: (شکل 7.8)

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12} \qquad \text{مساوات 7.1}$$

شکل 7.7: نقطہ $(4,2)$ پر $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کا تفرق نقطہ $(2,4)$ پر $f(x) = x^2$ کے تفرق کا بالعکس متناسب ہو گا (مثال 7.5)۔

شکل 7.8: نقطہ $x = 2$ پر $f(x) = x^3 - 2$ کا تفرق ہمیں نقطہ $x = 6$ پر f^{-1} کا تفرق دیتا ہے (مثال 7.6)۔

□

مسئلہ 7.1 کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اگر $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور ہم x کی قیمت میں معمولی تبدیلی $\mathrm{d}x$ لائیں تب y میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔اس کا مطلب ہے کہ y کی تبدیلی، x کی تبدیلی کے تقریباً $f'(a)$ گنّا ہو گی اور x کی تبدیلی، y کی تبدیلی کے تقریباً $\frac{1}{f'(a)}$ گنّا ہو گی۔

سوالات

ایک ایک تفاعل کی نشاندہی

سوال 7.1 تا سوال 7.6 میں تفاعل کے ترسیم دیے گئے ہیں۔ ان میں ایک ایک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

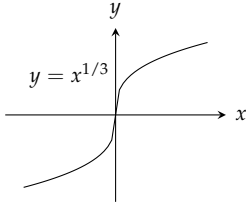
سوال 7.1: ترسیم شکل 7.9 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک

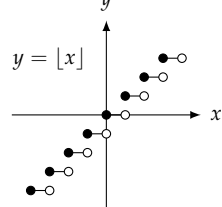
سوال 7.2: ترسیم شکل 7.10 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.3: ترسیم شکل 7.11 میں دی گئی ہے۔
جواب: غیر ایک ایک

شکل 7.9: ترسیم سوال 7.1

شکل 7.10: ترسیم سوال 7.2

شکل 7.11: ترسیم سوال 7.3

شکل 7.12: ترسیم سوال 7.4

شکل 7.13: ترسیم سوال 7.5

شکل 7.14: ترسیم سوال 7.6

سوال 7.4: ترسیم شکل 7.12 میں دی گئی ہے۔

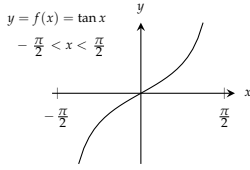
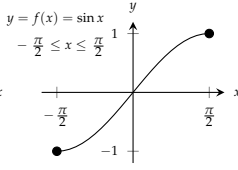
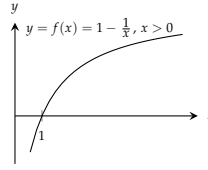
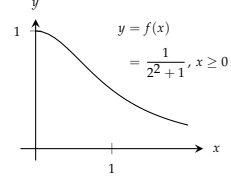
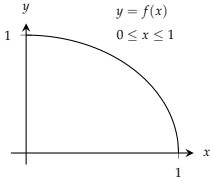
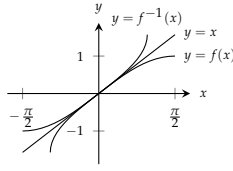
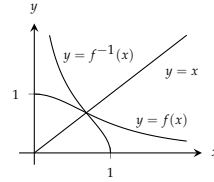
سوال 7.5: ترسیم شکل 7.13 میں دی گئی ہے۔
جواب: ایک ایک

سوال 7.6: ترسیم شکل 7.14 میں دی گئی ہے۔

الٹ تفاعل کی ترسیم

سوال 7.7 تا سوال 7.10 میں $y = f(x)$ کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر $y = x$ بھی بنائیں۔ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی استعمال کرتے ہوئے $y = f^{-1}(x)$ ترسیم کریں۔ (f^{-1} کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔) f^{-1} کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔

سوال 7.7: تفاعل کی ترسیم شکل 7.15 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $(0, 1]$ ، سعت $[0, \infty)$ ، شکل 7.19

سوال 7.8: تفاعل کی ترسیم شکل 7.16 میں دی گئی ہے۔

شکل 7.18: ترسیم سوال 7.10

شکل 7.17: ترسیم سوال 7.9

شکل 7.16: ترسیم سوال 7.8

شکل 7.15: ترسیم سوال 7.7

شکل 7.21: ترسیم جواب 7.11

شکل 7.20: ترسیم جواب 7.9

شکل 7.19: ترسیم جواب 7.7

سوال 7.9: تفاعل کی ترسیم شکل 7.17 میں دی گئی ہے۔
جواب: دائرہ کار $[-1, 1]$ ، سعت $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ، شکل 7.20

سوال 7.10: تفاعل کی ترسیم شکل 7.18 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.11: (ا) تفاعل $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le 1$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟
(ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔ (یاد رہے کہ $x \ge 0$ کی صورت میں $\sqrt{x^2} = x$ ہوتا ہے۔)
جواب: لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ شکل 7.21

سوال 7.12: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سی تشاکلی پائی جاتی ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی الٹ ہے۔

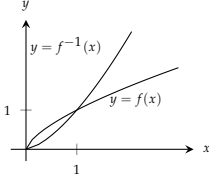
الٹے تفاعل کے کلیات

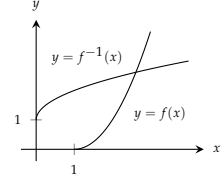
سوال 7.13 تا سوال 7.18 میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f اور f^{-1} کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔ f^{-1} کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 7.13: $f(x) = x^2 + 1, \quad x \ge 0$ ترسیم شکل 7.22 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

شکل 7.22: ترسیم سوال 7.13

شکل 7.23: ترسیم سوال 7.14

شکل 7.24: ترسیم سوال 7.15

شکل 7.25: ترسیم سوال 7.16

شکل 7.26: ترسیم سوال 7.17

شکل 7.27: ترسیم سوال 7.18

سوال 7.14: $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$ ترسیم شکل 7.23 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.15: $f(x) = x^3 - 1$ ترسیم شکل 7.24 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

سوال 7.16: $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$ ترسیم شکل 7.25 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.17: $f(x) = (x+1)^2, \quad x \geq -1$ ترسیم شکل 7.26 میں دی گئی ہے۔
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

سوال 7.18: $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل 7.27 میں دی گئی ہے۔

سوال 7.19 تا سوال 7.24 میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f^{-1} دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ ہے۔

سوال 7.19: $f(x) = x^5$
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ، سعت $-\infty < y < \infty$

سوال 7.20: $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

سوال 7.21: $f(x) = x^3 + 1$
جواب: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ، سعت $-\infty < y < \infty$

سوال 7.22: $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$

سوال 7.23: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$
جواب: $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ دائرہ کار $x > 0$ ، سعت $y > 0$

سوال 7.24: $f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$

الٹے تفاعل کے تفرق

سوال 7.25 تا سوال 7.28 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. $f^{-1}(x)$ تلاش کریں۔

ب. f اور f^{-1} کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. نقطہ $x = a$ پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور نقطہ $x = f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)}$ ہو گا۔

سوال 7.25: $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$
جواب: (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ ، (ب) شکل 7.28، (ج) $2, \frac{1}{2}$

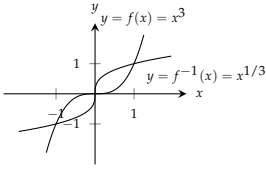
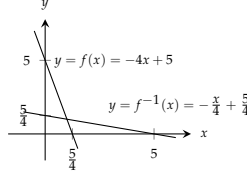
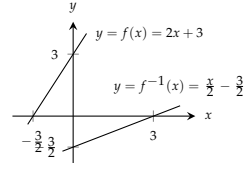
سوال 7.26: $f(x) = \frac{x}{5} + 7, \quad a = -1$

سوال 7.27: $f(x) = 5 - 4x, \quad a = \frac{1}{2}$
جواب: (ا) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$ ، (ب) شکل 7.29، (ج) $-4, -\frac{1}{4}$

سوال 7.28: $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

سوال 7.29:

1. دکھائیں کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2. f اور g ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(1, 1)$ اور $(-1, -1)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

شکل 7.28: ترسیم جواب 7.25

شکل 7.29: ترسیم جواب 7.27

شکل 7.30: ترسیم جواب 7.29

3. نقاط $(1,1)$ اور $(-1,-1)$ پر f اور g کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

جواب: (ب) شکل 7.30، (ج) $(1,1)$ پر f کی ڈھلوان 3 ہے؛ $(1,1)$ پر g کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے؛ $-1,-1$ پر f کی ڈھلوان 3 اور $(-1,-1)$ پر g ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ (د) $x = 0$ پر $y = x^3$ کا مماس $y = 0$ ہے؛ $x = 0$ پر $y = \sqrt[3]{x}$ کا مماس $x = 0$ ہے۔

سوال 7.30:

1. دکھائیں کہ $h(x) = \frac{x^3}{4}$ اور $k(x) = (4x)^{1/3}$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

2. h اور k ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ میں تشاکلی نظر آنی چاہیے۔

3. نقاط $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ پر h اور k کی ترسیمات کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

4. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال 7.31: مان لیں $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1,\ x \geq 2$ ہے۔ نقطہ $x = -1 = f(3)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: $\frac{1}{9}$

سوال 7.32: مان لیں $f(x) = x^2 - 4x - 5,\ x > 2$ ہے۔ نقطہ $x = 0 = f(5)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.33: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور f کی ترسیم نقطہ $(2,4)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ نقطہ $x = 4$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔
جواب: 3

سوال 7.34: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = g(x)$ کا الٹ پایا جاتا ہے اور g کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے جہاں اس کی ڈھلوان 2 ہے۔ مبدا پر g^{-1} کی ترسیم کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 7.35:

ا. تفاعل $f(x)=mx$ کا الٹ تلاش کریں جہاں m غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل $y=f(x)$ کی ترسیم مبدا سے گزرتی لکیر ہے جس کی ڈھلوان m غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

جواب: (ا) $f^{-1}(x)=\frac{x}{m}$، (ب) f^{-1} کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے اور اس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے۔

سوال 7.36: دکھائیں کہ $f(x)=mx+b$، جہاں m اور b مستقل ہیں اور $m\neq 0$ ہے، کا الٹ ایک لکیر ہے جس کی ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے اور جو محور y کو $-\frac{b}{m}$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال 7.37:

ا. تفاعل $f(x)=x+1$ کا الٹ تلاش کریں۔ f اور اس کا الٹ ایک ساتھ ترسیم کریں۔ لکیر $y=x$ کو بھی شامل کریں۔

ب. تفاعل $f(x)=x+b$ کا الٹ تلاش کریں جہاں b مستقل ہے۔ f^{-1} کی ترسیم کا f کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. لکیر $y=x$ کے متوازی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟

جواب: (ا) $f^{-1}(x)=x-1$، (ب) $f^{-1}(x)=x-b$، f^{-1} کی ترسیم f کی ترسیم کے متوازی ہے۔ f^{-1} اور f کی ترسیمات لکیر $y=x$ کے مخالف اطراف پر اور اس لکیر سے برابر فاصلہ پر ہیں۔ (ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے اور لکیر $y=x$ کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

سوال 7.38:

ا. تفاعل $f(x)=-x+1$ کا الٹ معلوم کریں۔ لکیر $y=-x+1$ اور لکیر $y=x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان لکیروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے۔

ب. تفاعل $f(x)=-x+b$ کا الٹ معلوم کریں جہاں b مستقل ہے۔ لکیر $y=-x+b$ اور لکیر $y=x$ کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. لکیر $y=x$ کے عمودی تفاعل کے الٹ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل

سوال 7.39: اگر وقفہ I میں کسی دو نقطوں x_1 اور x_2 پر

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب I پر تفاعل $f(x)$ بڑھتا ہو گا (حصہ 4.2)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں I پر $f(x)$ گھٹتا ہو گا۔

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تفاعل اور گھٹتے تفاعل ایک ایک تفاعل ہیں یعنی دکھائیں کہ I میں کسی بھی دو نقطوں x_1 اور x_2 کے لئے $x_2 \neq x_1$ سے مراد $f(x_2) \neq f(x_1)$ ہو گا۔

سوال 7.40 تا سوال 7.44 میں سوال 7.39 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے تفاعل کا اپنے وقفہ پر الٹ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 7.40: $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6}$

سوال 7.41: $f(x) = 27x^3$
جواب: بڑھتا، لہٰذا ایک ایک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{9}x^{-2/3}$

سوال 7.42: $f(x) = 1 - 8x^3$

سوال 7.43: $f(x) = (1-x)^3$
جواب: گھٹتا، لہٰذا ایک ایک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

سوال 7.44: $f(x) = x^{5/3}$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.45: اگر $f(x)$ ایک ایک ہو تب $g(x) = -f(x)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.46: اگر ایک ایک اور غیر صفر ہو تب $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.47: فرض کریں کہ g کی سعت، f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے لہٰذا مرکب تفاعل $f \circ g$ معین ہے۔ اگر f اور g ایک ایک ہوں تب $f \circ g$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.48: اگر مرکب تفاعل $f \circ g$ ایک ایک ہو تب کیا g لازماً ایک ایک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.49: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ مثبت، استمراری ور بڑھتا تفاعل ہے۔ ترسیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a)$$

سوال 7.50: مستقل a ، b ، c اور d پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تفاعل

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

کا الٹ ممکن بناتے ہیں۔

سوال 7.51: اگر ہم $f^{-1}(x)$ کی جگہ $g(x)$ لکھیں تب مساوات 7.1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \quad \implies g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں a کی جگہ x پر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدے کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں f اور g قابل تفرق اور ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہٰذا $(f \circ g)(x) = x$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے کر $(f \circ g)'(x)$ کو f اور g کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ 7.1 کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال 7.52: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات
فرض کریں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f قابل تفرق ہے جہاں $a > 0$ ہے اور f کا قابل تفرق الٹ f^{-1} پایا جاتا ہے۔ تفاعل f ، لکیر $x = a$ اور لکیر $y = f(b)$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ترکیب چھلا اور ترکیب خول اس جسم کے حجم کے کلیات ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right)\mathrm{d}y = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi\Big((f^{-1}(y))^2 - a^2\Big)\,\mathrm{d}y$$
$$K(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ پر $C(t)$ اور $K(t)$ کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور $[a, b]$ پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ 499 پر سوال 5.126 کے نتیجہ کے مطابق $[a, b]$ میں تمام t کے لئے $C(t) = K(t)$ ہو گا۔ بالخصوص $C(b) = K(b)$ ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.53 تا سوال 7.60 میں آپ چند تفاعل اور ان کے الٹ پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینی تفاعل غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ بتلائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر f ایک ایک ہے۔

ب. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لئے حل کر کے حاصل الٹ تفاعل کو g سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. لکیر $y = x$ کے دوسری جانب تشاکلی نقطہ $(f(x_0), x_0)$ پر g کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ 7.1 کی مدد سے اس مماسی لکیر کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ہ. تفاعل f ، g ، لکیر $y = x$ ، دونوں مماسی خط اور نقطہ $(x_0, f(x_0))$ اور $(f(x_0), x_0)$ کو جوڑنے والا سیدھا خط ترسیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

سوال 7.53: $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

سوال 7.54: $y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 7.55: $y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 7.56: $y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال 7.57: $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

سوال 7.58: $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

سوال 7.59: $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال 7.60: $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

سوال 7.61 اور سوال 7.62 میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل تفاعل کو حل کر کے $y = f(x)$ اور $x = f^{-1}(y)$ حاصل کریں۔

سوال 7.61: $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال 7.62: $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

7.2 قدرتی لوگارتھم

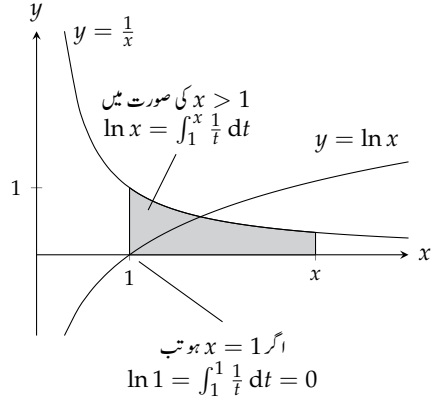
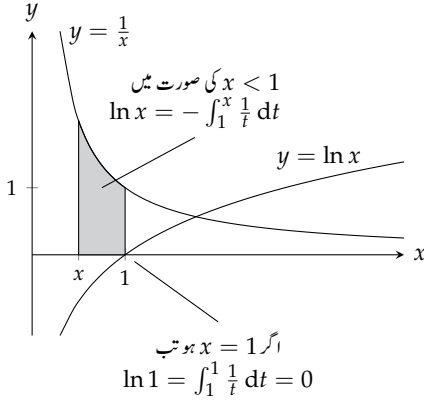
علم حساب اور سائنس میں اہم ترین تفاعل اور الٹ کی جوڑی قدرتی لوگارتھم $\ln x$ اور قوت نما تفاعل e^x کی جوڑی ہے۔ تفاعل e^x کی وضاحت $\ln x$ سے ہوتی ہے لہٰذا ہم پہلے $\ln x$ متعارف کرتے ہیں۔لوگارتھم نے پہلے علم حساب میں بہتری پیدا کی۔ لوگارتھم کی خوبیوں نے سترھویں صدی میں آفاقی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور راہ تلاش کرنا ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگارتھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔

قدرتی لوگارتھمی تفاعل

مثبت عدد x کے قدرتی لوگارتھم کو $\ln x$ لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل تکمل دیتا ہے۔

$$\ln x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0 \qquad \text{قدرتی لوگارتھمی تفاعل کی تعریف}$$

اگر $x > 1$ ہو تب $t = 1$ سے $t = x$ تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبہ $\ln x$ ہو گا (شکل 7.31)۔ اگر $0 < x < 1$ ہو تب x سے 1 تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبے کا منفی $\ln x$ ہو گا۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل وقفہ $x \le 0$ کے لئے غیر معین ہے۔ لوگارتھمی تفاعل کی تعریف سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{بالائی اور زیریں حد ایک جیسے ہیں}$$

شکل 7.31: تفاعل $x > 0$ ، $y = \frac{1}{x}$ اور قدرتی لوگارتھمی تفاعل $y = \ln x$ کا تعلق۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل $x > 1$ کے لئے مثبت اور $x < 1$ کے لئے منفی ہے۔

دھیان رہے کہ ہم شکل 7.31 میں $y = \frac{1}{x}$ ترسیم کرتے ہیں لیکن تکمل میں $y = \frac{1}{t}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو x لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

لکھا جائے گا جہاں x کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لئے ہم تکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے t لکھتے ہیں۔

x کی مختلف قیمتوں کے لئے تین اعشاریہ درست قدرتی لوگارتھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30

قدرتی لوگارتھمی تفاعل کا تفرق

احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ 5.3) سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا x کی ہر مثبت قیمت کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}$$

اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u کی قیمتیں مثبت ہوں، تا کہ $\ln u$ معین ہو، تب تفاعل $y = \ln u$ پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کی اطلاق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ملتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 0 \tag{7.3}$$

مثال 7.7:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

□

آپ نے مثال 7.7 میں دیکھا کہ تفاعل $y = \ln 2x$ کا تفرق وہی ہے جو تفاعل $y = \ln x$ کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل $y = \ln ax$ کے لئے درست ہے جہاں a کوئی عدد ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax) = \frac{1}{ax}(ax) = \frac{1}{x} \tag{7.4}$$

مثال 7.8: اگر مساوات 7.3 میں $u = x^2 + 3$ پر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

□

جدول 7.1: خواص قدرتی لوگارتھم

	کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لئے۔	
الف	قاعدہ ضرب	$\ln ax = \ln a + \ln x$
ب	قاعدہ حاصل تقسیم	$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ج	قاعدہ بالعکس متناسب	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
د	قاعدہ طاقت	$\ln x^n = n \ln x$

خواص لوگارتھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے علم حساب میں سب سے زیادہ بہتری لوگارتھم کے سر ہے[6]۔ لوگارتھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں بہتری پیدا ہوئی جدول 7.1 میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی بنا مثبت اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزو د میں طاقت n کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزو د کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

مثال 7.9:

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \qquad \text{بالعکس متناسب}$$

$$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 \qquad \text{طاقت}$$

□

مثال 7.10:

$$\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \sin x) \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3) \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x \qquad \text{بالعکس متناسب}$$

$$\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) \qquad \text{طاقت}$$

[6] اسکاچی ریاضی دان جان نیپر نے سولہویں صدی میں لوگارتھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری بیس برس لوگارتھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

□

ثبوت: برائے $\ln ax = \ln a + \ln x$
اس کا دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\ln ax$ کا تفرق اور $\ln x$ کا تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں (مساوات 7.4)۔ مسئلہ اوسط قیمت کے ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ 4.2) کہتا ہے کہ ان تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا:

$$\ln ax = \ln x + C \qquad C \text{ مستقل} \tag{7.5}$$

اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ C اور $\ln a$ ایک دوسرے کے برابر ہیں۔

مساوات 7.5 x کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے درست ہے لہٰذا یہ $x = 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a && \text{ترتیب دی گئی ہے} \end{aligned}$$

مساوات 7.5 میں $C = \ln a$ پر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\ln ax = \ln a + \ln x \tag{7.6}$$

□

ثبوت: برائے $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ہم مساوات 7.6 کو دو بار استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات 7.6 میں a کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے لہٰذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

ہو گا۔ مساوات 7.6 میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{x} &= \ln \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x \end{aligned}$$

ملتا ہے۔

□

ثبوت: برائے $\ln x^n = n\ln x$ جہاں n ناطق ہے
تمام مثبت x قیمتوں کے لئے درج ذیل ہو گا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقتی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لئے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x^n &= \frac{1}{x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) && \text{مساوات 7.3 میں } u = x^n \\ &= \frac{1}{x^n}nx^{n-1} && \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے} \\ &= n\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n\ln x)\end{aligned}$$

چونکہ $\ln x^n$ اور $n\ln x$ کے تفرق ایک دوسرے کے برابر ہیں لہٰذا

$$\ln x^n = n\ln x + C \qquad C \text{ مستقل}$$

ہو گا جس میں $x = 1$ پر کرنے سے $C = 0$ ملتا ہے۔

□

اگرچہ ہم نے غیر ناطق n کے لئے قاعدہ $\ln x^n = n\ln x$ ثابت نہیں کیا ہے، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لئے بھی درست ہے لہٰذا اس کو بغیر فکر استعمال کریں۔

$\ln x$ کی ترسیم اور سعت

چونکہ $x > 0$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ہے لہٰذا $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ اس کا دورتی تفرق، $-\frac{1}{x^2}$ ، منفی ہے لہٰذا $\ln x$ کی ترسیم نیچے مقعر ہے۔

اعدادی تراکیب سے $\ln 2$ کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{n}{2}$$

اور

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\frac{n}{2}$$

ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

$\ln x$ کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے جبکہ $\ln x$ کی سعت پوری حقیقی لکیر ہے۔

لوگارتھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور طاقت پر مبنی مثبت تفاعل کا تفرق لینے سے پہلے تفاعل کا لوگارتھم لینا سودمند ثابت ہوتا ہے۔ لوگارتھم لیتے ہوئے ہم جدول 7.1 کے قواعد استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **لوگارتھمی تفرق**[7] کہتے ہیں۔

مثال 7.11: تفاعل $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}, \; x > 1$ کے لئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لے کر جدول 7.1 کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\
&= \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
&= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت}
\end{aligned}$$

اب ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (بائیں ہاتھ مساوات 7.3 استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو $\frac{dy}{dx}$ کے لئے حل کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

آخر میں ہم y کی قیمت پر کرتے ہیں:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

□

[7] logarithmic differentiation

تفاعل $y = f(x) > 0$ کا لوگارتھمی تفرق

کسی بھی تفاعل کا لوگارتھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln f(x) && \text{دونوں اطراف لوگارتھم لیں}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \text{دونوں اطراف تفرق لیں}\\
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \text{بائیں ہاتھ مساوات 7.3}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ \text{کے لئے حل کریں}\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x)) && y = f(x)\ \text{پر کریں}
\end{aligned}$$

تکمل $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$

مساوات 7.3 سے تکمل کا کلیہ

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C \qquad C\ \text{مستقل} \tag{7.7}$$

ملتا ہے جہاں u مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی u کی صورت میں کیا ہو گا؟ اگر u منفی ہو تب $-u$ مثبت ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{(-u)}\,\mathrm{d}(-u)\\
&= \ln(-u) + C \qquad \text{مساوات 7.7 میں } u \text{ کی جگہ } -u
\end{aligned}\tag{7.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.7 اور مساوات 7.8 میں دائیں ہاتھ کو $\ln|x| + C$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C \tag{7.9}$$

میں ضم کیا جا سکتا ہے جہاں u غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

اور $n = -1$ کے لئے مساوات 7.9 کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

مساوات 7.9 کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

جہاں $f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

مثال 7.12:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_{-5}^{-1} && u = x^2-5\\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5\end{aligned}$$

□

مثال 7.13:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^5 \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u && u = 3+2\sin\theta\\ &= 2\ln|u|\Big|_1^5\\ &= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5\end{aligned}$$

□

$\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل

ہمیں مساوات 7.9 کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کا تکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجنٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}u}{u} && u = \cos x\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C && \text{7.9 مساوات}\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C && \text{قاعدہ بالعکس متناسب}\\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

کوٹینجنٹ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} && u = \sin x\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\int \tan u \,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$
$$\int \cot u \,\mathrm{d}u = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc x| + C$$

مثال 7.14:

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \,\mathrm{d}u \qquad u = 2x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

□

سوالات

لوگارتھم کے خواص

سوال 7.63: مندرجہ ذیل کو $\ln 2$ اور $\ln 3$ کی صورت میں لکھیں۔

ا. $\ln 0.75$ ب. $\ln(4/9)$ ج. $\ln(1/2)$ د. $\ln \sqrt[3]{9}$ ھ. $\ln 3\sqrt{2}$ و. $\ln \sqrt{13.5}$

جواب: (ا) $\ln 3 - 2\ln 2$ ، (ب) $2(\ln 2 - \ln 3)$ ، (ج) $-\ln 2$ ، (د) $\frac{2}{3}\ln 3$ ، (ھ) $\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$ ، (و) $\frac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

سوال 7.64: مندرجہ ذیل کو $\ln 5$ اور $\ln 7$ کی صورت میں لکھیں۔

ا. $\ln(1/125)$ ب. $\ln 9.8$ ج. $\ln 7\sqrt{7}$ د. $\ln 1225$ ھ. $\ln 0.056$ و. $\frac{\ln 35 + \ln(1/7)}{\ln 25}$

سوال 7.65 اور سوال 7.66 میں خواص لوگارتھم کی مدد سے دیے گئے ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 7.65:

ا. $\ln \sin\theta - \ln\left(\frac{\sin\theta}{5}\right)$ ب. $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$ ج. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

جواب: (ا) $\ln 5$ ، (ب) $\ln(x-3)$ ، (ج) $\ln(t^2)$

سوال 7.66:

ا. $\ln\sec\theta + \ln\cos\theta$ ج. $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

ب. $\ln(8x+4) - 2\ln 2$

لوگارتھم کے تفرق

سوال 7.67 تا سوال 7.98 میں x ، t یا θ کے لحاظ سے y کا تفرق لیں۔

سوال 7.67: $y = \ln 3x$
جواب: $\frac{1}{x}$

سوال 7.68: $y = \ln kx,\quad k$ مستقل

سوال 7.69: $y = \ln(t^2)$
جواب: $\frac{2}{t}$

سوال 7.70: $y = \ln(t^{3/2})$

سوال 7.71: $y = \ln\frac{3}{x}$
جواب: $-\frac{1}{x}$

سوال 7.72: $y = \ln\frac{10}{x}$

سوال 7.73: $y = \ln(\theta+1)$
جواب: $\frac{1}{\theta+1}$

سوال 7.74: $y = \ln(2\theta+2)$

سوال 7.75: $y = \ln x^3$
جواب: $\frac{3}{x}$

سوال 7.76: $y = (\ln x)^3$

سوال 7.77: $y=t(\ln t)^2$
جواب: $2\ln t+(\ln t)^2$

سوال 7.78: $y=t\sqrt{\ln t}$

سوال 7.79: $y=\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}$
جواب: $x^3\ln x$

سوال 7.80: $y=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$

سوال 7.81: $y=\frac{\ln t}{t}$
جواب: $\frac{1-\ln t}{t^2}$

سوال 7.82: $y=\frac{1+\ln t}{t}$

سوال 7.83: $y=\frac{\ln x}{1+\ln x}$
جواب: $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

سوال 7.84: $y=\frac{x\ln x}{1+\ln x}$

سوال 7.85: $y=\ln(\ln x)$
جواب: $\frac{1}{x\ln x}$

سوال 7.86: $y=\ln(\ln(\ln x))$

سوال 7.87: $y=\theta(\sin(\ln\theta))+\cos(\ln\theta)$
جواب: $2\cos(\ln\theta)$

سوال 7.88: $y=\ln(\sec\theta+\tan\theta)$

سوال 7.89: $y=\ln\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$
جواب: $-\frac{3x+2}{2x(x+1)}$

سوال 7.90: $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

سوال 7.91: $y=\frac{1+\ln t}{1-\ln t}$
جواب: $\frac{2}{t(1-\ln t)^2}$

سوال 7.92: $y = \sqrt{\ln\sqrt{t}}$

سوال 7.93: $y = \ln(\sec(\ln\theta))$
جواب: $\frac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

سوال 7.94: $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1+2\ln\theta}\right)$

سوال 7.95: $y = \ln\left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}}\right)$
جواب: $\frac{10x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1-x)}$

سوال 7.96: $y = \ln\sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

سوال 7.97: $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $2x\ln|x| - x\ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

سوال 7.98: $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,\mathrm{d}t$

لوگارتھمی تفرق

سوال 7.99 تا سوال 7.112 میں لوگارتھمی تفرق استعمال کرتے ہوئے y کا دیے گئے غیر قابو متغیر کے لحاظ سے تفرق لیں۔

سوال 7.99: $y = \sqrt{x(x+1)}$
جواب: $\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

سوال 7.100: $y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

سوال 7.101: $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$
جواب: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{t+1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)^{3/2}}$

سوال 7.102: $y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$

سوال 7.103: $y=\sqrt{\theta+3}\sin\theta$

جواب: $\sqrt{\theta+3}(\sin\theta)\left(\frac{1}{2(\theta+3)}+\cot\theta\right)$

سوال 7.104: $y=(\tan\theta)\sqrt{2\theta+1}$

سوال 7.105: $y=t(t+1)(t+2)$

جواب: $t(t+1)(t+2)[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}]=3t^2+6t+2$

سوال 7.106: $y=\frac{1}{t(t+1)(t+2)}$

سوال 7.107: $y=\frac{\theta+5}{\theta\cos\theta}$

جواب: $\frac{\theta+5}{\theta\cos\theta}[\frac{1}{\theta+5}-\frac{1}{\theta}+\tan\theta]$

سوال 7.108: $y=\frac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

سوال 7.109: $y=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

جواب: $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{3(x+1)}]$

سوال 7.110: $y=\sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

سوال 7.111: $y=\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$

جواب: $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

سوال 7.112: $y=\sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

تکمل

سوال 7.113 تا سوال 7.130 میں تکمل حل کریں۔

سوال 7.113: $\int_{-3}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$

جواب: $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

سوال 7.114: $\int_{-1}^{0}\frac{3\,\mathrm{d}x}{3x-2}$

سوال 7.115: $\int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2-25}$

جواب: $\ln\left|y^2-25\right|+C$

سوال 7.116: $\int \frac{8r\,\mathrm{d}r}{4r^2-5}$

سوال 7.117: $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,\mathrm{d}t$

جواب: $\ln 3$

سوال 7.118: $\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 7.119: $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

جواب: $(\ln 2)^2$

سوال 7.120: $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

سوال 7.121: $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$

جواب: $\frac{1}{\ln 4}$

سوال 7.122: $\int_2^{16} \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}$

سوال 7.123: $\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t}\,\mathrm{d}t$

جواب: $\ln|6+3\tan t|+C$

سوال 7.124: $\int \frac{\sec y\tan y}{2+\sec y}\,\mathrm{d}y$

سوال 7.125: $\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

جواب: $\ln 2$

سوال 7.126: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,\mathrm{d}t$

سوال 7.127: $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta$

جواب: $\ln 27$

سوال 7.128: $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x\,\mathrm{d}x$

سوال 7.129: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+2x}$

جواب: $\ln(1+\sqrt{x})+C$

سوال 7.130: $\int \frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.131: درج ذیل کے مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\ln(\cos x), \quad [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ب. $\cos(\ln x), \quad [\frac{1}{2}, 2]$

جواب: (ا) $x = 0$ پر بلند تر 0 اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر کم تر $-\ln 2$ ؛(ب) $x = 1$ پر بلند تر 1 اور $x = \frac{1}{2}$ پر کم تر $\cos(\ln 2)$

سوال 7.132: (ا) ثابت کریں کہ $x > 1$ کے لئے $f(x) = x - \ln x$ بڑھتا ہے۔(ب) $x > 1$ کی صورت میں جزو-ا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\ln x < x$ ہو گا۔

سوال 7.133: منحنی $y = \ln x$ اور $y = \ln 2x$ کے بیچ $x = 1$ تا $x = 5$ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\ln 16$

سوال 7.134: منحنی $y = \tan x$ اور محور x کے بیچ $x = -\frac{\pi}{4}$ تا $x = \frac{\pi}{3}$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.135: ربع اول میں محددی لکیروں، منحنی $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$ اور لکیر $y = 3$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $4\pi \ln 4$

سوال 7.136: منحنی $y = \sqrt{\cot x}$ اور محور x پر $x = \frac{\pi}{6}$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 7.137: منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور محور x پر $x = \frac{1}{2}$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $\pi \ln 16$

سوال 7.138: منحنی $y = \frac{9x}{\sqrt{x^3+9}}$ اور محور x پر $x = 0$ تا $x = 3$ کے بیچ خطہ کو صفحہ 662 پر سوال 6.125 میں محور y کے گرد گھما کر 36π حجم کا جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اگر اس خطہ کو محور x کے گرد گھمایا کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب اس جسم کا حجم کتنا ہو گا؟

سوال 7.139: درج ذیل منحنیات کی لمبائی تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$ ب. $x = (\frac{y}{4})^2 - 2\ln(\frac{y}{4}), \quad 4 \le y \le 12$

جواب: (ا) $6 + \ln 2$ ، (ب) $8 + \ln 9$

سوال 7.140: ایک منحنی کی $x = 1$ تا $x = 2$ لمبائی درج ذیل ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, \mathrm{d}x$$

سوال 7.141: (ا) منحنی $y = \frac{1}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز دو اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔ (ب) خطے کا خاکہ بنا کر وسطانی مرکز دکھائیں۔
جواب: (ا) $\bar{x} \approx 1.44, \bar{y} \approx 0.36$

سوال 7.142: (ا) ایک پتلی چادر جس کی کثافت مستقل ہے منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $16 =$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (ب) اگر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ہو تب اس کی کمیت کا مرکز کیا ہو گا؟

سوال 7.143 اور سوال 7.144 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل کو حل کریں۔

سوال 7.143: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$
جواب: $y = x + \ln|x| + 2$

سوال 7.144: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

سوال 7.145: نقطہ $x = 0$ پر $\ln(1 + x)$ کی خط بندی کی خاطر $x = 1$ کے قریب x کی تخمین کی بجائے ہم $x = 0$ کے قریب $\ln(1 + x)$ کی تخمین لیتے ہیں۔اس طرح نسبتاً سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔ (ا) نقطہ $x = 0$ کے قریب $\ln(1 + x) \approx x$ کی خط بندی کریں۔ (ب) وقفہ $[0, 0.1]$ پر $\ln(1 + x)$ کی بجائے x استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ تک تلاش کریں۔ (ج) منحنی $y = \ln(1 + x)$ اور $y = x$ کو ایک ساتھ وقفہ $[0, 0.5]$ پر ترسیم کریں۔ کس نقطہ پر خط بندی بہتر سے بہتر ہے؟ خراب سے خراب ہے؟ ترسیم سے زیادہ سے زیادہ خلل پڑھ کر تلاش کریں۔
جواب: (ب) 0.00469

سوال 7.146: اگرچہ لوگارتھمی تفاعل کی خط بندی سے چھوٹے وقفہ پر بہترین نتائج حاصل ہوتے ہیں، قاعدہ سمسن کسی مخصوص $\ln x$ کی زیادہ بہتر قیمت دیتا ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر $\ln(1.2)$ اور $\ln(0.8)$ کی 5 اعشاریہ قیمتیں بالترتیب 0.18232 اور -0.22314 ہیں۔ ان قیمتوں کہ پہلے کلیہ $\ln(1 + x) \approx x$ اور اور بعد میں $n = 2$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ (نتائج حیرت کن حد تک درست ہیں!)

سوال 7.147: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔
جواب: 2

سوال 7.148: کیا ہر نقطہ پر $y = \ln 3x$ اور $y = \ln 3x$ کے تفرق برابر ہو سکتے ہیں۔ (تفرق لے کر دیکھیں۔) تفاعل $y = \ln kx$ جہاں k مثبت مستقل ہے کے لئے کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.149: تفاعل $\ln x$ ، $\ln 2x$ ، $\ln 4x$ ، $\ln 8x$ اور $\ln 16x$ کو $0 < x \le 10$ کے لئے ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟ وجہ بیان کریں۔

سوال 7.150: تفاعل $y = \ln|\sin x|$ کو ترسیم کر کے کمپیوٹر کے شیشہ پر $0 \le x \le 22$ اور $-2 \le y \le 0$ کے بیچ نتائج دیکھیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔ ترسیم کو الٹا کرنے کے لئے تفاعل میں کیا تبدیلی کرنی ہو گی؟

سوال 7.151: (ا) تفاعل $y = \sin x$ اور $y = \ln(a + \sin x)$ کو $a = 2, 4, 8, 20, 50$ کے لئے ایک ساتھ $0 \le x \le 23$ پر ترسیم کریں۔ (ب) a کی قیمت بڑھنے سے ترسیمات افقی صورت کیوں اختیار کرتے ہیں؟ (اشارہ۔ a کے لحاظ سے $|y'|$ کی بالائی حد تلاش کریں۔)

سوال 7.152: کیا $y = \sqrt{x} - \ln x,\ x > 0$ کا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ اس کا جواب (ا) ترسیم اور (ب) احصاء سے دیں۔

7.3 قوت نمائی تفاعل

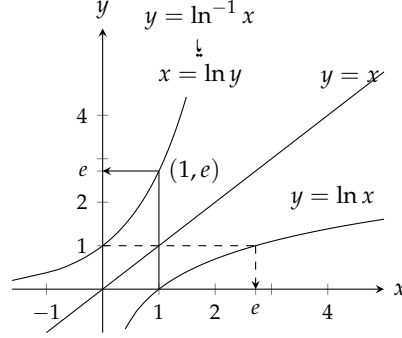
اگر وقت کے لحاظ سے کسی مقدار y میں تبدیلی اس کی موجودہ قیمت y کے راست متناسب ہو تب یہ مقدار ایسا تفاعل ہو گا جو درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky \qquad\qquad k \text{ مستقل}$$

اگر لمحہ $t = 0$ پر $y = y_0$ ہو تب یہ قوت نمائی تفاعل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ اس حصہ میں قوت نمائی تفاعل کی تعریف (یہ $\ln x$ کا الٹ ہے) پیش کی جائے گی اور ان خواص پر غور کیا جائے گا جن کی بدولت قوت نمائی تفاعل ریاضیات اور استعمال میں کثرت سے پایا جاتا ہے (حصہ 7.5)۔

$\ln x$ کا الٹ اور عدد e

تفاعل $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ $\ln x$ کا دائرہ کار $(0, \infty)$ اور سعت $(-\infty, \infty)$ ہے جبکہ اس کا الٹ $\ln^{-1} x$ ہے جس کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ اور سعت $(0, \infty)$ ہے۔ لکیر $y = x$ میں $\ln x$ کا عکس تفاعل $\ln^{-1} x$ کی ترسیم دیتی ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل $\ln^{-1} x$ کے لئے

$$\lim_{x \to \infty} \ln^{-1} x = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} \ln^{-1} x = 0$$

شکل 7.32: تفاعل $y \ln x$ اور تفاعل $y = \ln^{-1} x$۔ عدد e سے مراد $\ln^{-1} 1$ ہے۔

ہو گا۔ عدد $\ln^{-1} 1$ کو حرف e سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل 7.32)۔

$$e = \ln^{-1} 1 \qquad \text{تعریف}$$

اگرچہ e ناطق عدد نہیں ہے، ہم باب میں دیکھیں گے کہ درج ذیل کلیہ سے، کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے، ہم جتنے اعشاریہ تک اس کی قیمت چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

15 اعشاریہ تک e کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045$$

تفاعل $y = e^x$

کسی بھی مثبت عدد کی طرح ہم عدد e کو x کی ناطق طاقت تک بڑھا سکتا ہیں:

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$

چونکہ e مثبت ہے لہٰذا e^x بھی مثبت ہو گا اور یوں e^x کا لوگارتھم بھی پایا جائے گا:

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x \tag{7.10}$$

چونکہ $\ln x$ ایک ایک ہے اور $\ln(\ln^{-1} x) = x$ ہے لہٰذا مساوات 7.10 کے تحت

$$e^x = \ln^{-1} x \qquad x \text{ ناطق} \tag{7.11}$$

ہو گا۔مساوات 7.11 کی مدد سے e^x کی تعریف کو وسعت دے کر غیر ناطق x کو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $\ln^{-1} x$ معین ہے لہٰذا ہم اس کو استعمال کرتے ہوئے e^x کو ان نقطوں پر بھی قیمت مختص کر سکتے ہیں جہاں پہلے e^x کی کوئی قیمت نہیں پائی جاتی تھی۔ اس طرح قوت نمائی تفاعل کی عالمگیر تعریف درج ذیل ہو گی۔

تعریف: e^x

$$e^x = \ln^{-1} x, \qquad \text{ہر حقیقی عدد } x \text{ کے لئے}$$

□

ایسی مساواتیں جن میں $\ln x$ اور e^x موجود ہوں

چونکہ $\ln x$ اور e^x ایک دوسرے کے الٹ ہیں لہٰذا ان کی الٹ مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{تمام } x > 0 \tag{7.12}$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \text{تمام } x \tag{7.13}$$

ہو گا۔اگلی مثال کے کچھ حصوں کو کیلکولیٹر سے حل کریں۔

مثال 7.15:

ا. $\ln e^2 = 2$,

ب. $\ln e^{-1} = -1$,

ج. $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$,

د. $\ln e^{\sin x} = \sin x$,

ھ. $e^{\ln 2} = 2$,

و. $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$,

ز. $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ ایک طریقہ

ح. $e^{3\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ دوسرا طریقہ

□

مثال 7.16: مساوات $\ln y = 3t + 5$ میں y تلاش کریں۔

جدول 7.2: قواعد برائے e^x کے قوت نما

تمام اعداد x_1 اور x_2 کے لئے	
ا	$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
ب	$e^{-1} = \frac{1}{e^x}$
ج	$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
د	$(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$

حل: دونوں اطراف کا قوت نما لیتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
e^{\ln y} &= e^{3t+5} \\
y &= e^{3t+5} && \text{مساوات 7.12}
\end{aligned}
$$

□

مثال 7.17: اگر $e^{2k} = 10$ تب k کتنا ہو گا؟

حل: دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لیتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
e^{2k} &= 10 \\
\ln e^{2k} &= \ln 10 \\
2k &= \ln 10 && \text{مساوات 7.13} \\
k &= \frac{1}{2}\ln 10
\end{aligned}
$$

□

قواعد قوت نما

اگرچہ e^x کی تعریف $\ln^{-1} x$ پر منحصر ہے، یہ الجبرا کے قواعد (جدول 7.2) برائے قوت نما کو مطمئن کرتا ہے۔

ثبوت: **برائے قاعدہ-ا** اگر ذیل ذیل

$$y_1 = e^{x_1}, \quad y_2 = e^{x_2}$$

ہوں تب مساوات کے دونوں اطراف کے لوگارتھم لیتے ہوئے

$$x_1 = \ln y_1$$
$$x_2 = \ln y_2$$

ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\ &= \ln y_1 y_2 && \text{قاعدہ ضرب} \\ e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{قوت نما} \\ &= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \end{aligned}$$

□

قاعدہ-د کا ثبوت بھی اس سے ملتا جلتا ہے۔ قواعد-ب اور ج کو قاعدہ-ا سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 7.230)۔

مثال 7.18:

$$\begin{aligned} e^{x+\ln 2} &= e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x && \text{قاعدہ-ا} \\ e^{-\ln x} &= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} && \text{قاعدہ-ب} \\ \frac{e^{2x}}{e} &= e^{2x-1} && \text{قاعدہ-ج} \\ (e^3)^x &= e^{3x} = (e^x)^3 && \text{قاعدہ-د} \end{aligned}$$

□

e^x کا تفرق اور تکمل

قوت نمائی تفاعل ایک ایسے قابل تفرق تفاعل کا الٹ ہے جس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہوتا ہے لہٰذا قوت نمائی تفاعل بھی قابل تفرق ہو گا۔ $y = e^x$ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
y &= e^x \\
\ln y &= x && \text{دونوں اطراف لوگارتھم} \\
\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{دونوں اطراف } x \text{ کے لحاظ سے تفرق} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^x && y \text{ کی جگہ } e^x
\end{aligned}
$$

یوں ثابت ہوتا ہے کہ e^x کا تفرق ازخود e^x ہے۔

ہم حصہ 7.5 میں دیکھیں گے کہ یہ خاصیت صرف e^x کے مستقل مضرب تفاعل رکھتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{7.14}$$

مثال 7.19:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5e^x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = 5e^x$$

□

زنجیری قاعدہ مساوات 7.14 کو وسعت دے کر عمومی روپ دیتا ہے۔ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{7.15}$$

مثال 7.20:

(ا) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x} = e^{-x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ مساوات 7.15 میں $u = -x$

(ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$ مساوات 7.15 میں $u = \sin x$

□

مساوات 7.15 کا تکملی مساوی درج ذیل ہے جہاں C مستقل ہے۔

$$\int e^u \,\mathrm{d}u = e^u + C$$

مثال 7.21:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} e^{3x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u && u = 3x\\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\ln 8} e^u\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{3}e^u\Big|_0^{\ln 8}\\
&= \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

□

مثال 7.22:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x &= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} && \text{مثال } 7.20\\
&= e^1 - e^0 = e - 1
\end{aligned}$$

□

مثال 7.23: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad x > \sqrt{3}, \quad y(2) = 0$$

حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$e^y = x^2 + C$$

ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C &= e^0 - (2)^2 \\ &= 1 - 4 = -3 \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$e^y = x^2 - 3 \tag{7.16}$$

y تلاش کرنے کی خاطر ہم دونوں اطراف کا لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln(x^2 - 3) \\ y &= \ln(x^2 - 3) \end{aligned} \tag{7.17}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $x > \sqrt{3}$ کے لئے حل درست ہے۔

تفرقی مساوات میں حل کو پر کر کے تصدیق کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مساوات 7.16 اور مساوات 7.17 کو تفرقی مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - 3) \\ &= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= (x^2 - 3)\frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= 2x \end{aligned}$$

یوں تفرقی مساوات کو حل مطمئن کرتا ہے۔ □

سوالات

قوت نما اور لوگارتھم کے ساتھ الجبرائی حساب

سوال 7.153 تا سوال 7.156 میں سادہ صورت دریافت کریں۔

سوال 7.153: (ا) $e^{\ln 7.2}$، (ب) $e^{-\ln x^2}$، (ج) $e^{\ln x - \ln y}$
جواب: (ا) 7.2، (ب) $\frac{1}{x^2}$، (ج) $\frac{x}{y}$

سوال 7.154: (ا) $e^{\ln(x^2+y^2)}$، (ب) $e^{-\ln 0.3}$، (ج) $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

سوال 7.155: (ا) $2\ln\sqrt{e}$ ، (ب) $\ln(\ln e^{e})$ ، (ج) $\ln(e^{-x^2-y^2})$
جواب: (ا) 1 ، (ب) 1 ، (ج) $-x^2-y^2$

سوال 7.156: (ا) $\ln(e^{\sec\theta})$ ، (ب) $\ln(e^{(e^x)})$ ، (ج) $\ln(e^{2\ln x})$

لوگارتھمی یا قوت نمائی اجزاء والے مساوات کا حل

سوال 7.157 تا سوال 7.162 میں t یا x (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کے لئے حل کریں۔

سوال 7.157: $\ln y = 2t+4$
جواب: e^{2t+4}

سوال 7.158: $\ln y = -t+5$

سوال 7.159: $\ln(y-40) = 5t$
جواب: $e^{5t}+40$

سوال 7.160: $\ln(1-2y) = t$

سوال 7.161: $\ln(y-1)-\ln 2 = x+\ln x$
جواب: $y = 2xe^{x}+1$

سوال 7.162: $\ln(y^2-1)-\ln(y+1) = \ln(\sin x)$

سوال 7.163 اور سوال 7.164 کو k کے لئے حل کریں۔

سوال 7.163: (ا) $e^{2k} = 4$ ، (ب) $100e^{10k} = 200$ ، (ج) $e^{k/1000} = a$
جواب: (ا) $k = \ln 2$ ، (ب) $k = \frac{1}{10}\ln 2$ ، (ج) $k = 1000\ln a$

سوال 7.164: (ا) $e^{5k} = \frac{1}{4}$ ، (ب) $80e^{k} = 1$ ، (ج) $e^{(\ln 0.8)k} = 0.8$

سوال 7.165 تا سوال 7.168 کو t کے لئے حل کریں۔

سوال 7.165: (ا) $e^{-0.3t} = 27$ ، (ب) $e^{kt} = \frac{1}{2}$ ، (ج) $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$
جواب: (ا) $t = -10\ln 3$ ، (ب) $t = -\frac{\ln 2}{k}$ ، (ج) $t = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.2}$

سوال 7.166: (ا) $e^{-0.01t} = 1000$ ، (ب) $e^{kt} = \frac{1}{10}$ ، (ج) $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

سوال 7.167: $e^{\sqrt{t}} = x^2$
جواب: $4(\ln x)^2$

سوال 7.168: $e^{(x^2)}e(2x+1) = e^t$

تفرقات

سوال7.169 تا سوال 7.188 میں x ، t یا θ (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 7.169: $y = e^{-5x}$
جواب: $-5e^{-5x}$

سوال 7.170: $y = e^{2x/3}$

سوال 7.171: $y = e^{5-7x}$
جواب: $-7e^{5-7x}$

سوال 7.172: $y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$

سوال 7.173: $y = xe^x - e^x$
جواب: xe^x

سوال 7.174: $y = (1+2x)e^{-2x}$

سوال 7.175: $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$
جواب: x^2e^x

سوال 7.176: $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

سوال 7.177: $y = e^\theta(\sin\theta + \cos\theta)$
جواب: $2e^\theta \cos\theta$

سوال 7.178: $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

سوال 7.179: $y = \cos(e^{-\theta^2})$
جواب: $2\theta e^{-\theta^2}\sin(e^{-\theta^2})$

سوال 7.180: $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$

سوال 7.181: $y = \ln(3te^{-t})$
جواب: $\frac{1-t}{t}$

سوال 7.182: $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

سوال 7.183: $y = \ln\left(\frac{e^\theta}{1+e^\theta}\right)$
جواب: $\frac{1}{1+e^\theta}$

سوال 7.184: $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

سوال 7.185: $y = e^{(\cos t+\ln t)}$
جواب: $e^{\cos t}(1 - t\sin t)$

سوال 7.186: $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

سوال 7.187: $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t \, \mathrm{d}t$
جواب: $\frac{\sin x}{x}$

سوال 7.188: $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t \, \mathrm{d}t$

سوال 7.189 تا سوال 7.192 میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال 7.189: $\ln y = e^y \sin x$
جواب: $\frac{ye^y\cos x}{1-ye^y\sin x}$

سوال 7.190: $\ln xy = e^{x+y}$

سوال 7.191: $e^{2x} = \sin(x+3y)$
جواب: $\frac{2e^{2x}-\cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$

سوال 7.192: $\tan y = e^x + \ln x$

تکملات

سوال 7.193 تا سوال 7.214 میں تکمل حل کریں۔

سوال 7.193: $\int (e^{ex} + 5e^{-x})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{3}e^{3x} - 5e^{-x} + C$

سوال 7.194: $\int (2e^{x} - 3e^{-2x})\,\mathrm{d}x$

سوال 7.195: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: 1

سوال 7.196: $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.197: $\int 8e^{(x+1)}\,\mathrm{d}x$
جواب: $8e^{x+1} + C$

سوال 7.198: $\int 2e^{2x-1}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.199: $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2}\,\mathrm{d}x$
جواب: 2

سوال 7.200: $\int_{0}^{\ln 16} e^{x/4}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.201: $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,\mathrm{d}r$
جواب: $2e^{\sqrt{r}} + C$

سوال 7.202: $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,\mathrm{d}r$

سوال 7.203: $\int 2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $-e^{-t^2} + C$

سوال 7.204: $\int t^3 e^{t^4}\,\mathrm{d}t$

سوال 7.205: $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $-e^{1/x} + C$

سوال 7.206: $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.207: $\int_0^{\pi/4}(1+e^{\tan\theta})\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: e

سوال 7.208: $\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+e^{\cot\theta})\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال 7.209: $\int e^{\sec\pi t}\sec\pi t\tan\pi t\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t}+C$

سوال 7.210: $\int e^{\csc(\pi+t)}\csc(\pi+t)\cot(\pi+t)\,\mathrm{d}t$

سوال 7.211: $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)}2e^y\cos e^y\,\mathrm{d}y$
جواب: 1

سوال 7.212: $\int_0^{\sqrt{\ln\pi}}2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})\,\mathrm{d}x$

سوال 7.213: $\int\frac{e^r}{1+e^r}\,\mathrm{d}r$
جواب: $\ln(1+e^r)+C$

سوال 7.214: $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$

ابتدائی قیمت مسائل

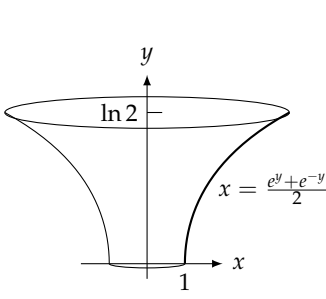
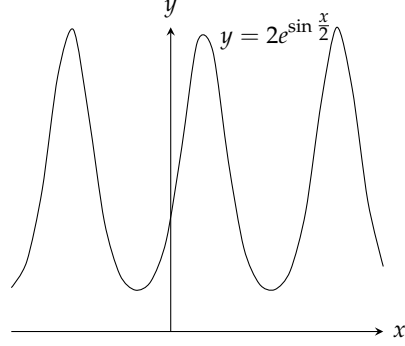
سوال 7.215 تا سوال 7.218 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 7.215: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^t\sin(e^t-2),\quad y(\ln 2)=0$
جواب: $y=1-\cos(e^t-2)$

سوال 7.216: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}),\quad y(\ln 4)=\frac{2}{\pi}$

سوال 7.217: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}=2e^{-x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0$
جواب: $y=2(e^{-x}+x)-1$

سوال 7.218: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}=1-e^{2t},\quad y(1)=-1,\quad y'(1)=0$

نظریہ اور استعمال

شکل 7.34: برائے سوال 7.226

شکل 7.33: ترسیم برائے سوال 7.220

سوال 7.219: وقفہ $[0, 1]$ پر $f(x) = e^x - 2x$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔
جواب: نقطہ $x = 0$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ 1؛ نقطہ $x = \ln 2$ پر مطلق کم سے کم $2 - 2\ln 2$

سوال 7.220: تفاعل $f(x) = 2e^{\sin \frac{x}{2}}$ کے مطلق انتہا قیمتیں کیا اور کہاں ہیں (شکل 7.33)۔

سوال 7.221: تفاعل $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$ کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمت کہاں پائی جاتی ہے۔
جواب: $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ $\frac{1}{2e}$

سوال 7.222: تفاعل $f(x) = (x - 3)^2 e^x$ اور اس کا ایک رتبی تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے f کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ احصاء کی مدد سے ترسیم پر نمایاں نقطوں کی نشاندہی کریں۔

سوال 7.223: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{2x}$، نچلی جانب قوس $y = e^x$ اور دائیں جانب لکیر $x = \ln 3$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 2

سوال 7.224: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{x/2}$، نچلی جانب قوس $y = e^{-x/2}$ اور دائیں جانب لکیر $x = 2\ln 2$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.225: مستوی xy میں مبدا سے گزرتی وہ قوس تلاش کریں جس کی لمبائی $x = 0$ سے $x = 1$ تک $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^x}{4}}\, dx$ ہے۔
جواب: $y = e^{x/2} - 1$

سوال 7.226: منحنی $x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, 0 \le y \le \ln 2$ کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.34)۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 7.227: (ا) دکھائیں $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$ ، (ب) وقفہ $[1, e]$ پر $\ln x$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔
جواب: (ا) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x - x + C) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 + 0 = \ln x$ ، (ب) $\frac{1}{e-1}$

سوال 7.228: وقفہ $[1, 2]$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.229: نقطہ $x = 0$ پر e^x کی خط بندی

ا. نقطہ $x = 0$ پر خط بندی $e^x \approx 1 + x$ حاصل کریں۔

ب. وقفہ $[0, 0.2]$ پر e^x کی جگہ $1 + x$ استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ تک تلاش کریں۔

ج. وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر e^x اور $1 + x$ کو ایک ساتھ کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ کس وقفہ پر تخمین زیادہ قیمت دیتی ہے؟ کم قیمت دیتی ہے؟

جواب: (ب) حتمی خلل تقریباً 0.02140

سوال 7.230: قواعد قوت نما

ا. مساوات $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ جس کو اس حصہ میں حاصل کیا گیا، سے شروع کر کے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی عدد x کے لئے $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ہو گا۔ اس کے بعد کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لئے دکھائیں کہ $\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$ ہو گا۔

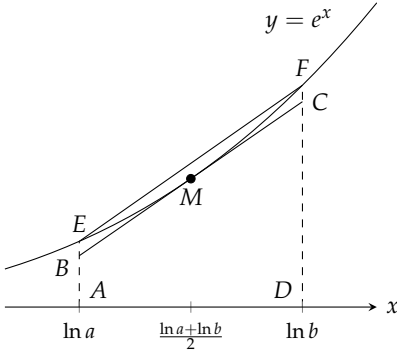
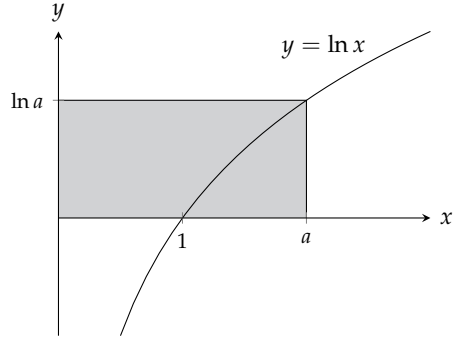
ب. کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لئے دکھائیں کہ $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ ہو گا۔

سوال 7.231: e کا اعشاری اظہار
مساوات $\ln x = 1$ کو حل کرتے ہوئے e کی قیمت اتنے اعشاریہ تک تلاش کریں جتنے تک آپ کا کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے ممکن ہو۔
جواب: 2.718 281 83

سوال 7.232: $\ln x$ اور e^x کے مابین الٹ تعلق
کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے مرکبات $e^{\ln x}$ اور $\ln(e^x)$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.233: دکھائیں کہ کسی بھی عدد $a > 1$ کے لئے درج ذیل ہو گا (شکل 7.35)۔

$$\int_1 6a \ln x \, \mathrm{d}x + \int_0^{\ln a} e^y \, \mathrm{d}y = a \ln a$$

سوال 7.234: تکونیاتی، لوگارتھمی اور حسابی اوسط عدم مساوات

شکل 7.36: ترسیم برائے سوال 7.234

شکل 7.35: ترسیم برائے سوال 7.233

ا. دکھائیں کہ x کے ہر وقفہ پر e^x کی ترسیم مقعر اوپر ہے۔

ب. اگر $0 < a < b$ ہو تب دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا (شکل 7.36)۔

$$e^{(\ln a+\ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x \, dx < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$

ج. جزو-ب کی عدم مساوات کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\sqrt{ab} < \frac{b-1}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

یہ عدم مساوات کہتی ہے کہ دو مثبت اعداد کا ہندسی اوسط ان کے لوگارتھمی اوسط سے کم ہو گا جو از خود ان کی حسابی اوسط سے کم ہو گا۔

7.4 a^x اور $\log_a x$

اب تک ماسوائے e کے ہم نے مثبت اعداد کو غیر ناطق طاقت دینا نہیں سیکھا ہے۔ قوت نمائی تفاعل کی تعریف $e^x = \ln^{-1} x$ ، متغیر x کی تمام حقیقی قیمتوں، ناطق اور غیر ناطق، کے لئے درست ہے۔ اس حصہ میں ہم اس تعریف کو استعمال کر کے کسی بھی مثبت عدد کو کسی بھی ناطق یا غیر ناطق کی طاقت دینا سیکھ کر مثبت عدد a کے لئے قوت نمائی تفاعل $y = a^x$ کی تعریف پیش کریں گے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم تفرق کے طاقتی قاعدہ کو حتمی شکل دیں گے (جو تمام قوت نما کے لئے درست ہو گا) اور ایک تفاعل کو دوسرے تفاعل کی طاقت دیں گے مثلاً x^x اور $(\sin x)^{\tan x}$ ، وغیرہ۔

جیسا e^x بہت سارے قوت نما تفاعل میں سے ایک ہے، اسی طرح $\ln x$ بھی بہت سارے لوگارتھمی تفاعل، جو تفاعل a^x کے الٹ ہیں، میں سے ایک ہے۔

جدول 7.3: قواعد برائے قوت نما

$a > 0$ ہے جبکہ x اور y کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں	
ا	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
ب	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
ج	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
د	$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$

تفاعل a^x

چونکہ کسی بھی مثبت عدد a کے لئے $a = e^{\ln a}$ ہوتا ہے لہٰذا ہم a^x کو $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ تصور کر سکتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف
$$a^x = e^{x \ln a}, \qquad a > 0 \tag{7.18}$$

مثال 7.24:

$$\text{(ا)} \quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2}$$
$$\text{(ب)} \quad 2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$$

□

تفاعل a^x قوت نما کے عمومی قواعد جنہیں جدول 7.3 میں پیش کیا گیا ہے کو مطمئن کرتا ہے۔ ہم ان قواعد کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

قاعدہ طاقت (حتمی صورت)

اساس a کے لوگارتھم کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں لکھتے ہیں۔ اگر u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{7.19}$$

ہو گا۔

مثال 7.25:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_{10}(3x+1)=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+1)=\frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

□

تکمل جہاں $\log_a x$ پایا جاتا ہو

جب اساس a کا لوگارتھم پایا جاتا ہو تب تکمل لیتے ہوئے ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں بدلتے ہیں۔

مثال 7.26:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\ln 2}\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x && \log_2 x=\frac{\ln x}{\ln 2}\\
&=\frac{1}{\ln 2}\int u\,\mathrm{d}u && u=\ln x\\
&=\frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2}+C\\
&=\frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2}+C=\frac{(\ln x)^2}{2\ln 2}+C
\end{aligned}$$

□

اساس 10 لوگارتھم

اساس 10 لوگارتھم جس کو **عام لوگارتھم**[8] کہتے ہیں کئی سائنسی کلیات میں پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر زلزلہ کی شدت کو عموماً اساس 10 کے لوگارتھمی[9] **رکٹر پیمائش**[10] میں پیش جاتا ہے۔ رکٹر پیا کا کلیہ

$$\text{شدت}\ R=\log_{10}\left(\frac{a}{T}\right)+B$$

ہے جہاں زلزلہ پیا کے مقام پر زمینی لرزش کا حیطہ a ہے جس کو مائیکرو میٹر میں ناپا جاتا ہے، زلزلہ کی موج کا دوری عرصہ T ہے جس کو سیکنڈ میں ناپا جاتا ہے جبکہ B ایک تجربی جزو ہے جو مرکز زلزلہ اور زلزلہ پیا کے بیچ شدت کی کمی کو ظاہر کرتا ہے۔

---

[8] common logarithm

[9] رکٹر پیمائش میں اکائی کا اضافہ حیطہ میں تقریباً 10 گنا اور توانائی میں تقریباً 31.623 گنا کا اضافہ ظاہر کرتا ہے۔

[10] Richter scale

جدول 7.4: عمومی خوراک کی $pH < 7$ ہے۔

خوراک	pH
کیلا	$4.5 - 4.7$
چکوترہ	$3.0 - 3.3$
سنترا	$3.0 - 4.0$
لیموں	$1.8 - 2.0$
دودھ	$6.3 - 6.6$
مرچ	$5.1 - 5.7$

جاپان کے شہر ناگاساکی پر گرائے گئے ایٹمی بم میں $1.34 \times 10^{14}\,\text{J}$ توانائی تھی جو رکٹر پیما پر 5 کے برابر ہے۔ آج تک سب سے بڑا ایٹمی دھماکہ 7.1 شدت کا تھا جس میں $2.09 \times 10^{17}\,\text{J}$ توانائی تھی۔ اکتوبر 8 2005 کو آزاد کشمیر میں 7.6 شدت کا زلزلہ آیا جس میں $1.585 \times 10^{16}\,\text{J}$ توانائی تھی۔

مثال 7.27: مرکز زلزلہ سے زلزلہ پیما تک فاصلہ $10\,000\,\text{km}$ ہے جس کے لئے $B = 6.8$ ہو گا۔ مقام زلزلہ پیما پر زمین کی انتصابی حرکت $10\,\mu\text{m}$ اور دوری عرصہ $1\,\text{s}$ ہیں۔ زلزلہ کی شدت تلاش کریں۔

حل:

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8$$

□

محلول کی تیزابیت کو pH (طاقت ہائیڈروجن) میں ناپا جاتا ہے جو اساس 10 کا لوگارتھمی پیمانہ[11] ہے۔ محلول میں ہائیڈرونیم برق پارہ $[H_3O^+]$ کے گھنا پن کے بالعکس کا عام لوگارتھم اس محلول کی pH قیمت ہو گی:

$$\text{pH} = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+]$$

ہائیڈرونیم برق پارہ کے گھنا پن کو مول فی لٹر ($\text{mol}\,\text{L}^{-1}$) میں ناپا جاتا ہے۔ تیزاب کی pH قیمت 7 سے کم جبکہ القلی کی 7 سے زیادہ ہوتی ہے۔ سرکہ کی pH قیمت 3 جبکہ مقطر پانی کی pH قیمت 7 ہوتی ہے۔ pH کا پیمانہ 0 سے 14 تک ہوتا ہے۔ جدول 7.4 میں کئی اجزاء کی pH دی گئی ہے۔

لوگارتھم کی ایک اور مثال ڈیسی بیل dB پیمانہ ہے جو صدا کی بلندی کو ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر صدا کی شدت I واٹ فی مربع میٹر ہو تب

$$\text{سطح صدا} = 10\log_{10}(I \times 10^{12})\,\text{dB} \tag{7.20}$$

[11] pH کی جدید تعریف کے تحت اس کو "مخفی قوہ ہائیڈروجن" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

جدول 7.5: سطح صدا کی چند قیمتیں۔

سماعت کی کمتر سطح	0 dB
پتوں کا سرسرانا	10 dB
سرگوشی	20 dB
خاموش گاڑی	50dB
عام بات چیت	65 dB
تین میٹر دور ہوائی برما	90 dB
کانوں میں درد	120 dB

ہو گا۔ جیسا اگلا مثال دکھاتا ہے، شدت صدا کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں تقریباً $3\,\mathrm{dB}$ کا اضافہ ہوتا ہے۔

مثال 7.28: صدا کی شدت کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں کتنا اضافہ ہو گا؟

حل: مساوات 7.20 کے تحت $2I$ شدت صدا کے لئے

$$
\begin{aligned}
\text{دگنی شدت کی سطح صدا} &= 10\log_{10}(2I\times 10^{12}) && \text{مساوات 7.20 میں } 2I\\
&= 10\log_{10}2 + 10\log_{10}(I\times 10^{12})\\
&= \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 10\log_{10}2\\
&\approx \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 3 && \log_{10}\approx 0.3
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ □

سطح صدا کی چند قیمتیں جدول 7.5 میں دی گئی ہیں۔

سوالات

الجبرائی حساب

سوال 7.235 تا سوال 7.238 میں ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

سوال 7.235:

ا. $5^{\log_5 7}$
ب. $8^{\log_8 \sqrt{2}}$
ج. $1.3^{\log_{1.3} 75}$
د. $\log_4 16$
ھ. $\log_3 \sqrt{3}$
و. $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$

سوال 7.236:

ا. $2^{\log_2 3}$
ب. $10^{\log_{10}(1/2)}$
ج. $\pi^{\log_\pi 7}$
د. $\log_{11} 121$
ھ. $\log_{121} 11$
و. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

سوال 7.237:

ا. $2^{\log_4 x}$
ب. $9^{\log 3x}$
ج. $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$

سوال 7.238:

ا. $25^{\log_5(3x^2)}$
ب. $\log_e(e^x)$
ج. $\log_4(2^{e^x \sin x})$

سوال 7.239 اور سوال 7.240 میں نسبت کو قدرتی لوگارتھمی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 7.239:

ا. $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$
ب. $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$
ج. $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

سوال 7.240:

ا. $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$
ب. $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$
ج. $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

سوال 7.241 تا سوال 7.244 میں دی گئی مساوات حل کریں۔

سوال 7.241: $3^{\log_3(7)+2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)}$

سوال 7.242: $8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

سوال 7.243: $3^{\log_3(x^2)=5e^{\ln x}} - 3\cdot 10^{\log_{10}(2)}$

سوال 7.244: $\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \frac{1}{x}\log_{10}(100)$

سوال 7.245 تا سوال 7.272 میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

سوال 7.245: $y = 2^x$

سوال 7.246: $y = 3^{-x}$

سوال 7.247: $y = 5^{\sqrt{s}}$

سوال 7.248: $y = 2^{s^2}$

سوال 7.249: $y = x^{\pi}$

سوال 7.250: $y = t^{1-e}$

سوال 7.251: $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

سوال 7.252: $y = (\ln\theta)^{\pi}$

سوال 7.253: $y = 7\sec\theta\ln 7$

سوال 7.254: $y = 3^{\tan\theta}\ln 3$

سوال 7.255: $y = 2^{\sin 3t}$

سوال 7.256: $y = 5^{-\cos 2t}$

سوال 7.257: $y = \log_2 5\theta$

سوال 7.258: $y = \log_3(1+\theta\ln 3)$

سوال 7.259: $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

سوال 7.260: $y = \log_{25} e^x - \log_5\sqrt{x}$

سوال 7.261: $y = \log_2 r\cdot\log_4 r$

سوال 7.262: $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

سوال 7.263: $y = \log_3 \left((\frac{x+1}{x-1})^{\ln 3} \right)$

سوال 7.264: $y = \log_5 \sqrt{(\frac{7x}{3x+2})^{\ln 5}}$

سوال 7.265: $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

سوال 7.266: $y = \log_7(\frac{\sin\theta\cos\theta}{e^\theta 2^\theta})$

سوال 7.267: $y = \log_5 e^x$

سوال 7.268: $y = \log_2(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}})$

سوال 7.269: $y = 3^{\log_2 t}$

سوال 7.270: $y = 3\log_8(\log_2 t)$

سوال 7.271: $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

سوال 7.272: $y = t\log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)})$

لوگارتھمی تفرق

سوال 7.273 تا سوال 7.280 میں y کا لوگارتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

سوال 7.273: $y = (x+1)^x$

سوال 7.274: $y = x^{(x+1)}$

سوال 7.275: $y = (\sqrt{t})^t$

سوال 7.276: $y = t^{\sqrt{t}}$

سوال 7.277: $y = (\sin x)^x$

سوال 7.278: $y = x^{\sin x}$

سوال 7.279: $y = x^{\ln x}$

سوال 7.280: $y = (\ln x)^{\ln x}$

تکمل

سوال 7.281 تا سوال 7.290 میں تکمل تلاش کریں۔

سوال 7.281: $\int 5^x \, \mathrm{d}x$

سوال 7.282: $\int (1.3)^x \, \mathrm{d}x$

سوال 7.283: $\int_0^1 2^{-\theta} \, \mathrm{d}\theta$

سوال 7.284: $\int_{-2}^0 5^{-\theta} \, \mathrm{d}\theta$

سوال 7.285: $\int_1^{\sqrt{2}} x 2^{(x^2)} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.286: $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.287: $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t} \sin t \, \mathrm{d}t$

سوال 7.288: $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t \, \mathrm{d}t$

سوال 7.289: $\int_2^4 x^{2x}(1 + \ln x) \, \mathrm{d}x$

سوال 7.290: $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.291 تا سوال 7.294 میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

سوال 7.291: $\int 3x^{\sqrt{3}} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.292: $\int x^{\sqrt{2}-1} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.293: $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.294: $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}$

سوال 7.295 تا سوال 7.304 میں دیے تکمل کو حل کریں۔

سوال 7.295: $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.296: $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.297: $\int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.298: $\int_1^e \frac{2\ln 10 \log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.299: $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.300: $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.301: $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.302: $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.303: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log_{10} x}$

سوال 7.304: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log_8 x)^2}$

سوال 7.305 تا سوال 7.308 میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.305: $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x>1$

سوال 7.306: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

سوال 7.307: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x>0$

سوال 7.308: $\frac{1}{\ln a}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x>0$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.309: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \le x \le 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 7.310: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \le x \le 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 7.311: انسانی خون کا pH
انسانی خون کے pH کی قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں برق پارہ $[\mathrm{H_3O^+}]$ کے مطابقتی حدود تلاش کریں۔

سوال 7.312: دماغی سیال کا pH
دماغی سیال میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ کا گاڑھا پن تقریباً $4.8 \times 10^{-8}\,\mathrm{mol\,L^{-1}}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال 7.313: افزائش کار (ایمپلی فائر) سے حاصل صدا کو جزو k سے ضرب دے کر اس سطح صدا کو $10\,\mathrm{dB}$ مزید بلند کیا جاتا ہے۔ جزو k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 7.314: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہو گا؟

سوال 7.315: کسی بھی محلول میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی گاڑھا پن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[\mathrm{H_3O^+}]$ کی کیا قیمت گاڑھا پن کی مجموعی $S = [\mathrm{H_3O^+}] + [\mathrm{OH^-}]$ کو کم سے کم کرتی ہے؟

ب. اس محلول کی pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت کم سے کم ہو۔

ج. $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو کم سے کم بناتی ہے؟

سوال 7.316: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.317: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال 7.318: کیا $x > 0$ کے لئے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ ایک دوسرے کے برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں تفاعل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 7.319: 2^x کی خط بندی
(ا) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \leq x \leq 3$ اور وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 7.320: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی
(ا) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ تک پور و پور کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq x \leq 8$ اور $\leq x \leq 2$ کے لئے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال 7.321: عموماً کیلکولیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگارتھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ درستگی تک (ا) $\log_3 8$، (ب) $\log_7 0.5$، (ج) $\log_{2_-} 17$، (د) $\log_{0.5} 7$ تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (ہ) $\log_{10} x = 2.3$، (و) $\log_2 x = 1.4$، (ز) $\log_2 x = -1.5$، (ح) $\log_{10} x = -0.7$

سوال 7.322: تبدیلی پیمانہ
(ا) دکھائیں کہ اساس 10 لوگارتھم کو اساس 2 لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگارتھم کو اساس b لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

7.5 افزائش اور تنزل

اس حصہ میں ہم قوت نما تبدیلی کے قاعدہ کو حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ ان عملی استعمال پر غور کیا جائے گا جن کی بنا لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل اہمیت کے حامل ہیں۔

قوت نما تبدیلی کا قاعدہ

فرض کریں ہم کسی مقدار y (جو سمتی رفتار، درجہ حرارت، برقی رو، یا کچھ اور ہو سکتا ہے) میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں کسی بھی لمحہ t پر اضافہ یا کمی اس لمحہ موجود مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر ہمیں لمحہ $t = 0$ پر مقدار کی قیمت y_0 بھی معلوم ہو تب ہم متغیر t کے تفاعل y کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y = y_0, \quad t = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات} \tag{7.21}$$

اگر y مثبت ہو اور بڑھ رہا ہو تب k مثبت ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ اضافہ کی شرح جمع کیے گئے مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر y منفی ہو اور گھٹ رہا ہو تب k منفی ہو گا اور مساوات 7.21 کہتی ہے کہ تنزل کی شرح، رہ گئی مقدار کے راست متناسب ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 7.21 کا ایک حل $y = 0$ ہے۔ غیر صفر حل حاصل کرنے کے لئے ہم مساوات 7.21 کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کر کے حل کرتے ہیں:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k$$
$$\ln|y| = kt + C \qquad t \text{ کے لحاظ سے تکمل}$$
$$|y| = e^{kt+C} \qquad \text{قوت نما صورت}$$
$$|y| = e^{C} \cdot e^{kt} \qquad e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$
$$y = \mp e^{C} e^{kt} \qquad \text{اگر } |y| = r \text{ ہو تب } y = \mp r \text{ ہو گا}$$
$$y = Ae^{kt} \qquad \text{مستقل } \mp e^C \text{ کو سادہ علامت } A \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}$$

ہم $\mp e^C$ کی تمام ممکنہ قیمتوں کے علاوہ 0 کو بھی A کی قیمت لے کر حل $y = 0$ کو بھی اس کلیہ میں شامل کرتے ہیں۔

ہم ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے A کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر $t = 0$ پر $y = y_0$ کو پر کرتے ہیں۔

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A$$

یوں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔

درج ذیل **قوت نما تبدیلی کا قاعدہ** ہے جس میں k کو **شرحی مستقل**[12] کہتے ہیں۔

$$y = y_0 e^{kt}, \quad k > 0 \text{ اضافہ}, \quad k < 0 \text{ تنزل} \qquad \text{قوت نما تبدیلی کا قاعدہ} \tag{7.22}$$

مساوات 7.22 کا حصول ہمیں دکھاتا ہے کہ صرف قوت نما تفاعل کا مستقل مضرب اپنے آپ کا تفرق ہو سکتا ہے۔

---

[12] rate constant

نمو آبادی

کوئی بھی آبادی (انسانی، نباتاتی، جراثیمی، وغیرہ) غیر استمراری تفاعل ہو گا چونکہ یہ صرف غیر مسلسل قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ اس کے باوجود جب آبادی میں فردی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس آبادی کو نا صرف استمراری بلکہ قابل تفرق تفاعل سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ آبادی میں بچے پیدا کرنے والوں کی تناسب برقرار رہتی ہے تب کسی بھی لمحہ t پر بچوں کی پیدائشی شرح اس لمحے پر افراد کی تعداد $y(t)$ کے راست تناسب ہو گی۔ اگر ہم باہر سے آنے اور جانے والوں کو رد کریں اور ساتھ ہی مرنے والوں کی تعداد کو بھی رد کریں تب نمو آبادی کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پیدائشی شرح ky کے برابر ہو گی۔یوں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ لہٰذا $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ حقیقت میں کسی بھی آبادی پر دیگر عوامل بھی اثر انداز ہوں گے جن پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔

مثال 7.29: بیماری کی پھیلاو کا ایک نمونہ فرض کرتا ہے کہ بیمار ہونے والوں کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس وقت کی تعداد y کے راست تناسب ہے۔ یوں جتنے زیادہ افراد کو بیماری لاحق ہو، بیماری اتنی زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔

فرض کریں کہ ایک سال کے عرصہ میں کسی بیماری میں مبتلا افراد کی تعداد میں $20\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔ اگر آج $10\,000$ افراد بیمار ہوں تب کتنے سالوں میں بیمار افراد کی تعداد 1000 ہو گی؟

حل: ہم مساوات $y = y_0 e^{kt}$ استعمال کرتے ہیں۔ہمیں تین چیزیں معلوم کرنی ہیں۔

ا. y_0 کی قیمت،

ب. k کی قیمت،

ج. $y = 1000$ کرنے کے لئے درکار t کی قیمت۔

پہلا قدم: y_0 کی قیمت: ہم آج کو لمحہ $t = 0$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $y = 10\,000$ ہے۔یوں ہماری مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = 10\,000 e^{kt}$$

دوسرا قدم: k کی قیمت: ایک سال کے بعد بیماروں کی تعداد، آج کی تعداد کے $80\,\%$ یعنی 8000 ہو گی۔آئیں k حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 8000 &= 10\,000 e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 \\ k &= \ln 0.8 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = 10\,000 e^{(\ln 0.8)T} \tag{7.23}$$

تیسرا قدم: t کی وہ قیمت جو $y = 1000$ دیتی ہے: ہم مساوات 7.23 میں $y = 1000$ پر کر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}1000 &= 10\,000e^{(\ln 0.8)t}\\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1\\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1\\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32\end{aligned}$$

یوں بیماروں کی تعداد 1000 کرنے کے لئے ہمیں دس سال سے کچھ زیادہ انتظار کرنا ہو گا۔ □

مسلسل سود در سود

اگر آپ A_0 روپیہ کاروبار میں ڈالیں اور ایک سال میں اس سے r' روپیہ کمانے کی امید رکھتے ہوں، جہاں $r' = r \times A_0$ ہے، تب ایک سال کے آخر میں آپ کے پاس $A_0 + r' = A_0(1 + r)$ روپیہ ہوں گے۔

ربا پر کاروبار کرنے والا بینک ایک شخص کو A_0 روپیہ سود پر دیتا ہے۔ایک سال بعد اس شخص پر $r \times A_0$ کا سود واجب الادا ہو گا لہٰذا ایک سال بعد اس شخص پر کل $A_0 + rA_0 = A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ سالانہ سود کی شرح r ہے۔ فرض کریں کہ یہ شخص سالانہ سود ادا نہیں کرتا ہے۔ یوں دوسرے سال کی ابتدا میں اس شخص پر $A_0(1 + r)$ قرضہ ہو گا اور بینک اگلے سال اس مقدار پر سود حاصل کرے گا۔ چونکہ سود کی شرح r ہے لہٰذا دوسرے سال اس شخص پر سود $r \times A_0(1 + r)$ ہو گا اور دوسرے سال کے آخر میں اس پر کل قرضہ

$$A_0(1 + r) + rA_0(1 + r) = A_0(1 + r)(1 + r) = A_0(1 + r)^2$$

ہو گا۔ اسی طرح تین سال بعد قرضہ $A_0(1 + r)^2 + rA_0(1 + r)^2 = A_0(1 + r)^3$ اور t سال بعد قرضہ

$$A_0(1 + r)^t$$

ہو گا۔

اب بینک کہہ سکتا ہے کہ سال میں ایک بار کی بجائے وہ ماہوار $\frac{r}{12}$ شرح سے سود وصول کرے گا (جو ظاہری طور پر ربا کی وہی شرح معلوم ہوتی ہے)۔یوں پہلے مہینے کی آخر میں واجب الادا ربا کی مقدار $\frac{r}{12}A_0$ اور قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})$ ہو گا۔ اسی طرح دوسرے مہینے کی آخر میں قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^2$ ہو گا۔ایک سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^{12}$ اور t سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1 + \frac{r}{12})^{12t}$ ہو گا جس کو $A_t = A_0(1 + \frac{r}{k})^{kt}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $k = 12$ ہو گا۔

یہ بینک ماہوار کی بجائے ہفتہ وار سود بھی وصول کر سکتا ہے۔چونکہ سال میں 52 ہفتے ہوتے ہیں لہٰذا ایسی صورت میں $k = 52$ ہو گا اور t سال بعد قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A_t = A_0\Big(1 + \frac{r}{k}\Big)^{kt}$$

سود پر چلنے والا بینک زیادہ سے زیادہ ربا حاصل کرنے کی خاطر، سال میں زیادہ سے زیادہ مرتبہ ربا حاصل کرنا چاہے گا۔ آئیں دیکھیں کہ $k \to \infty$ کرنے سے t سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

$$\begin{aligned}\lim_{k \to \infty} A_t &= \lim_{k \to \infty} A_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \\ &= A_0 e^{rt}\end{aligned}$$

درج بالا حد کے حصول میں نا قابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ایسے حد کی تلاش حصہ 7.6 میں سکھائی جائے گی۔ یوں t سال بعد اس شخص پر قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{7.24}$$

اس کلیہ کے تحت ربا کو **مسلسل سود در سود**[13] کہتے ہیں۔

مثال 7.30: آپ آج بینک سے مسلسل سود در سود کی سالانہ $15\,\%$ شرح پر $100\,000$ روپیہ حاصل کرتے ہیں۔ پانچ سال بعد آپ کو کتنی مقدار واپس کرنی ہو گی؟ اگر بینک سالانہ سود وصول کرتا ہو تب پانچ سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

حل: ہم $A_0 = 100\,000$ ، $r = 0.15$ اور $t = 5$ لیتے ہوئے مساوات 7.24 استعمال کرتے ہیں۔

$$A(5) = 100\,000 e^{(0.15)(5)} = 211\,700$$

اگر بینک سال میں ایک بار ربا وصول کرے تب پانچ سال بعد آپ کو درج ذیل قرضہ دینا ہو گا۔

$$A(5) = 100\,000(1 + 0.15)^5 = 201\,136$$

□

مثال 7.31: سالانہ **افراط زر**[14] سے مراد ایک سال میں روپیہ کی قدر میں کمی ہے۔ یوں $10\,\%$ افراط زر کا مطلب ہے کہ ایک سال بعد روپیہ کی قیمت $90\,\%$ ہو گی۔

ایک شخص $5\,000\,000$ روپیہ بینک میں پانچ سال کے لئے جمع کرتا ہے۔بینک ہر مہینہ اس شخص کو $40\,000$ روپیہ دیگا اور پانچ سال کے آخر میں اس کو پورے 5000000 روپیہ واپس کرے گا۔ اگر سالانہ افراط زر $12\,\%$ ہو تب اس شخص نے کیا پایا اور کیا کھویا؟

حل: پانچ سالوں میں بینک اس شخص کو

$$40\,000 \times 12 \times 5 = 2\,400\,000$$

---

[13] compound continuous interest
[14] inflation

روپیہ دیتا ہے۔ پانچ سال بعد شخص کو 5000000 روپیہ دیے جاتے ہیں جن کی اصل قدر

$$5\,000\,000 \times 0.88^5 = 2\,638\,660$$

ہو گی۔ یاد رہے کہ ہر مہینہ روپیہ کا قدر کم ہو گا لہٰذا پہلے مہینہ کے 40000 اور آخری مہینہ کے 40000 روپیہ کے قدر ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ ہم حساب کو آسان بنانے کی خاطر تصور کرتے ہیں کہ اس شخص کو ماہوار کی بجائے ہر سال $40\,000 \times 12 = 480\,000$ روپیہ ملتے ہیں جن کی اصل قدر

$$480\,000 \times 0.88^1 = 422\,400$$
$$480\,000 \times 0.88^2 = 371\,712$$
$$480\,000 \times 0.88^3 = 327\,107$$
$$480\,000 \times 0.88^4 = 287\,854$$
$$480\,000 \times 0.88^5 = 253\,311$$

ہو گی لہٰذا پانچ سال میں اس کو ماہوار دیے گئے رقم کی اصل قدر درج بالا کا مجموعہ 1 434 404 ہو گا۔

اس شخص کو کل $2\,638\,660 + 1\,434\,404 = 4\,073\,064$ قدر کے روپیہ واپس ہوتے ہیں۔ □

تابکاری

ایک ایٹم اپنی کمیت کا کچھ حصہ خارج کر کے دوسرے ایٹم میں تبدیل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **تابکاری تحلیل**[15] کہتے ہیں اور جس ایٹم نے مادہ خارج کیا ہو اس کو **تابکار**[16] کہتے ہیں۔ تابکار کاربن 14 مادہ خارج کر کے نائٹروجن میں تبدیل ہوتا ہے، ریڈیم کئی درمیانی عمل تابکاری سے گزر کر آخر کار سیسہ میں تبدیل ہوتا ہے۔

تجربہ سے دیکھا گیا ہے کہ اکائی وقت میں خارج ذرات کی تعداد، اس وقت تابکار ایٹموں کی تعداد کے تقریباً راست تناسب ہوتا ہے۔ یوں تابکار تحلیل کو مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky,\ k > 0$ ظاہر کرتی ہے (یہاں $k\ (<0)$ کی جگہ $-k\ (k>0)$ استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ اس طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y گھٹ رہا ہے)۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر تابکار ایٹموں کی تعداد y_0 ہو تب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0 \qquad \text{مساوات تابکاری} \tag{7.25}$$

مثال 7.32: نصف زندگی

کسی عنصر کے آدھے ایٹموں کو تابکاری کے ذریعہ تبدیل ہونے کے لئے درکار وقت کو اس عنصر کی **نصف زندگی**[17] کہتے ہیں۔ کسی بھی عنصر کی نصف زندگی، ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر نہیں بلکہ عنصر پر منحصر ہوتی ہے۔

---

[15] radioactive decay
[16] radioactive
[17] half life

یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں ہوتا ہے ہم ایک عنصر کو لیتے ہیں جس میں لمحہ $t=0$ پر y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کتنے وقت کے بعد اس میں نصف یعنی $\frac{y_0}{2}$ ایٹم پائے جائیں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y\frac{y_0}{2} &= y_0e^{-kt}\\
e^{-kt} &= \frac{1}{2}\\
-kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\\
t &= \frac{\ln 2}{k}
\end{aligned}$$

اس قیمت $\left(t=\frac{\ln 2}{k}\right)$ کو نصف زندگی کہتے ہیں جو صرف k پر منحصر ہے نا کہ ابتدائی ایٹوں کی تعداد پر۔ □

$$\text{نصف زندگی} = \frac{\ln 2}{k} \tag{7.26}$$

ریڈان 222 گیس کے لئے $k=0.18$ دن ہے لہٰذا اس کی نصف زندگی 3.8 دن ہو گی جبکہ رات کی تاریکی میں نظر آنے کی خاطر گھڑیوں میں استعمال ہونے والے ریڈیم 226 کا $k=4.3\times10^{-4}$ سال ہے لہٰذا اس کی نصف زندگی 1600 سال ہو گی۔

مثال 7.33: پولونیم 210

پولونیم 210 کی نصف زندگی کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ اگر $t=0$ پر پولونیم 210 کے ایٹم پائے جاتے ہوں تب t دنوں بعد اس کے $y=y_0e^{-5\times10^{-3}t}$ ایٹم ہوں گے۔ اس عنصر کی نصف زندگی تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\text{نصف زندگی} &= \frac{\ln 2}{k}\\
&= \frac{\ln 2}{5\times10^{-3}}\\
&\approx 139\ \text{دن}
\end{aligned}$$

□

مثال 7.34: کاربن 14 تعین زمان

کاربن 14 جس کی نصف زندگی 5700 سال ہے، کو عموماً قدیم چیزوں کی عمر معلوم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک نمونہ میں 10 % تابکار کاربن کے ایٹم تبدیل تبدیل ہو چکے ہیں۔ اس نمونے کی عمر تلاش کریں۔

حل: ہمیں پہلے k تلاش کرنا ہے۔اس کے بعد ہم درکار وقت معلوم کریں گے۔ ہم مساوات 7.25 استعمال کرتے ہیں۔ **پہلا قدم:** k کی تلاش۔

$$k = \frac{\ln 2}{} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.2 \times 10^{-4}$$

دوسرا قدم: درکار وقت جس میں 90 % ایٹم باقی رہ جائے۔

$$\begin{aligned} 0.9y_0 &= y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t} \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 \\ t &= -\frac{5700(\ln 0.9)}{\ln 2} \approx 866 \text{ سال} \end{aligned}$$

نمونہ 866 سال پرانا ہے۔ □

کاربن 14 کے علاوہ دیگر تابکار عناصر کو بھی تعین زمان کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یورینیم (جس کی نصف زندگی 4.5 ارب سال ہے) کو 2 ارب سال پرانے چٹانوں کے عمر تلاش کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

منتقلی حرارت: نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

کوئی بھی گرم جسم کچھ دیر میں ٹھنڈا ہو کر ارد گرد ماحول کے درجہ حرارت پر آن پہنچتا ہے۔ جسم کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح، جسم اور ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست متناسب ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک** کہتے ہیں۔

گر لمحہ t پر جسم کا درجہ حرارت متغیر T ہو اور ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت مستقل T_S ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_S) \tag{7.27}$$

ہو گا۔اگر ہم $(T - T_S)$ کی جگہ y پر کریں تب

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T - T_S) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}T_S}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - 0 \qquad T_S \text{ مستقل} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں y کے لحاظ سے مساوات 7.27 درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$$

جس کا حل $y = y_0 e^{-kt}$ ہے۔ یوں **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک**[18]

$$T - T_S = (T_0 - T_S)e^{-kt} \tag{7.28}$$
نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

ہو گا جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کا درجہ حرارت T_S ہے۔

مثال 7.35: ایک انڈے کو $98\,^\circ\mathrm{C}$ پر ابالنے کے بعد $18\,^\circ\mathrm{C}$ گرم پانی سے بھرے ہوئے بالٹی میں ڈالا جاتا ہے۔ پانچ منٹ گزرنے کے بعد انڈے کا درجہ حرارت $38\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ بالٹی میں پانی کے درجہ حرارت میں تبدیلی کو رد کریں۔ انڈا کتنی دیر میں $20\,^\circ\mathrm{C}$ تک پہنچے گا؟

حل: ہم پانچ منٹ بعد کی معلومات استعمال کرتے ہوئے پہلے k تلاش کرتے ہیں۔ مساوات 7.28 کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

پانچ منٹ بعد $T = 38$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}
38 &= 18 + 80e^{-5k}\\
e^{-5k} &= \frac{1}{4}\\
-5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4\\
k &= \frac{\ln 4}{5} = 0.2\ln 4 \approx 0.28
\end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر $T = 18 + 80^{-(0.2\ln 4)t}$ ہو گا۔ ہمیں وہ t درکار ہے جس پر $T = 20$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
20 &= 18 = 80e^{-(0.2\ln 4)t}\\
80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2\\
e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40}\\
-(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40\\
t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13\,\text{منٹ}
\end{aligned}$$

بالٹی میں ڈالنے کے تقریباً 13 منٹ بعد انڈے کا درجہ حرارت $20\,^\circ\mathrm{C}$ ہو گا۔ □

---

[18] newton's law of cooling

سوالات

سوال 7.323: دانت کی جسامت
انسانی دانت کی جسامت گھٹ رہی ہے۔ شمالی یورپ کے لوگوں کے دانتوں کی جسامت 1000 سال میں $1\,\%$ گھٹتی ہے۔

ا. دانت کی جسامت کو y اور وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے $t = 0$ پر y_0 اور $t = 1000$ پر $y = 0.99y_0$ لیتے ہوئے مساوات $y = y_0e^{kt}$ میں k تلاش کریں۔ k کی اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ب. کتنے سالوں میں دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے $90\,\%$ ہو گی؟

ج. آج سے $20\,000$ سال بعد انسان کے دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے لحاظ سے کتنی ہو گی؟

جواب: (ا) $-0.000\,01$ ، (ب) 10.536 سال، (ج) $82\,\%$

سوال 7.324: فضائی دباو
سطح سمندر سے h بلندی پر فضائی دباو p کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}$ کو عموماً p کا راست متناسب تصور کیا جاتا ہے۔ سطح سمندر پر فضائی دباو $101\,293\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ اور $20\,\mathrm{km}$ بلندی پر $9000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ لیں۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں اور دی گئی معلومات سے k دریافت کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = kp, \quad k \text{ مستقل} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$p = p_0, \quad h = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. $h = 50\,\mathrm{km}$ پر فضائی دباو کتنا ہو گا؟

ج. کتنی بلندی پر $p = 90\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہو گا؟

سوال 7.325: کیمیائی عمل
بعض کیمیائی اعمال میں اجزاء کی تبدیلی کی شرح اس لمحے پر موجود مواد کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی ایک کیمیائی عمل کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.6y$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں مقدار y کو گرام اور وقت t کو گھنٹوں میں ناپا گیا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر کیمیائی مواد کی مقدار $100\,\mathrm{g}$ ہو تب ایک گھنٹہ بعد اس کی کتنی مقدار پائی جائے گی؟
جواب: $54.88\,\mathrm{g}$

سوال 7.326: خام شکر کو ایک مرحلہ سے گزارا جاتا ہے جس میں شکر کے مالیکیول کی ساخت تبدیل ہوتی ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے بعد کسی بھی لمحہ پر تبدیلی کی شرح، خام مال کی باقی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر $1000\,\mathrm{kg}$ خام مال سے شروع کرتے ہوئے ابتدائی 10 گھنٹوں بعد باقی خام مال کی مقدار $800\,\mathrm{kg}$ ہو تب مزید 14 گھنٹوں بعد خام مال کی مقدار کتنی ہو گی؟

سوال 7.327: زیر آب کام
سمندری پانی کی سطح سے x میٹر نیچے روشنی $L(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -kL$$

آپ تجربہ سے جانتے ہیں کہ سطح سے $6\,\mathrm{m}$ نیچے روشنی کی شدت آدھی ہے۔ آپ سطحی روشنی کے $\frac{1}{10}$ حصہ میں کام کر سکتے ہیں۔ یوں کتنی گہرائی تک آپ کام کر سکیں گے؟
جواب: $19.93\,\mathrm{m}$

سوال 7.328: برق گیر میں برقی دباو
برقی گیر سے برقی نکاسی کی شرح اس پر موجود برقی دباو کے راست تناسب ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس پر دباو V درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{40}V$$

کتنی دیر میں برقی دباو کی قیمت ابتدائی قیمت کے $10\,\%$ ہو گی؟

سوال 7.329: ہیضہ کے جراثیم
فرض کریں ہیضہ کے جراثیم بغیر رکاوٹ قوت نمائی طور پر بڑھ سکتے ہیں۔ لمحہ $t=0$ پر ایک جرثومہ ہوتا ہے۔ جرثومہ آدھا گھنٹہ میں ٹوٹ کر دو جرثوموں میں تبدیل ہوتا ہے۔ 24 گھنٹوں بعد کتنے جرثومے پائے جائیں گے؟ (اگرچہ بیمار شخص کی جسم میں ہر گھنٹہ متعدد جرثومے مارے جاتے ہیں۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صبح ظاہری طور پر بالکل تندرست شخص، شام کو یک دم کیوں بہت سخت بیمار ہو سکتا ہے۔)
جواب: 2.8147497×10^{14}

سوال 7.330: جراثیم کی نمو آبادی
تجربہ گاہ میں ایک قسم کی جرثوموں کو افزائش کے لئے بہترین ماحول مہیا کیا جاتا ہے تا کہ ان کی تعداد قوت نمائی بڑھ سکے۔ 3 گھنٹوں بعد جرثوموں کی تعداد 10 000 اور 5 گھنٹوں بعد ان کی تعداد 40 000 ہوتی ہے۔ ابتدائی جرثوموں کی تعداد دریافت کریں۔

سوال 7.331: بیماری کی پھیلاو (مثال 7.29)
فرض کریں کہ مثال 7.29 میں کسی بھی ایک سال میں بیمار افراد کی تعداد میں $25\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔

ا. کتنے سالوں میں بیماروں کی تعداد 1000 ہو گی؟

ب. کتنے عرصہ میں بیماری کا خاتمہ ہو گا۔ (بیماروں کی تعداد ایک سے کم ہونے کو خاتمہ تصور کیا جاتا ہے۔)

جواب: (ا) 8 سال، (ب) 32.02 سال

سوال 7.332: پاکستان کی آبادی
پاکستان کی آبادی میں 2017 میں ہر 8 سیکنڈوں میں ایک بچے کا اضافہ ہوا۔

ا. قوت نمائی اضافہ $y = y_0 e^{kt}$ تصور کریں جہاں t وقت کو اور y تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ وقت کو سالوں میں لیتے ہوئے k کی قیمت تلاش کریں۔

ب. 5 سال بعد پاکستان کی آبادی کتنی ہو گی؟

سوال 7.333: تیل میں کمی
فرض کریں تیل کی کنواں سے حاصل تیل میں ہر سال $10\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔ کتنے سالوں میں حاصل تیل کی مقدار $20\,\%$ رہ جائے گی؟
جواب: 15.28 سال

سوال 7.334: قیمت میں چھوٹ
فروخت میں اضافہ پیدا کرنے کی خاطر آپ کا ادارہ قیمت میں چھوٹ کو خریداری کے ساتھ یوں منسلک کرتا ہے کہ ایک شہ کی قیمت $p(x)$ خریدی گئی اشیاء کی تعداد کا تفاعل ہو۔ ہر اضافی ایک عدد خریداری پر مزید $1\,\%$ چھوٹ دی جاتی ہے۔ 100 عدد کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100) = 20.09$ روپیہ ہے۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے $p(x)$ تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{100}p \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$p(100) = 20.09 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. دس عدد اشیاء کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(10)$ تلاش کریں۔ اسی طرح 100 کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100)$ تلاش کریں۔

ج. کیا 100 کی خریداری پر آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ در حقیقت 90 کی خریداری پر آمدنی سے کم ہو گی؟ دکھائیں کہ حقیقت میں 100 کی خریداری پر آمدنی زیادہ سے زیادہ ہو گی۔

د. آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ کو $0 \le x \le 200$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 7.335: مسلسل سود در سود
آپ بینک سے A_0 روپیہ کا قرضہ لیتے ہیں جس پر آپ کو $4\,\%$ مسلسل سود در سود ادا کرنا ہو گا۔

ا. آپ کو 5 سال بعد کتنی رقم ادا کرنی ہو گی؟

ب. آپ کو کتنے سالوں میں دگنی رقم ادا کرنی ہو گی؟ کتنے سالوں میں تگنی رقم ادا کرنی ہو گا؟

جواب: (ا) $A_0e^{0.2}$ ، (ب) 17.33 سال، (ج) 27.74 سال

سوال 7.336: اگر کسی رقم پر $100\,\%$ مسلسل سود در سود دیا جائے تب کتنے عرصہ میں رقم دگنی ہو گی؟ ایک سال میں سود کتنا ہو گا؟

سوال 7.337: ایک شخص نے بینک میں رقم کو 100 سال کے لئے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 90 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔
جواب: $4.50\,\%$

سوال 7.338: ایک شخص نے بینک میں رقم کو 100 سال کے لئے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 131 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال 7.339: ریڈان 222
ریڈان 222 گیس کی تابکاری تحلیل کا کلیہ $y = y_0e^{-0.18t}$ ہے جہاں وقت t کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ کتنے عرصہ میں ریڈان 222 کے کسی بھی نمونہ میں $90\,\%$ مواد باقی ہو گا؟
جواب: 0.585 دن

سوال 7.340: پولونیم 210
پولونیم 210 کی نصف زندگی 139 دن ہے۔ اگر آپ کے پاس پولونیم 210 کے نمونہ میں $95\,\%$ مواد تابکاری کی بنا تبدیل ہو جائے تب یہ نمونہ آپ کے کسی کام کا نہیں ہو گا۔ یہ نمونہ کتنے دنوں تک آپ کے کام کا ہو گا؟

سوال 7.341: تابکار مادہ کی اوسط زندگی
تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0e^{-kt}$ میں $\frac{1}{k}$ کو تابکار مرکزہ کی **اوسط زندگی**[19] کہتے ہیں۔ ریڈان مرکزہ کی اوسط زندگی تقریباً $\frac{1}{0.18} = 5.6$ دن ہے۔ کاربن 12 کی اوسط زندگی تقریباً 8000 سال ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی تابکار مادہ کی تین اوسط زندگی کے برابر وقت میں $95\,\%$ مادہ تبدیل ہو جائے گا۔ یوں نصف زندگی سے آپ باآسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ مادہ کتنے عرصہ میں ختم ہو گا۔

سوال 7.342: کیلی فورنیم 252
کیلی فورنیم 252 کو 1950 میں ایجاد کیا گیا۔ اب تک مغربی دنیا میں اس عنصر کے صرف $8\,\mathrm{g}$ جمع کیے گئے ہیں۔ اس کی قیمت سونے سے 654 گنا زیادہ ہے۔ اس کی نصف زندگی 2.645 سال ہے اور $1\,\mu\mathrm{g}$ کیلی فورنیم فی سیکنڈ 170×10^6 تعدیلی برقیہ خارج کرتا ہے۔

ا. تابکاری تحلیل کی مساوات میں اس عنصر کا k کتنا ہو گا؟

---
[19] mean life

ب. اس عنصر کی اوسط زندگی کتنی ہو گی؟ (سوال 7.341 سے رجوع کریں۔)

ج. کتنے عرصہ میں 95 % عنصر تابکاری تحلیل کی بنا تبدیل ہو جائے گا؟

سوال 7.343: یخنی
ایک کمرہ جس کا درجہ حرارت 20 °C ہے میں ایک پیالی یخنی کا درجہ حرارت دس منٹ میں 90 °C سے گر کر 60 °C ہوتا ہے۔
نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ا. مزید کتنے وقت میں یخنی کا درجہ حرارت 35 °C ہو گا؟

ب. اگر 90 °C گرم یخنی کے پیالہ کو −15 °C کے ٹھنڈی فرج میں رکھا جائے تب اس کو 35 °C تک ٹھنڈا ہونے میں کتنا وقت درکار ہو گا؟

جواب: (ا) 17.5 منٹ، (ب) 13.26 منٹ

سوال 7.344: نامعلوم درجہ حرارت والا شہتیر
المونیم کے شہتیر کو باہر سے اندر لایا جاتا ہے۔اندر درجہ حرارت 20 °C ہے جبکہ باہر موسم ٹھنڈا ہے۔دس منٹ بعد شہتیر کا درجہ حرارت 2 °C ہے جبکہ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 10 °C ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے شہتیر کا ابتدائی درجی حرارت تلاش کریں۔

سوال 7.345: ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت نامعلوم
ایک جگ جو 46 °C درجہ حرارت پانی سے بھرا ہوا ہے کو فرج میں رکھا جاتا ہے۔ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 39 °C ہوتا ہے۔
مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 33 °C ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے فرج کا درجہ حرارت تلاش کریں۔
جواب: −3 °C

سوال 7.346: فضا میں کسی چیز کو ٹھنڈا کرنا
چاندی کے سلاخ کا موجودہ درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 60 °C زیادہ ہے۔ بیس منٹ پہلے اس کا درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 70 °C زیادہ تھا۔ (ا) پندرہ منٹ کے بعد اس کا درجہ حرارت، کمرے سے کتنا زیادہ ہو گا؟ (ب) دو گھنٹوں بعد کتنا ہو گا؟ (ج) کتنی دیر بعد کمرے سے سلاخ کا درجہ حرارت 10 °C زیادہ ہو گا؟

سوال 7.347: آتش فشاں
زمانہ قدیم میں ایک آتش فشاں کے پھٹنے سے قریبی درخت جل جاتے ہیں اور آتش فشاں میں ایک جھیل بن جاتا ہے۔ اس جھیل میں موجود کوئلہ میں زندہ درختوں کے لحاظ سے 44.5 % کاربن 14 پایا جاتا ہے۔ یہ جھیل کتنا قدیم ہے؟
جواب: تقریباً 6658 سال

سوال 7.348: کاربنی تعین زمان کی حساسیت
آئیں دیکھیں کہ نمونہ میں پائے جانے والے کاربن کی مقدار میں معمولی خلل، نتائج میں کس قدر فرق پیدا کرتا ہے۔

ا. ایک **حجریہ ہڈی**[20] 2000 میں دریافت کی گئی۔ اس میں ابتدائی کاربن 14 کا $17\,\%$ حصہ باقی تھا۔ یہ جانور کب زندہ تھا؟

ب. اگر جزو-ا میں $17\,\%$ کی بجائے $18\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

ج. اگر جزو-ا میں $17\,\%$ کی بجائے $16\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

سوال 7.349: جعلی تصویر
ایک تصویر جو 1632 اور 1675 کے درمیان بنائی گئی کی نقل میں کاربن 14 کی ابتدائی قیمت کا $99.5\,\%$ حصہ باقی ہے۔ یہ نقلی تصویر کتنی پرانی ہے؟
جواب: 41 سال پرانا

7.6 قاعدہ لھوپیٹال

ایسا کسر جس کا نسب نما اور شمار کنندہ دونوں تحدیدی نقطہ پر صفر کو پہنچتے ہوں، کا حد تلاش کرنے کا قاعدہ یعقوب برنولی نے دریافت کیا جس کو **قاعدہ لھوپیٹال** کہتے ہیں۔

غیر معین حاصل تقسیم

اگر نقطہ $x=a$ پر تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر ہوں تب $x=a$ پر کرتے ہوئے $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ کا حصول ممکن نہیں ہو گا چونکہ ایسا کرنے سے $\frac{0}{0}$ ملتا ہے جو بے معنی ہے اور جس کو **غیر معین روپ**[21] کہتے ہیں۔ اب تک ہم دیکھ چکے ہیں کہ جو حد غیر معین روپ دیں ان کا حد تلاش کرنا کبھی آسان اور کبھی مشکل ہوتا ہے۔ ہم نے حصہ 3.4 میں کافی محنت کے بعد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ کی قیمت حاصل کی۔ اس کے برعکس تفرق کے حصول میں استعمال ہونے والا درج ذیل حد تلاش کرنے میں ہمیں کوئی دشواری پیش نہیں ہوئی،

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگرچہ اس حد میں $x=a$ پر کرنے سے ہر صورت $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ہم تفرق کے حصول میں حد کے استعمال سے استفادہ کرتے ہوئے ان حد کو تلاش کرتے ہیں جو غیر معین روپ کو جنم دیتے ہیں۔

مسئلہ 7.2: **قاعدہ لھوپیٹال (پہلی صورت)**
فرض کریں کہ $f(a)=g(a)=0$ ہے جبکہ $f'(a)$ اور $g'(a)$ موجود ہیں جہاں $g'(a)\neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{7.29}$$

---

[20] fossil bone
[21] intermediate form

ثبوت: ہم $f'(a)$ اور $g'(a)$ ، جو از خود حد کو ظاہر کرتے ہیں، سے شروع کرتے ہوئے واپس چلتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے f کے تفرق f' کو g کے تفرق g' سے تقسیم کریں۔ یاد رہے کہ $\frac{f}{g}$ کا تفرق $\left(\frac{f}{g}\right)'$ درست نتیجہ نہیں دیگا۔

مثال 7.36:

$$(\text{ا})\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = \left.\frac{3-\cos x}{a}\right|_{x=0} = 2$$

$$(\text{ب})\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{ج})\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left.\frac{1-\cos x}{3x^2}\right|_{x\to 0} = ?$$ اب بھی $\frac{0}{0}$ ملتا ہے

□

ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 7.36 کے جزو-ج میں قاعدہ لھوپیٹال کے استعمال کے باوجود $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی بہتر روپ کہتی ہے کہ جب تک ہمیں $\frac{0}{0}$ حاصل ہو ہم اس قاعدہ کو بار بار استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں اس مثال کو حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} && \text{اس بار } \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ملا}\end{aligned}$$

مسئلہ 7.3: **قاعدہ لھوپیٹال (بہتر روپ)**
فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ f اور g کھلے وقفہ I پر قابل تفرق ہیں۔ اس وقفہ پر نقطہ a پایا جاتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $x \neq a$ کی صورت میں I پر $g'(x) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7.30}$$

اگر دائیں ہاتھ حد موجود ہو یا یہ ∞ اور یا $-\infty$ ہو۔

اس مسئلے کا ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال 7.37:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2}}{x^2} && \tfrac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x} && \tfrac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} && \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ہے}
\end{aligned}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے جیسے $\frac{0}{0}$ سے کچھ ہٹ کر ملتا ہے آپ حد تلاش کر پائیں گے۔

مثال 7.38:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} && \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 && \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ہے}
\end{aligned}$$

اگر $\frac{0}{0}$ ملنے کے بعد رکنے کی بجائے ہم مزید ایک بار قاعدہ لھوپیٹال استعمال کریں تب ہمیں درج ذیل **غلط** نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

□

مثال 7.39:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x} = \infty \qquad \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال وہاں بھی قابل استعمال ہو گا جہاں غیر معین روپ $\frac{\infty}{\infty}$ ہو۔ اگر $x \to a$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں لا متناہی تک پہنچتے ہوں تب اگر درج ذیل میں دایاں حد موجود ہو تب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ہو گا۔ یہاں a از خود متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال 7.40:

$$\text{(ا)} \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\sin x = 1$$
$$\text{(ب)} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

□

غیر معین حاصل ضرب اور فرق

بعض اوقات ہم غیر معین روپ $0\cdot\infty$ اور $\infty-\infty$ کو الجبرا کی مدد سے $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ لکھ سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم یہ نہیں کہتے ہیں کہ عدد $0\cdot\infty$ یا $\infty-\infty$ موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ عدد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ موجود ہے۔ یہ روپ کسی بھی عدد کو ظاہر نہیں کرتے ہیں بلکہ محض تفاعل کے رویہ کو بیان کرتے ہیں۔

مثال 7.41:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x\cot x && 0\cdot\infty \text{ کی بنا } x\cot x \text{ کو مختلف روپ میں لکھیں}\\
&= \lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{1}{\tan x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} && \text{اب } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}
$$

□

مثال 7.42: تلاش کریں: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

حل: اگر $x\to 0^+$ ہو تب $\sin x\to 0^+$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\to\infty-\infty$$

اسی طرح اگر $x\to 0^-$ ہو تب $\sin x\to 0^-$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=-\infty-(\infty)=-\infty+\infty$$

دونوں صورتوں میں ہم حد جاننا ممکن نہیں ہے۔ ہمیں تفاعل کو نئی صورت

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

میں لکھ کر قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} && \tfrac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0
\end{aligned}
$$

□

نا قابل معلوم طاقت

بعض اوقات ایسے حد جو نا قابل معلوم روپ 1^∞ ، 0^0 یا ∞^0 دیتے ہوں کا لوگارتھم پہلے لینے سے حد تلاش کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ ہم قاعدہ لھوپیٹال سے لوگارتھم کا حد حاصل کر کے قوت نما سے اصل تفاعل کا رویہ جانتے ہیں۔

اگر $\lim_{x\to a} \ln f(x) = L$ ہو تب

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

ہو گا جہاں a متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال 7.43: دکھائیں $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$

حل: حد تلاش کرنے سے نا قابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم $f(x) = (1+x)^{1/x}$ لیتے ہوئے $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} && \tfrac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}\\
&= \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

دیگا۔ یوں اصل تفاعل کا حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

□

مثال 7.44: حد $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ تلاش کریں۔

حل: حد کی تلاش نا قابل معلوم روپ ∞^0 دیتا ہے۔ ہم $f(x) = x^{1/x}$ لے کر $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln f(z)&=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} && \frac{\infty}{\infty}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}\\&=\frac{0}{1}=0\end{aligned}$$

دیگا۔ یوں اصل حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty}x^{1/x}=\lim x\to\infty f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\ln f(x)}=e^0=1$$

□

سوالات

قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال

سوال 7.350 تا سوال 7.391 میں قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

سوال 7.350: $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 7.351: $\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}$

سوال 7.352: $\lim_{t\to -3}\frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$

جواب: $-\frac{23}{7}$

سوال 7.353: $\lim_{t\to 1}\frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$

سوال 7.354: $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

جواب: $\frac{5}{7}$

سوال 7.355: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

سوال 7.356: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t^2}{t}$

جواب: 0

سوال 7.357: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin 5t}{t}$

سوال 7.358: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x-1}$

جواب: -16

سوال 7.359: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

سوال 7.360: $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$

جواب: -2

سوال 7.361: $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{3}} \frac{3\theta+\pi}{\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}$

سوال 7.362: $\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$

جواب: $\frac{1}{4}$

سوال 7.363: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x-\sin \pi x}$

سوال 7.364: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$

جواب: 2

سوال 7.365: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\csc x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

سوال 7.366: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t}$

جواب: 3

سوال 7.367: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t\sin t}{1-\cos t}$

سوال 7.368: $\lim\limits_{x\to (\frac{\pi}{2})^-} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sec x$

جواب: -1

سوال 7.369: $\lim\limits_{x\to(\frac{x}{2})^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x$

سوال 7.370: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{3^{\sin\theta}-1}{\theta}$

جواب: $\ln 3$

سوال 7.371: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{(\frac{1}{2})^{\theta}-1}{\theta}$

سوال 7.372: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$

جواب: $\frac{1}{\ln 2}$

سوال 7.373: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$

سوال 7.374: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

جواب: $\ln 2$

سوال 7.375: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$

سوال 7.376: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$

جواب: 1

سوال 7.377: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

سوال 7.378: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$

جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 7.379: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}, \quad a > 0$

سوال 7.380: $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$

جواب: $\ln 2$

سوال 7.381: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x - \ln\sin x)$

سوال 7.382: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

جواب: 0

سوال 7.383: $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

سوال 7.384: $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

جواب: $-\frac{1}{2}$

سوال 7.385: $\lim_{x\to 0^+}(\csc x-\cot x+\cos x)$

سوال 7.386: $\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

جواب: $\ln 2$

سوال 7.387: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln x}\int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$

سوال 7.388: $\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{e^\theta-\theta-1}$

جواب: -1

سوال 7.389: $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-(1+h)}{h^2}$

سوال 7.390: $\lim_{t\to\infty}\frac{e^t+t^2}{e^t-t}$

جواب: 1

سوال 7.391: $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$

حد جن میں اساس اور قوت نما پائے جاتے ہوں

سوال 7.392 تا سوال 7.401 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7.392: $\lim_{x\to 1^+}x^{1/(1-x)}$

جواب: $\frac{1}{e}$

سوال 7.393: $\lim_{x\to 1^+}x^{1/(x-1)}$

سوال 7.394: $\lim_{x\to\infty}(\ln x)^{1/x}$
جواب: 1

سوال 7.395: $\lim_{x\to e^+}(\ln x)^{1/(x-e)}$

سوال 7.396: $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$
جواب: $\frac{1}{e}$

سوال 7.397: $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$

سوال 7.398: $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{1/(2\ln x)}$
جواب: $e^{1/2}$

سوال 7.399: $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$

سوال 7.400: $\lim_{x\to 0^+} x^x$
جواب: 1

سوال 7.401: $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.402 تا سوال 7.405 میں قاعدہ لھوپیٹال سے حد تلاش کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ آپ گول دائرے میں گھومتے رہیں گے۔ کسی دوسرے طریقہ سے حد تلاش کریں۔

سوال 7.402: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$
جواب: 3

سوال 7.403: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

سوال 7.404: $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x}$
جواب: 1

سوال 7.405: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\csc x}$

سوال 7.406: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$

ب. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

جواب: (ب) درست

سوال 7.407: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2+\sin x} = \frac{2}{2+0} = 1$

ب. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \frac{-2}{0-1} = 2$

سوال 7.408: درج ذیل میں صرف ایک درست ہے۔ اس کو تلاش کریں۔ باقی دو کیوں غلط ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = 0$

ب. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = -\infty$

ج. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1$

د. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

جواب: (د) درست

سوال 7.409: درج ذیل فرض کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

دکھائیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ مگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا یہ قاعدہ لھوپیٹال کی تردید کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.410: درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کے لئے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟
جواب: $c = \frac{25}{10}$

سوال 7.411: درج ذیل تفاعل کو $\theta = 0$ پر دائیں سے استمراری بنانے کے لئے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{(\tan\theta)^2}{\sin(4\theta^2/\pi)}, & \theta \neq 0 \\ c, & \theta = 0 \end{cases}$$

آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

سوال 7.412: مسلسل سود در سود کا کلیہ
ہم نے حصہ 7.5 میں مسلسل سود در سود کا کلیہ $A(t) = A_0e^{rt}$ اخذ کرتے ہوئے درج ذیل دعویٰ کیا تھا۔

$$\lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0e^{rt}$$

یہ دعویٰ تب درست ہو گا جب درج ذیل درست ہو

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = e^{rt}$$

اور یہ اس صورت درست ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = e^{r}$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، حد سے نا قابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال سے حد کی تصدیق کریں۔

سوال 7.413: اگر $x > 0$ ہو تب درج ذیل کی زیادہ سے زیادہ قیمت (اگر پائی جاتی ہو تب) تلاش کریں۔

ا. $x^{1/x}$

ب. x^{1/x^2}

ج. x^{1/x^n}، n مثبت عدد صحیح ہے

د. دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لئے $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n}=1$ ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.414: مستقل e کی قیمت کا تلاش

ا. قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

ب. تفاعل $f(x)=(1+1/x)^x$ کی قیمت $x=10,10^2,10^3,\cdots$ کے لئے کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کرتے ہوئے دیکھیں کہ آپ اصل قیمت $e=2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$ کے کتنے قریب پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ x کی قیمت بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہو گا، بعض کیلکولیٹروں میں پور و پور خلل کی بنا کسی مخصوص حد سے x کی قیمت بڑھنے کے بعد نتائج کم درست ہوں گے۔

ج. تفاعل $f(x)=(1+1/x)^x$ کو ترسیم کریں۔ یہاں بھی x کی زیادہ بڑی قیمت پر پور و پور خلل کی بنا نتیجہ کم درست ہو گا۔

سوال 7.415: آئیں درج ذیل دو حد میں فرق پر غور کریں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

ا. وقفہ $x\geq 0$ کے لئے درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x,\quad g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

تفاعل f کا رویہ اور g کا رویہ کیسا ہے؟ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔

ب. قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی حاصل کردہ قیمت کی تصدیق کریں۔

سوال 7.416: (ا) متغیر x کے کسی موزوں وسیع وقفہ پر $f(x) = x - \sqrt{x^2 + x}$ ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

$$\lim_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$$

(ب) قاعدہ لھوپیٹال سے اس حد کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے کے لئے پہلے $f(x)$ کو $\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$ سے ضرب دے کر شمار کنندہ کی سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال 7.417: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

سوال 7.418: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - (3x + 1)\sqrt{x} + 2}{x - 1}$$

سوال 7.419: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$ کو $x = 1$ کے نزدیک ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2}{x \ln x - x - \cos \pi x}$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $0 < x \le 11$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 7.420: $(\sin x)^x$ کی $[0, \pi]$ تک استمراری توسیع

ا. وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر $f(x) = (\sin x)^x$ ترسیم کریں۔ تفاعل f کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کی خاطر آپ f کی کیا قیمت مقرر کریں گے؟

ب. جزو-ا میں اپنے جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر قاعدہ لھوپیٹال سے $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. وقفہ $[0, \pi]$ پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت ترسیم سے معلوم کریں۔ یہ قیمت کس نقطہ پر پائی جاتی ہے؟

د. جزو-ج میں اپنے جواب کو مزید بہتر بنانے کی خاطر f' کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ محور x کو کہاں قطع کرتا ہے۔ اپنے کام کو آسان بنانے کی خاطر آپ f' میں قوم نما حصہ کو رد کرتے ہوئے صرف اس حصہ کو ترسیم کر سکتے ہیں جس کا صفر پایا جاتا ہو۔

ھ. کی مزید بہتر زیادہ سے زیادہ قیمت جاننے کی خاطر مساوات $f' = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

و. جزو-ج، د اور ہ میں حاصل نقطوں پر f کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کریں۔ کون سی قیمت بہترین جواب ہے؟

سوال 7.421: تفاعل $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$

ا. وقفہ $-7 \le x \le 7$ پر $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$ ترسیم کریں۔ ترسیم میں درز کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہ درز کتنے چوڑے ہیں؟

ب. اب وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر f ترسیم کریں۔ اگرچہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر f نا قابل معلوم ہے اس کے باوجود ترسیم میں اس نقطہ پر درز نہیں پایا جاتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر ترسیم f کی کیا قیمت دیتا ہے؟ (اشارہ۔ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے $x \to (\pi/2)^-$ اور $x = (\pi/2)^+$ کے لئے f کے حد تلاش کریں۔)

ج. جزو-ب کے ترسیم سے f کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمت تلاش کریں اور وہ نقطے بھی تلاش کریں جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

سوال 7.422: x کی طاقتوں میں $\ln x$ کا مقام
درج ذیل کلیات کے سلسلہ میں درزوں

$$\int t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^k}{k} + C, \quad k \neq 0 \tag{7.31}$$

کو قدرتی لوگارتھم

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

بھرتا ہے لیکن ان کلیات کو دیکھ کر یہ کہنا ممکن نہیں ہو گا کہ قدرتی لوگارتھم ان میں صحیح بیٹھتا ہے۔ ہم مساوات 7.31 میں سے الٹ تفرق

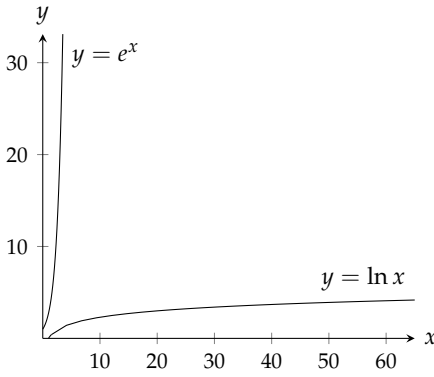
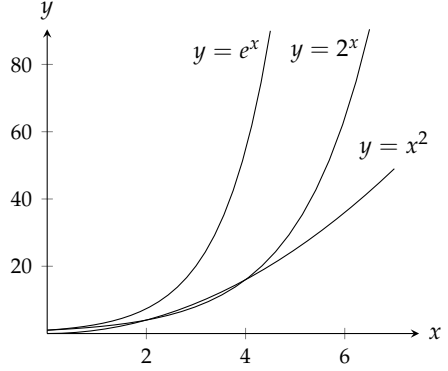
$$\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^k - 1}{k}, \quad x > 0$$

کی ترسیم کا $\ln x$ کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے اس عمل کو دیکھ سکتے ہیں۔

ا. وقفہ $0 \le x \le 50$ پر $k = \mp 1, \mp 0.5, \mp 0.1, \mp 0.05$ کے لئے $f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$ ترسیم کریں۔ ان کے ساتھ $\ln x$ بھی ترسیم کریں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{k \to 0} \frac{x^k - 1}{k} = \ln x$$

شکل 7.37: تفاعل $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور تفاعل $y = x^2$

شکل 7.38: تفاعل $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ

سوال 7.423: تصدیق برائے سوال 6.269، حصہ 6.7
درج ذیل کی بہتر سے بہتر قیمت ترسیم کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

7.7 اضافی شرح نمو

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تفاعل کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تفاعل پر غور کریں گے جو $x \to \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

اضافی شرح نمو

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل (جنہیں ہم نے باب 4 میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تفاعل، مثلاً 2^x اور e^x ، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تفاعل یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل 7.37 میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \to \infty$ کرنے سے تفاعل 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1\,000\,000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی (سوال 7.442)۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تفاعل $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تفاعل کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ $1\,\text{cm}$ ہے۔یوں $x = 1\,\text{cm}$ پر $y = e^1 \approx 3\,\text{cm}$ ہو گا۔یوں $x = 6\,\text{cm}$ پر $y = e^6 \approx 403\,\text{cm}$

یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔اسی طرح $x = 10\,\text{cm}$ پر $y = e^{10} \approx 22\,026\,\text{cm}$ یعنی $220\,\text{m}$ ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24\,\text{cm}$ ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24\,\text{cm}$ پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18}\,\text{cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13}\,\text{km} \\ &\approx 5 \text{ نوری سال} \end{aligned}$$

اس کے باوجود x محور پر آپ مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \to \infty$ کرنے سے لوگارتھمی تفاعل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی (سوال 7.444)۔یوں محور کا پیمانہ $1\,\text{cm}$ لیتے ہوئے مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہو گا (شکل 7.38)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگارتھمی تفاعل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔جب ہم کہتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرنے سے کسی بھی تفاعل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تفاعل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہو گا۔

تعریف: $x \to \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح
فرض کریں کافی بڑے x کے لئے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

ا. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی۔

ب. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \qquad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہو گی۔

□

ان تعریف کے تحت تفاعل $y = 2x$ تفاعل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور متناہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لئے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد " x کی بڑی قیمتوں کے لئے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے،" لینا چاہیے۔

مثال 7.45: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی بنا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال دو مرتبہ استعمال کیا گیا}$$

□

مثال 7.46: (ا) ∞ $x \to \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

(ب) $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما تفاعل کبھی بھی ایک شرح شے نہیں بڑھتے ہیں۔ اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

□

مثال 7.47: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$$

□

مثال 7.48: $x \to \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی:

$$\lim x \to \infty \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

مثال 7.49: قوت نما تفاعل کے برعکس $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگارتھمی تفاعل ایک جیسے شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim x \to \infty \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔ □

اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \to \infty$ کرتے ہوئے gf کے بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو گی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

یعنی

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

ہے۔ اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب $L_1 L_2$ بھی غیر صفر اور متناہی ہو گا۔

مثال 7.50: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2+5}$ اور $(2\sqrt{x}-1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

حل: ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح رہی ہے جو تفاعل x کی ہے:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4$$

یوں دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہو گی۔ □

رتبہ اور "o" علامتیت

بڑے O اور چھوٹے o کی علامت کمپیوٹر سائنس میں عام استعمال ہوتی ہے۔ انہیں یہاں متعارف کیا جاتا ہے۔

تعریف: اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ f کا رتبہ g سے کم ہے جس کو $f = o(g)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو "f، g کا چھوٹا عددی o ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

یوں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $f = o(g)$ سے مراد $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح g سے کم ہے۔

مثال 7.51:

$$\text{چونکہ} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لہٰذا} \quad x \to \infty \quad \text{پر} \quad \ln x = o(x)$$

$$\text{چونکہ} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0 \quad \text{لہٰذا} \quad x \to \infty \quad \text{پر} \quad x^2 = o(x^3+1)$$

□

تعریف: فرض کریں کافی بڑے x پر $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔ تب کافی بڑے x پر اگر کسی مثبت عدد صحیح M کے لئے

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

ہو تب $x \to \infty$ پر f کا رتبہ زیادہ سے زیادہ g کے رتبے جتنا ہو گا۔ اس کو ہم $f = O(g)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس کو "f، g کا بڑا O ہے' پڑھا جاتا ہے۔

□

مثال 7.52: چونکہ کافی بڑے x کے لئے $\frac{x+\sin x}{x} \leq 2$ ہے لہٰذا $x \to \infty$ پر $x + \sin x = O(x)$ ہو گا۔ □

مثال 7.53: $x \to \infty$ پر $\frac{e^x+x^2}{e^x} \to 1$ کی بنا $x \to \infty$ پر $e^x + x^2 = O(e^x)$ ہو گا۔ اسی طرح $x \to \infty$ پر $\frac{x}{e^x} \to 0$ کی بنا $x \to \infty$ پر $x = O(e^x)$ ہو گا۔ □

تعریف پر دوبارہ نظر دوڑاتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ کافی بڑے x پر مثبت تفاعل کے لئے $f = o(g)$ سے مراد $f = O(g)$ ہے۔ اس کے علاوہ اگر f اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے (سوال 7.434)۔

7.7.1 ترتیبی اور ثنائی تلاش

کمپیوٹر کسی لائحہ کار کے تحت قدم با قدم چل کر کوئی کام سر انجام دیتا ہے۔اس لائحہ کار کو **کمپیوٹر الخوارزم**[22] کہتے ہیں۔اس لائحہ کار کی کار گزاری جاننے کی خاطر ماہرین عموماً اس کام کو سرانجام کرنے کے لئے درکار قدموں کی گنتی کرتے ہیں۔ ایک ہی کام سرانجام دینے کے دو مختلف لائحہ کار کی کار گزاری میں بہت زیادہ فرق ہو سکتا ہے جنہیں بڑے O علامتی روپ میں پیش کیا جاتا ہے۔ آئیں ایک مثال دیکھتے ہیں۔

ایک لغت میں کسی ایک حرف سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد $26\,000$ ہے۔ آپ اس حرف سے شروع ہونے والے ایک لفظ کو دو طریقوں سے تلاش کر سکتے ہیں۔ پہلی ترکیب میں آپ پہلے لفظ سے شروع کرتے ہوئے ایک ایک لفظ پڑھ کر درکار لفظ تک پہنچتے ہیں۔ اس ترکیب کو **ترتیبی تلاش**[23] کہتے ہیں جو لغت میں ترتیب سے الفاظ لکھے گئے ہونے سے استفادہ نہیں کرتا ہے۔ اس ترتیب میں آپ ہر صورت لفظ تلاش کر پائیں گے (یا جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے) لیکن عین ممکن ہے کہ آپ کو $26\,000$ قدم چلنا پڑے۔

اس سے بہتر ترکیب میں آپ لغت کے عین وسط (ایک دو الفاظ آگے پیچھے ہو سکتے ہیں) میں ایک لفظ کو دیکھتے ہیں۔ چونکہ لغت میں الفاظ ترتیب سے ہیں لہٰذا آپ معلوم کر پائیں گے کہ آیا درکار لفظ پہلی نصف یا دوسری نصف حصہ میں ہے۔ لغت کی اس نصف حصہ کو رد کریں جس میں لفظ موجود نہیں ہے۔یوں پہلی قدم میں $13\,000$ الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اب منتخب حصہ کے نصف میں جا کر دیکھیں کہ درکار لفظ کس جانب پایا جاتا ہے۔ یوں دوسرے قدم میں 6500 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہر قدم پر آدھے حصے کو رد کرتے ہوئے چلتے جائیں جب تک آپ درکار لفظ تلاش نہیں کر پاتے یا الفاظ ختم نہیں ہو جاتے۔ چونکہ

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1$$

ہوتا ہے لہٰذا آپ کو زیادہ سے زیادہ 15 قدم چل کر درکار لفظ مل جائے گا یا آپ جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے۔ اس ترتیب کو **ثنائی تلاش**[24] کہتے ہیں۔

ایک سلسلہ جس کی لمبائی n ہو میں کسی جزو کی تلاش کے لئے ترتیبی تلاش کو n قدم درکار ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس ثنائی تلاش استعمال کرتے ہوئے اگر $2^{m-1} < n < 2^m$ ہو تب $m-1 < \log_2 n \le m$ ہو گا اور ایک لفظ تک پہنچنے کی خاطر زیادہ سے زیادہ $m = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\log_2 n$ کا عدد صحیح چھت تفاعل) بار دو حصوں میں تقسیم کی ضرورت پیش آئے گی۔ یوں ثنائی تلاش میں $\log_2 n$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔

بڑے O روپ میں اس تمام کو نہایت خوش اسلوبی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ترتیبی سلسلہ میں ترتیبی تلاش کو $O(n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے جبکہ ثنائی تلاش کو $O(\log_2 n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔ ہماری مثال میں ان دو میں بہت زیادہ فرق پایا جاتا ہے ($26\,000$ بالمقابل 15) اور چونکہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے $\log_2 n$ کے لحاظ سے n زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے لہٰذا n بڑھانے سے یہ فرق زیادہ بڑھے گا۔

---

[22] computer algorithm
[23] sequential search
[24] binary search

سوالات

قوت نما e^x کے ساتھ موازنہ

سوال 7.424: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x+3$ ج. $\sqrt{x}$ ھ. $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ز. $\frac{e^x}{2}$

ب. $x^3+\sin^2 x$ د. 4^x و. $e^{x/2}$ ح. $\log_{10} x$

جواب: (ا) آہستہ (ب) آہستہ (ج) آہستہ (د) تیز (ہ) آہستہ (و) آہستہ (ز) ایک جیسا (ح) آہستہ

سوال 7.425: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $10x^4+30x+1$ ج. $\sqrt{1+x^4}$ ھ. e^{-x} ز. $e^{\cos x}$

ب. $x\ln x - x$ د. $\left(\frac{5}{2}\right)^x$ و. xe^x ح. e^{x-1}

طاقت x^2 کے ساتھ موازنہ

سوال 7.426: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. x^2+4x ج. $\sqrt{x^4+x^3}$ ھ. $x\ln x$ ز. x^3e^{-x}

ب. x^5-x^2 د. $(x+3)^2$ و. 2^x ح. $8x^2$

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) تیز (ج) ایک جیسا (د) ایک جیسا (ہ) آہستہ (و) تیز (ز) آہستہ (ح) ایک جیسا

سوال 7.427: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x^2+\sqrt{x}$ ج. x^2e^{-x} ھ. x^3-x^2 ز. $(1.1)^x$

ب. $10x^2$ د. $\log_{10}(x^2)$ و. $(\frac{1}{10})^x$ ح. x^2+100x

لوگارتھم $\ln x$ کے ساتھ موازنہ

سوال 7.428: $x\to\infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $\log_3 x$ ج. $\ln\sqrt{x}$ ھ. x ز. $\frac{1}{x}$

ب. $\ln 2x$ د. $\sqrt{x}$ و. $5\ln x$ ح. e^x

جواب: (ا) ایک جیسا (ب) ایک جیسا (ج) ایک جیسا (د) تیز (ہ) تیز (و) ایک جیسا (ز) آہستہ (ح) تیز

سوال 7.429: $x\to\infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $\log_2(x^2)$ ج. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ھ. $x-2\ln x$ ز. $\ln(\ln x)$

ب. $\log_{10}10x$ د. $\frac{1}{x^2}$ و. e^{-x} ح. $\ln(2x+5)$

شرح نمو کے لحاظ سے منظم کرنا

سوال 7.430: $x\to\infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے منظم کریں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

ا. e^x ب. x^x ج. $(\ln x)^x$ د. $e^{x/2}$

جواب: د، ا، ج، ب

سوال 7.431: $x\to\infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے ترتیب دیں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

ا. 2^x ب. x^2 ج. $(\ln 2)^x$ د. e^x

بڑا O اور چھوٹا o رتبہ

سوال 7.432: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

ا. $x = o(x)$ ب. $x = o(x+5)$ ج. $x = O(x+5)$ د. $x = O(2x)$ ھ. $e^x = o(e^{2x})$ و. $x + \ln x = O(x)$ ز. $\ln x = o(\ln 2x)$ ح. $\sqrt{x^2+5} = O(x)$

جواب: (ا) غلط (ب) غلط (ج) درست (د) درست (ہ) درست (و) درست (ز) غلط (ح) درست

سوال 7.433: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

ا. $\frac{1}{x+3} = O(\frac{1}{x})$ ب. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ ج. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ د. $2 + \cos x = O(2)$ ھ. $e^x + x = O(e^x)$ و. $x \ln x = o(x^2)$ ز. $\ln(\ln x) = O(\ln x)$ ح. $\ln x = o(\ln(x^2+1))$

سوال 7.434: دکھائیں کہ اگر $x \to \infty$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح برابر ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے۔

سوال 7.435: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ سے کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 7.436: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ زیادہ سے زیادہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: جب f کا درجہ g کے درجہ سے کم یا اس کے برابر ہو۔

سوال 7.437: قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ

موجودہ حصہ میں پیش کی گئی تعریف کو زیادہ عمومی بنانے کی خاطر ہم اس میں $x \to \infty$ کی پابندی ختم کر کے اس کی بجائے $x \to a$ پر حد لیتے ہیں جہاں a حقیقی عدد ہے۔ دکھائیں کہ قاعدہ سمسن سے حاصل قطعی تکمل کی تخمین میں $h \to 0$ کرتے ہوئے خلل $O(h^4)$ ہو گا جبکہ قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل تخمین میں خلل $O(h^2)$ ہو گا۔ یوں ان دو تراکیب کے نتائج کی درستگی کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

دیگر موازنے

سوال 7.438: ناطق تفاعل کے حد کے بارے میں حصہ 4.5 میں حاصل نتیجہ ہمیں $x \to \infty$ کی صورت میں کثیر رکنی کی اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا بتاتا ہے؟
جواب: زیادہ درجے کا کثیر رکنی، کم درجے کے کثیر رکنی سے زیادہ تیز بڑھتا ہے۔ ایک جیسے درجہ کے کثیر رکنی کی شرح نمو برابر ہوتی ہے۔

سوال 7.439: کمپیوٹر ترسیم
(ا) درج ذیل پر تحقیق کریں۔ اس کے بعد قاعدہ لھوپیٹال سے اس تحقیق سے حاصل معلومات کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

(ب) دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت، مستقل a کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے تفاعل $f(x) = \ln(x+a)$ اور $g(x) = \ln x$ کے اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

سوال 7.440: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{10x+1}$ اور $\sqrt{x+1}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل $\sqrt{x}$ کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 7.441: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^4+x}$ اور $\sqrt{x^4-x^3}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل x^2 کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال 7.442: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کی شرح نمو کسی بھی x^n کے شرح نمو سے زیادہ ہو گی، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے، مثلاً $x^{1\,000\,000}$۔ (اشارہ۔ x^n کا n واں تفرق کیا ہے؟)

سوال 7.443: تفاعل e^x ہر کثیر رکنی سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے
دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کسی بھی کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال 7.444:

ا. دکھائیں کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کی صورت میں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو تفاعل $x^{1/n}$ (مثلاً $x^{1/1\,000\,000}$) کی شرح نمو سے کم ہو گی۔

ب. اگرچہ $x^{1/1\,000\,000}$ کی قیمت آخر کار $\ln x$ کی قیمت سے زیادہ ہو گی، وہاں تک پہنچنے کے لئے آپ کو محور x پر بہت دور جانا ہو گا۔ ایسا $x > 1$ تلاش کریں جس پر $x^{1/1\,000\,000} > \ln x$ ہو۔ دھیان رہے کہ $x > 1$ کی صورت میں مساوات $\ln x = x^{1/1\,000\,000}$ کو $\ln(\ln x) = \frac{\ln x}{1\,000\,000}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ج. تفاعل $x^{1/10}$ کو بھی $\ln x$ سے بڑھنے کے لئے بہت وقت درکار ہو گا۔ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $x^{1/10}$ کی ترسیم $\ln x$ کی ترسیم کو کٹ کرتی ہو یا جہاں $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو۔

د. وہ نقطہ جس پر $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو کے قریب اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے x تلاش کریں۔

جواب: (ب) $\ln(e^{17\,000\,000}) = 17\,000\,000 < (e^{17\times10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24\,154\,952.75$
(ج) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$، (د) نقطہ تقاطع $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ہے۔

سوال 7.445: تفاعل $\ln x$ کی شرح نمو ہر کثیر رکنی سے کم ہے
دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو کسی بھی غیر مستقل کثیر رکنی سے کم ہو گی۔

الخوارزم اور تلاش

سوال 7.446: (ا) آپ کمپیوٹر کی مدد سے ایک کام سرانجام دینا چاہتے ہیں۔ آپ کے پاس تین الخوارزم موجود ہیں جن کے لئے کمپیوٹر کو درکار قدموں کی تعداد درج ذیل تفاعل دیتے ہیں۔ n کی بڑی قیمت کی صورت میں ان میں سے کونسا الخوارزم بہترین ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$n\log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

(ب) جزو-الف میں دیے گئے تفاعل کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کونسا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔
جواب: (ا) جو $O(n\log_2 n)$ قدم چلتا ہے۔

سوال 7.447: درج ذیل تفاعل کے لئے سوال 7.446 کو دہرائیں۔

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^n$$

سوال 7.448: ایک مرتب سلسلہ جس میں دس لاکھ اجزاء پائے جاتے ہیں میں سے آپ کو ایک جزو تلاش کرنا ہے۔ ترتیبی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟ ثنائی تلاش کے لئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟
جواب: ترتیبی تلاش کو دس لاکھ قدم چلنا پڑھ سکتا ہے جبکہ ثنائی تلاش میں زیادہ سے زیادہ 20 قدم چلنا ہو گا۔

سوال 7.449: ایک مرتب سلسلہ میں 450 000 اجزاء پائے جاتے ہیں جن میں سے آپ کو ایک جزو کی تلاش ہے۔ ترتیبی تلاش اور ثنائی تلاش کرتے ہوئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

جدول 7.6: تکونیاتی تفاعل کو ایک ایک بنانے کی خاطر دائرہ کار کو پابند کیا گیا ہے۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1,1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1,1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

7.8 الٹ تکونیاتی تفاعل

الٹ تکونی تفاعل کی ضرورت اس وقت پیش آتی ہے جب ہم مثلث کے ضلع کو ناپ کر زاویہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم الٹ تفرق بھی مہیا کرتے ہیں اور تفرقی مساوات کے حل میں عموماً پائے جاتے ہیں۔ اس حصہ میں ان تفاعل کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا اور ان کی قیمت حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

الٹ تکونیاتی کی تعریف

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں دہراتی ہیں لہٰذا یہ ایک ایک تفاعل نہیں ہیں البتہ ان کے دائرہ کار کو ایسے وقفوں پر پابند کیا جا سکتا ہے جہاں یہ ایک ایک ہوں (جدول 7.6)۔

چونکہ پابند دائرہ کار والے تکونیاتی تفاعل ایک ایک ہیں لہٰذا ان کے الٹ پائے جاتے ہیں جنہیں ظاہر کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
y &= \sin^{-1} x\\
y &= \cos^{-1} x\\
y &= \tan^{-1} x\\
y &= \cot^{-1} x\\
y &= \sec^{-1} x\\
y &= \csc^{-1} x
\end{aligned}$$

ہم کہیں گے "x کا الٹ سائن y کے برابر ہے"، وغیرہ۔ یاد رہے کہ ان الٹ تفاعل میں -1 سے مراد الٹ تفاعل ہے اور لہٰذا اس کو ہرگز بالعکس متناسب تصور نہیں کیا جائے۔ مثال کے طور پر $\sin x$ کا بالعکس متناسب $\csc x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$ ہو گا۔

الٹ تکونیاتی تفاعل کے دائرہ کار یوں منتخب کئے جاتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\tfrac{1}{x}) \tag{7.32}$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}(\tfrac{1}{x}) \tag{7.33}$$

$$\cot^{-1} x = \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \tag{7.34}$$

ان تعلقات کو استعمال کر کے $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ اور $\tan^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ہم بالترتیب $\sec^{-1} x$ ، $\csc^{-1} x$ اور $\cot^{-1} x$ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

الٹ سائن اور الٹ کوسائن

متغیر x کے الٹ سائن یعنی $\sin^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کا سائن x کے برابر ہو۔ اسی طرح $\cos^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کے کوسائن کی قیمت x ہو۔

تعریف: $y = \sin^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\sin y = x$ ہو۔ اسی طرح $y = \cos^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[0, \pi]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لئے $\cos y = x$ ہو۔

□

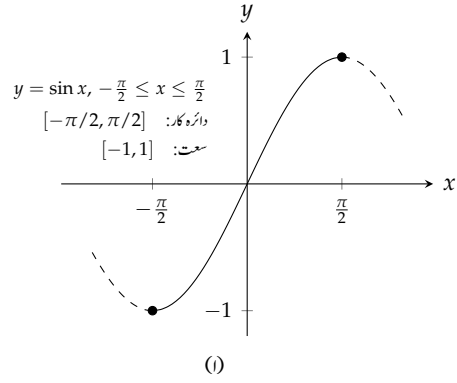
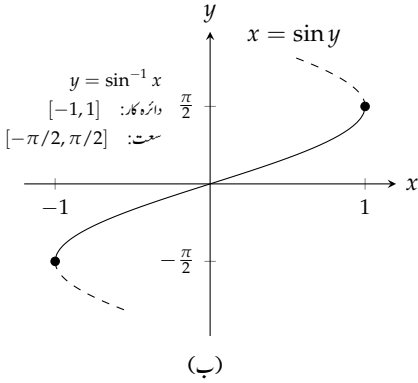
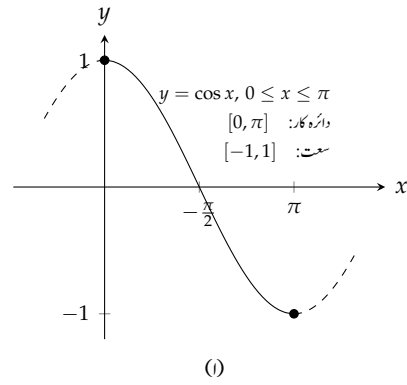
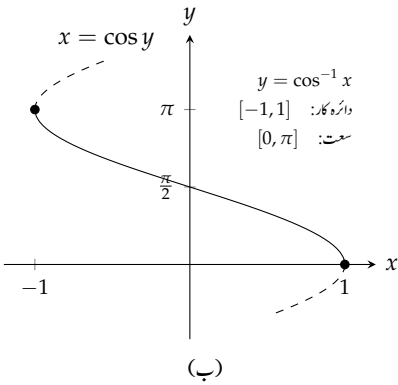
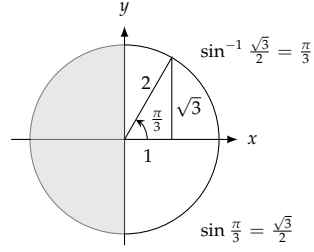
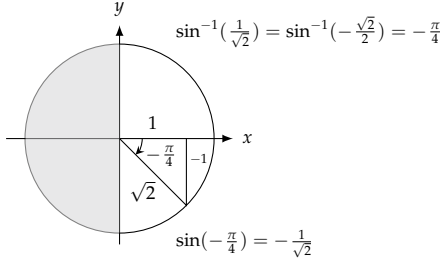
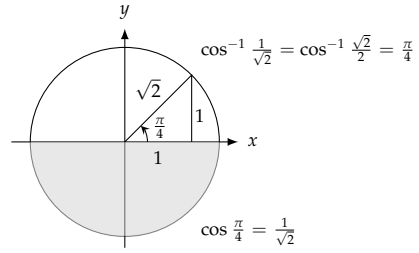
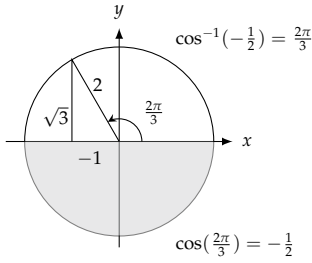
تفاعل $y = \sin^{-1} x$ (شکل 7.39) کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے (اور عین $x = \sin y$ کی ترسیم پر پائی جاتی ہے)۔ یوں الٹ سائن طاق تفاعل ہے:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \tag{7.35}$$

تفاعل $y = \cos^{-1} x$ (شکل 7.40) کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے۔

مثال 7.54: تفاعل $\sin^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ سائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.54 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\sin^{-1} x$ کا سعت $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع چہارم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

شکل 7.39: ترسیمات برائے (ا) $y = \sin x, -\pi/2 \le x \le \pi/2$ اور (ب) الٹ سائن تفاعل $y = \sin^{-1} x$ ؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\sin^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \sin y$ کا کچھ حصہ ہے۔

شکل 7.40: ترسیمات برائے (ا) $y = \cos x, 0 \le x \le \pi$ اور (ب) الٹ کوسائن تفاعل $y = \cos^{-1} x$ ؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\cos^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \cos y$ کا کچھ حصہ ہے۔

شکل 7.41: سائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.54)۔

شکل 7.42: کوسائن اور الٹ سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.55)۔

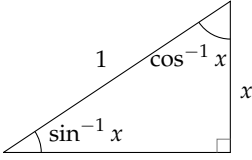
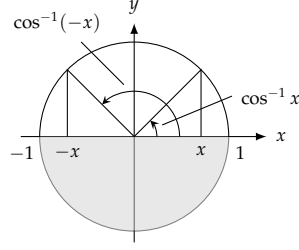
□

مثال 7.55: تفاعل $\cos^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ کوسائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل 7.55 میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\cos^{-1} x$ کا سعت $[0, \pi]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع دوم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

□

شکل 7.43: $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$

شکل 7.44: $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

تماثل جن میں الٹ سائن اور الٹ کوسائن پائے جاتے ہوں

ہم شکل 7.43 میں دیکھتے ہیں کہ x کا الٹ کوسائن تماثل

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{7.36}$$

کو مطمئن کرتا ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{7.37}$$

اسی طرح شکل 7.44 میں مثلث کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{7.38}$$

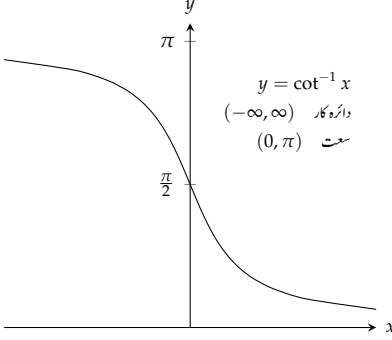
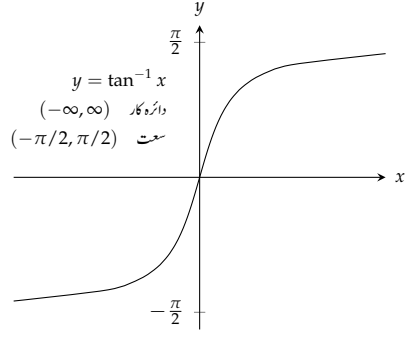
اگرچہ شکل 7.44 میں دی گئی مثلث سے یہ ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے لیکن مساوات 7.38 وقفہ $[-1,1]$ میں دیگر x کے لئے بھی درست ہے۔ یہ حقیقت مساوات 7.35 اور مساوات 7.37 کا نتیجہ ہے (سوال 7.504)۔

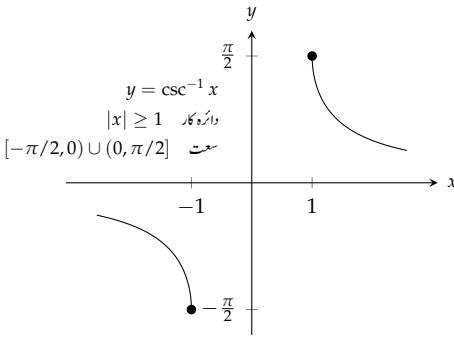
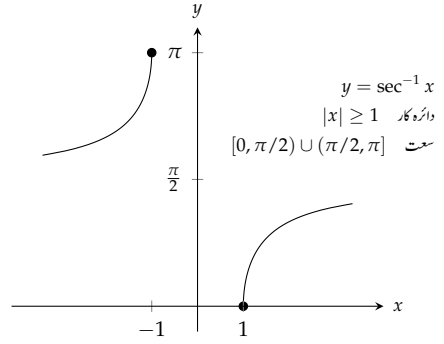
$\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے الٹ

متغیر x کا الٹ ٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا ٹینجنٹ x ہو۔ اسی طرح x کا الٹ کوٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا کوٹینجنٹ x ہو۔

تعریف: وقفہ $(-\pi/2, \pi/2)$ میں وہ عدد جس کا $\tan y = x$ ہو عدد $y = \tan^{-1} x$ ہو گا۔ اسی طرح وقفہ $(0, \pi)$ میں وہ عدد جس کا $\cot y = x$ ہو عدد $y = \cot^{-1} x$ ہو گا۔

□

ہم کھلا وقفہ لیتے ہیں تا کہ ان نقطوں سے نجات حاصل کر سکیں جن پر ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ غیر معین ہیں۔

شکل 7.45: ترسیم $y = \tan^{-1} x$

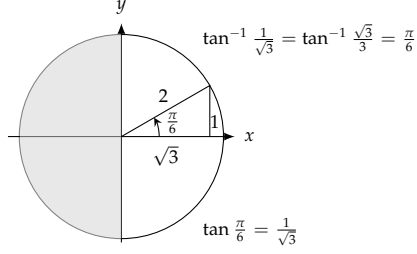
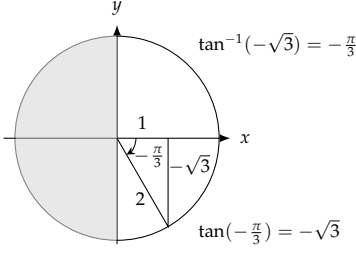
شکل 7.46: ترسیم $y = \cot^{-1} x$

شکل 7.47: ترسیم $y = \sec^{-1} x$

شکل 7.48: ترسیم $y = \csc^{-1} x$

تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم تفاعل $x = \tan y$ کی ترسیم، جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے، کا کچھ حصہ ہے لٰہذا یہ بھی مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل 7.45)۔ الجبرائی طور پر اس سے مراد

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \tag{7.39}$$

ہے، یعنی، الٹ ٹینجنٹ طاق تفاعل ہے۔ تفاعل $y = \cot^{-1} x$ کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکل نہیں پائی جاتی ہے (شکل 7.46)۔

تفاعل $\sec x$ اور $\csc x$ کے پابند شدہ روپ کے الٹ کی ترسیمات کو بالترتیب شکل 7.47 اور شکل 7.48 میں دکھایا گیا ہے۔

انتباہ: متغیر x کی منفی قیمتوں کے لئے $\sec^{-1} x$ کی تعریف پر اتفاق نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم ربع دوم میں $\frac{\pi}{2}$ اور π کے بیچ زاویہ لیں گے۔ اس انتخاب کی بنا $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ ہو گا اور $\sec^{-1} x$ کے دائرہ کار کے ہر حصہ پر $\sec^{-1} x$ بڑھتا ہوا تفاعل ہو گا۔

شکل 7.49: الٹ کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتیں (مثال 7.56)۔

مثال 7.56: الٹ کوٹینجنٹ $\tan^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

الٹ کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتوں کا حصول شکل 7.49 میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل دیگر قیمتیں بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

□

مثال 7.57: اگر $\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ ہو تب $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

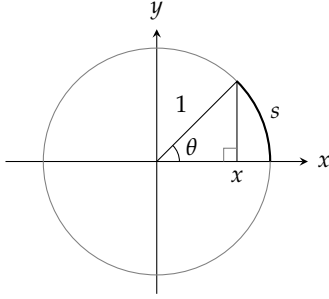
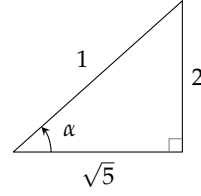
حل: چونکہ $\alpha = \sin^{-1}\frac{2}{3}$ ہے لہٰذا ہم α کو قائمہ مثلث کا ایک زاویہ تصور کرتے ہیں جس کا مخالف ضلع 2 اور وتر 3 ہیں۔ مثلث کا تیسرا ضلع (قاعدہ) درج ذیل ہو گا (شکل 7.50)۔

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \qquad \text{مسئلہ فیثاغورث}$$

ہم مثلث پر قاعدہ کی لمبائی لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}, \csc\alpha = \frac{3}{2}, \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

□

رداس r کے دائرہ میں مرکز پر زاویہ θ اور قوس کی لمبائی s کا تعلق $s = r\theta$ ہے لہٰذا اکائی دائرہ میں $s = \theta$ ہو گا (شکل 7.51)۔ یوں متغیر x کا الٹ کوسائن $\cos^{-1} x$ زاویہ θ دیگا جس کی قیمت مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گی۔ الٹ سائن کے لئے بھی اس قسم کا تعلق پایا جاتا ہے۔

شکل 7.51: اکائی دائرہ میں زاویہ $\theta = \cos^{-1} x$ مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گا۔

شکل 7.50: مثلث کی مدد سے زاویوں کا حصول (مثال 7.57)

مثال 7.58: $\cot\left(\sec^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right)$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم اندر سے باہر کی جانب چلتے ہوئے زاویوں اور نسبتوں کو مثلثوں کی مدد سے ظاہر کریں گے۔

پہلا قدم: سیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع دوم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ا):

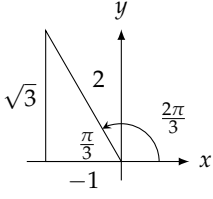
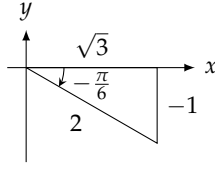
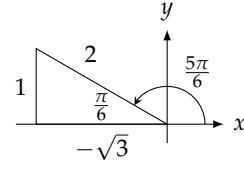
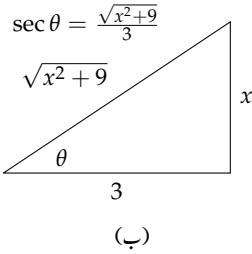
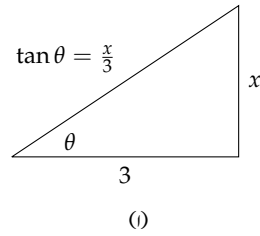
$$\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{2}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

دوسرا قدم: کوسیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع چہارم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل 7.52-ب):

$$\csc^{-1}(-2) = \csc^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

تیسرا قدم: کوٹینجنٹ کی قیمتیں ربع چہارم سے حاصل ہو گی(شکل 7.58-ج):

$$\begin{aligned}
\cot\left(\sec^{-1}(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right) &= \cot\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

□

شکل 7.52: مثلث برائے مثال 7.58

شکل 7.53: مثلث برائے مثال 7.59

مثال 7.59: $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ لے کر زاویہ θ کو قائمہ مثلث میں تصور کرتے ہیں (شکل 7.53-ا)۔ یوں

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قریبی}} = \frac{x}{3}$$

ہو گا۔ مثلث کا وتر

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2+9}$$

ہو گا لہٰذا سیکنٹ کی قیمت درج ذیل ہو گی (شکل 7.53-ب)۔

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

□

سوالات

الٹ تکونیاتی تفاعل کی مخصوص قیمتیں

سوال 7.450 تا سوال 7.461 میں مثال 7.54 تا مثال 7.56 کی طرح حوالہ مثلث استعمال کرتے ہوئے زاویے تلاش کریں۔

سوال 7.450: (ا) $\tan^{-1} 1$ ، (ب) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ، (ج) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

جواب: (ا) $\frac{\pi}{4}$ ، (ب) $-\frac{\pi}{3}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.451: (ا) $\tan^{-1}(-1)$ ، (ب) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ ، (ج) $\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

سوال 7.452: (ا) $\sin^{-1}(\frac{-1}{2})$ ، (ب) $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ، (ج) $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

جواب: (ا) $-\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{4}$ ، (ج) $-\frac{\pi}{3}$

سوال 7.453: (ا) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ ، (ب) $\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$ ، (ج) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

سوال 7.454: (ا) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$ ، (ج) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

جواب: (ا) $\frac{\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.455: (ا) $\cos^{-1}(\frac{-1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ ، (ج) $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

سوال 7.456: (ا) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ ، (ب) $\sec^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$ ، (ج) $\sec^{-1}(-2)$

جواب: (ا) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 7.457: (ا) $\sec^{-1}(\sqrt{2})$ ، (ب) $\sec^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$ ، (ج) $\sec^{-1}(2)$

سوال 7.458: (ا) $\csc^{-1}(\sqrt{2})$ ، (ب) $\csc^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$ ، (ج) $\csc^{-1}(2)$

جواب: (ا) $\frac{\pi}{4}$ ، (ب) $-\frac{\pi}{3}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.459: (ا) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$ ، (ب) $\csc^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$ ، (ج) $\csc^{-1}(-2)$

سوال 7.460: (ا) $\cot^{-1}(-1)$ ، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{3}$ ، (ج) $\cot^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

جواب: (ا) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

سوال 7.461: (ا) $\cot^{-1}(1)$ ، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{-3}$ ، (ج) $\cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

سوال 7.462: اگر $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{13})$ ہو تب $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟
جواب: $\cos\alpha = \frac{12}{13}, \tan\alpha = \frac{5}{12}, \sec\alpha = \frac{13}{12}, \csc\alpha = \frac{13}{5}, \cot\alpha = \frac{12}{5}$

سوال 7.463: اگر $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

سوال 7.464: اگر $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟ جواب: $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan\alpha = -2, \csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}, \cot\alpha = -\frac{1}{2}$

سوال 7.465: اگر $\alpha = \sec^{-1}(\frac{-\sqrt{13}}{2})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

تکونیاتی اور الٹ تکونیاتی اجزاء کی قیمتوں کا حصول

سوال 7.466 تا سوال 7.477 میں درکار قیمت معلوم کریں۔

سوال 7.466: $\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 7.467: $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

سوال 7.468: $\tan\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$
جواب: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

سوال 7.469: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$

سوال 7.470: $\csc(\sec^{-1}2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$
جواب: $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

سوال 7.471: $\tan(\sec^{-1}1) + \sin(\csc^{-1}(-2))$

سوال 7.472: $\sin\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \cos^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$
جواب: 1

سوال 7.473: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) - \sec^{-1} 2\right)$

سوال 7.474: $\sec(\tan^{-1} 1 + \csc^{-1} 1)$
جواب: $-\sqrt{2}$

سوال 7.475: $\sec(\cot^{-1}\sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

سوال 7.476: $\sec^{-1}(\sec(-\frac{\pi}{6}))$ (جواب $-\frac{\pi}{6}$ نہیں ہے۔)
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 7.477: $\cot^{-1}(\cot(-\frac{\pi}{4}))$ (جواب $-\frac{\pi}{4}$ نہیں ہے۔)

تکونیاتی فقرے

سوال 7.478 تا سوال 7.489 میں تکونیاتی فقروں کو حل کریں۔

سوال 7.478: $\sec(\tan^{-1}\frac{x}{2})$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

سوال 7.479: $\sec(\tan^{-1} 2x)$

سوال 7.480: $\tan(\sec^{-1} 3y)$
جواب: $\sqrt{9y^2-1}$

سوال 7.481: $\tan(\sec^{-1}\frac{y}{5})$

سوال 7.482: $\cos(\sin^{-1} x)$
جواب: $\sqrt{1-x^2}$

سوال 7.483: $\tan(\cos^{-1} x)$

سوال 7.484: $\sin(\tan^{-1}\sqrt{x^2-2x}), \quad x \geq 2$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

سوال 7.485: $\sin(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

سوال 7.486: $\cos(\sin^{-1}\frac{2y}{3})$
جواب: $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

سوال 7.487: $\cos(\sin^{-1}\frac{y}{5})$

سوال 7.488: $\sin(\sec^{-1}\frac{x}{4})$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

سوال 7.489: $\sin(\sec^{-1}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x})$

حد

سوال 7.490 تا سوال 7.497 میں حد تلاش کریں۔ جہاں شبہ ہو وہاں تفاعل کی ترسیم پر نظر ڈالیں۔

سوال 7.490: $\lim_{x\to 1^-}\sin^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 7.491: $\lim_{x\to -1^+}\cos^{-1} x$

سوال 7.492: $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 7.493: $\lim_{x\to -\infty}\tan^{-1} x$

سوال 7.494: $\lim_{x\to\infty}\sec^{-1} x$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 7.495: $\lim_{x\to -\infty}\sec^{-1} x$

سوال 7.496: $\lim_{x\to\infty}\csc^{-1} x$
جواب: 0

سوال 7.497: $\lim_{x\to -\infty}\csc^{-1} x$

شکل 7.54: تدریسی کمرہ میں تختہ سیاہ (سوال 7.498)

شکل 7.55: جسم طواف (سوال 7.499)

شکل 7.56: مخروط برائے سوال 7.500

نظریہ اور استعمال

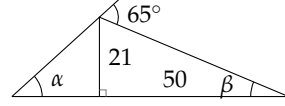
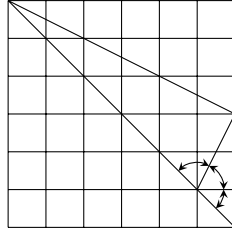
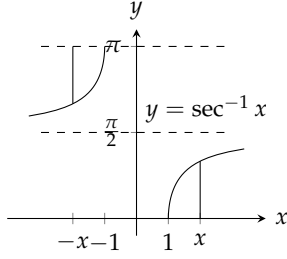
سوال 7.498: آپ کے اسکول کے تدریسی کمروں میں لکھائی کا **تختہ سیاہ**[25] زمین سے $1.25\,\mathrm{m}$ کی اونچائی سے شروع ہوتا ہے جبکہ اس کا قد $2\,\mathrm{m}$ میٹر ہے۔ آپ تختہ سیاہ سے x میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔ دکھائیں کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ $\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{3.25} - \cot^{-1}\frac{x}{1.25}$ ہے (شکل 7.54)۔

سوال 7.499: منحنی $y = \sec^{-1} x$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.55)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 7.500: ایک مخروط کا ترچھا قد $3\,\mathrm{m}$ ہے (شکل 7.56)۔ مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کس زاویہ α پر حاصل ہو گا۔
جواب: $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7^\circ$

سوال 7.501: زاویہ α کو شکل 7.57 میں دریافت کریں۔

سوال 7.502: آپ $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \pi$ کی تصدیق شکل 7.58 کی مدد سے کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے دیکھیں۔

---
[25] black board

شکل 7.59: ترسیم برائے سوال 7.503

شکل 7.58: برائے سوال 7.502

شکل 7.57: برائے سوال 7.501

سوال 7.503: (ا) تماثل $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ کو شکل 7.59 کی مدد سے جیومیٹریائی طور پر اخذ کریں۔ (ب) اسی تماثل کو درج ذیل دو مساوات کی مدد سے تحلیلی طور پر اخذ کریں۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{7.37 مساوات}$$
$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\tfrac{1}{x}) \qquad \text{7.32 مساوات}$$

سوال 7.504: تماثل $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ کو $0 < x < 1$ کے لئے شکل 7.44 سے اخذ کیا گیا۔ اس کی تصدیق وقفہ $[-1,1]$ کے باقی حصہ کے لئے کرنے کی خاطر $x = 1$ ، $x = 0$ اور $x = -1$ اس تماثل میں پر کر کے دیکھیں۔ اس کے بعد وقفہ $(-1,0)$ میں x کے لئے اس کی تصدیق کی خاطر $x = -a,\ a > 0$ لیتے ہوئے مساوات 7.35 اور مساوات 7.37 کا اطلاق مجموعہ $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$ پر کریں۔

سوال 7.505: دکھائیں کہ مجموعہ $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ مستقل ہے۔

سوال 7.506 تا سوال 7.509 میں کون سے فقرے معین اور کون سے غیر معین ہیں؟

سوال 7.506: (ا) $\tan^{-1} 2$ ، (ب) $\cos^{-1} 2$

جواب: (ا) معین؛ ایسا زاویہ پایا جاتا ہے جس کا ٹینجنٹ 2 کے برابر ہے۔ (ب) غیر معین؛ ایسا کوئی زاویہ نہیں پایا جاتا ہے جس کا کوسائن 2 کے برابر ہو۔

سوال 7.507: (ا) $\csc^{-1} \frac{1}{2}$ ، (ب) $\csc^{-1} 2$

سوال 7.508: (ا) $\sec^{-1} 0$ ، (ب) $\sin^{-1} \sqrt{2}$

جواب: (ا) غیر معین؛ کسی زاویے کا سیکنٹ 0 نہیں ہے۔ (ب) غیر معین؛ کسی زاویے کا سائن $\sqrt{2}$ نہیں ہے۔

سوال 7.509: (ا) $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(-5)$

کیلکولیٹر استعمال کریں

سوال 7.510: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1} 1.5$ ب. $\csc^{-1}(-1.5)$ ج. $\cot^{-1} 2$

جواب: (ا) 0.84107 ، (ب) -0.72973 ، (ج) 0.46365

سوال 7.511: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1}(-3)$ ب. $\csc^{-1} 1.7$ ج. $\cot^{-1}(-2)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.512 تا سوال 7.514 میں ہر ایک مرکب تفاعل کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔ ان مرکب تفاعل کو علیحدہ علیحدہ ترسیم کریں۔ کیا انفرادی ترسیمات معنی رکھتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ اگر کوئی فرق نظر آئے، اس پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.512: (ا) $y = \tan^{-1}(\tan x)$ ، (ب) $y = \tan(\tan^{-1} x)$

جواب: (ا) دائرہ کار: تمام حقیقی اعداد ماسوائے وہ جن کی روپ $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ہو جہاں k عدد صحیح ہے؛ سعت: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (ب) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سعت $-\infty \le y \le \infty$

سوال 7.513: (ا) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ ، (ب) $y = \sin(\sin^{-1} x)$

سوال 7.514: (ا) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ ، (ب) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

جواب: (ا) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سعت $0 \le y \le \pi$ (ب) دائرہ کار: $-1 \le x \le 1$ ؛ سعت $-1 \le y \le 1$

سوال 7.515: تفاعل $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(\frac{1}{x}))$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال 7.516: تفاعل $y = \frac{4x}{x^2+1}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$ بھی ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

جواب: ترسیمات بالکل ایک جیسے ہیں۔

سوال 7.517: ناطق تفاعل $y = \frac{2-x^2}{x^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = \cos(2\sec^{-1} x)$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

7.9 الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل

الٹ تکونیاتی تفاعل مختلف اقسام کے تفاعل، جو انجینئری، طبیعیات اور ریاضیات میں رونما ہوتے ہیں، کے الٹ تفرق مہیا کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں اور متعلقہ تکملات پر غور کرتے ہیں۔

مثال 7.60:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(ا)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\sqrt{x+1} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x+1}) \qquad \text{(ب)}\\ &= \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(-3x) &= \frac{1}{|-3x|\sqrt{(-3x)^2-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3x) \qquad \text{(ج)}\\ &= \frac{-3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}\end{aligned}$$

□

مثال 7.61:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{\tan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} e^u\,\mathrm{d}u \qquad\qquad u=\tan^{-1}u\\ &= e^u\Big]_0^{\pi/4} = e^{\pi/4}-1\end{aligned}$$

□

الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}(\sin^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{7.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{7.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{7.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cot^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{7.43}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sec^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{7.44}$$

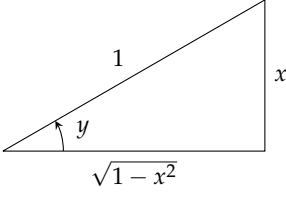
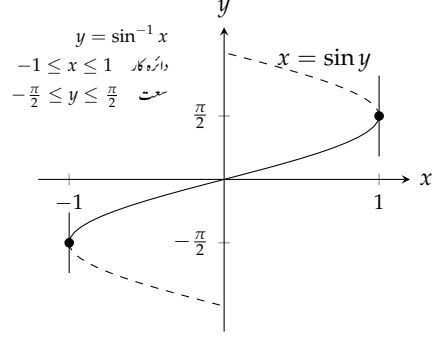
$$\frac{\mathrm{d}(\csc^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{7.45}$$

آئیں مساوات 7.40 اور مساوات 7.44 کو حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 7.42 کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.41، مساوات 7.43 اور مساوات 7.45 کو موزوں تماثل تفرق کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال 7.598 تا سوال 7.600)۔

تفاعل $y = \sin^{-1} u$ کا تفرق

ہم جانتے ہیں کہ وقفہ $-\frac{y}{2} < y < \frac{y}{2}$ میں تفاعل $x = \sin y$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق، یعنی کوسائن، اس وقفہ پر مثبت ہے۔ یوں مسئلہ 7.1 ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ پورے وقفہ $-1 < x < 1$ پر الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ قابل تفرق ہو گا۔ چونکہ نقطہ $x = 1$ اور $x = -1$ پر اس کے ترسیم کے مماس انتصابی ہیں (شکل 7.60) للہذا ان نقطوں پر ہم الٹ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کو قابل تفرق تصور نہیں کر سکتے ہیں۔

ہم $y = \sin^{-1} x$ کا تفرق درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہی:

$\sin y = x$	$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) = 1$	دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق
$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$	زنجیری قاعدہ
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}$	وقفہ پر $\cos y > 0$ ہے للہذا تقسیم کیا جا سکتا ہے
$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	شکل 7.61

شکل 7.61: اس حوالہ مثلث میں $\sin y = \frac{x}{1} = x$ اور $\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ ہو گا۔

شکل 7.60: تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم کے مماس نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر انتصابی ہیں۔

یوں x کے لحاظ سے $y = \sin^{-1} x$ کو تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

اگر x کے لحاظ سے u قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = \sin^{-1} u$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کی اطلاق سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| < 1$$

تفاعل $y = \sec^{-1} u$ کا تفرق

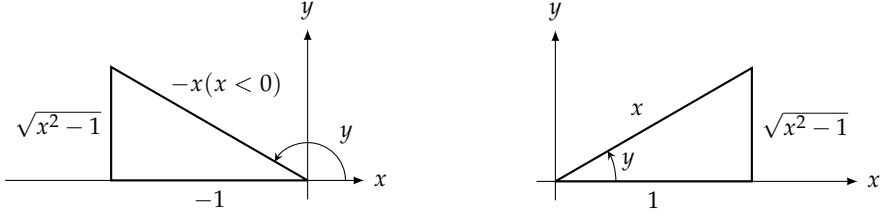
ہم $y = \sec^{-1} x, |x| > 1$ کا تفرق بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\sec y = x \qquad y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec y) = 1 \qquad \text{x کے لحاظ سے دونوں اطراف کا تفرق}$$

$$\sec y \tan y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$= \mp \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{شکل 7.62}$$

شکل 7.62: دونوں ربع میں $\sin y = x$ ہے۔ ربع اول میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1}$ ہے جبکہ ربع دوم میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(-1)} = -\sqrt{x^2-1}$ ہے۔

درج بالا میں تیسرے قدم پر چونکہ $|x| > 1$ ہے لہٰذا y وقفہ $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ میں پایا جائے گا جس کی بنا $\sec y \tan y \neq 0$ ہو گا لہٰذا دونوں اطراف کو غیر صفر $\sec y \tan y$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

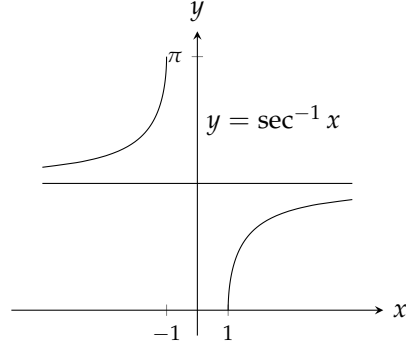
علامت کے بارے میں ہم کیا کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں (شکل 7.63) کہ $|x| > 1$ کے لئے $y = \sec^{-1} x$ کی ترسیم کی ڈھلوان مثبت رہتی ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < -1 \end{cases} \tag{7.46}$$

مطلق قیمت استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات 7.46 کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$$

اگر $|u| > 1$ ہو اور x کا u قابل تفرق تفاعل ہو تب زنجیری قاعدہ کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| > 1$$

شکل 7.63: قوس $y = \sec^{-1} x$ کی ڈھلوان $x < -1$ اور $x > 1$ دونوں کے لئے مثبت ہے۔

کلیات تکمل

ہم مساوات 7.40، مساوات 7.42 اور مساوات 7.44 جہاں $a = 1$ ہے، سے تکمل کے درج ذیل تین اہم کلیات حاصل ہوتے ہیں جہاں $a \neq 0$ مستقل ہے۔

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad u^2 < a^2 \text{ کے لئے درست ہے} \tag{7.47}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad \text{تمام } u \text{ کے لئے درست ہے} \tag{7.48}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C \qquad u^2 > a^2 \text{ کے لئے درست ہے} \tag{7.49}$$

تکمل کے درج بالا کلیات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لے کر ان کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

مثال 7.62:

(ا)
$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} &= \sin^{-1}(x)\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \sin^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

(ب)
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \tan^{-1}(x)\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

(ج)
$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1}(x)\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

□

مثال 7.63:

$$\text{(ا)}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}(\tfrac{x}{3}) + C \qquad a = 3 \text{ اور } u = x \text{ میں } 7.47 \text{ مساوات}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ب)}\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} && a=\sqrt{3},\ u=2x \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C && \text{مساوات } 7.47 \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C
\end{aligned}$$

□

مثال 7.64: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}$ کو حل کریں۔

حل: یہاں ریاضی فقرہ $\sqrt{4x-x^2}$ مساوات 7.47 تا مساوات 7.49 میں سے کسی بھی تکمل میں پائے جانے والے ریاضی فقرے کی طرح نہیں ہے لہٰذا ہم اس کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$4x - x^2 = -(x^2-4x) = -(x^2-4x+4)+4 = 3-(x-2)^2 \qquad \text{تکمیل مربع}$$

اس کے بعد $a = 2$ ، $u = x-2$ اور $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^-u^2}} && a=2,\ u=x-2 \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C && \text{مساوات } 7.47 \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{x-2}{2}) + C
\end{aligned}$$

□

مثال 7.65:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{10+x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \tan^{-1}(\tfrac{x}{\sqrt{10}}) + C \qquad a=\sqrt{10},\, u=x,\, \text{مساوات } 7.48$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} && a=\sqrt{7},\, u=\sqrt{3}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C && \text{مساوات } 7.48 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}}) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{21}} \tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}}) + C
\end{aligned}$$

□

مثال 7.66: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$ حل کریں۔

حل: ہم ثنائی $4x^2+4x$ کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
4x^2+4x+2 = 4(x^2+x)+2 &= 4\Big(x^2+x+\frac{1}{4}\Big)+2-\frac{4}{4} \\
&= 4\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^2+1 = (2x+1)^2+1
\end{aligned}$$

اب $a=1$ ، $u=2x+1$ ، اور $\frac{\mathrm{d}u}{2}=\mathrm{d}x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+1} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} && a=1, u=2x+1 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C && \text{مساوات } 7.48 \\
&= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) && a=1,\, u=2x+1
\end{aligned}$$

□

مثال 7.67: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-5}}$ حل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-5}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2}} && u=2x,\, a=\sqrt{5}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}}\\
&= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات } 7.49\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sec^{-1}\left(\frac{2|x|}{\sqrt{5}}\right) + C && a=\sqrt{5},\, u=2x
\end{aligned}
$$

□

مثال 7.68: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-6}}$ حل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-6}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u}}{\sqrt{u^2-a^2}} && u=e^x,\, a=\sqrt{6}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}}\\
&= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات } 7.49\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C
\end{aligned}
$$

□

سوالات

تفرق کی تلاش

سوال 7.518 تا سوال 7.539 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے دریافت کریں۔

سوال 7.518: $y=\cos^{-1}(x^2)$

جواب: $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

سوال 7.519: $y=\cos^{-1}(\frac{1}{x})$

سوال 7.520: $y = \sin^{-1} \sqrt{2}t$

جواب: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

سوال 7.521: $y = \sin^{-1}(1-t)$

سوال 7.522: $y = \sec^{-1}(2s+1)$

جواب: $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$

سوال 7.523: $y = \sec^{-1} 5s$

سوال 7.524: $y = \csc^{-1}(x^2+1), \quad x > 0$

جواب: $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

سوال 7.525: $y = \csc^{-1} \frac{x}{2}$

سوال 7.526: $y = \sec^{-1} \frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$

جواب: $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

سوال 7.527: $y = \sin^{-1} \frac{3}{t^2}$

سوال 7.528: $y = \cot^{-1} \sqrt{t}$

جواب: $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

سوال 7.529: $y = \cot^{-1} \sqrt{t-1}$

سوال 7.530: $y = \ln(\tan^{-1} x)$

جواب: $\frac{1}{\tan^{-1}(x(1+x^2))}$

سوال 7.531: $y = \tan^{-1}(\ln x)$

سوال 7.532: $y = \csc^{-1}(e^t)$

جواب: $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

سوال 7.533: $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

سوال 7.534: $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s$
جواب: $\frac{-2s^2}{\sqrt{1-s^2}}$

سوال 7.535: $y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s$

سوال 7.536: $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$
جواب: 0

سوال 7.537: $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

سوال 7.538: $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$
جواب: $\sin^{-1} x$

سوال 7.539: $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}(\frac{x}{2})$

تکمل کا حل

سوال 7.540 تا سوال 7.563 میں تکمل حل کریں۔

سوال 7.540: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$
جواب: $\sin^{-1}\frac{x}{7} + C$

سوال 7.541: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$

سوال 7.542: $\int \frac{\mathrm{d}x}{17+x^2}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{17}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{17}} + C$

سوال 7.543: $\int \frac{\mathrm{d}x}{9+3x^2}$

سوال 7.544: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{25x^2-2}}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sec^{-1}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right| + C$

سوال 7.545: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{5x^2-4}}$

سوال 7.546: $\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}s}{\sqrt{4-s^2}}$

جواب: $\frac{2\pi}{3}$

سوال 7.547: $\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{9-4s^2}}$

سوال 7.548: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{8+2t^2}$

جواب: $\frac{\pi}{16}$

سوال 7.549: $\int_{-2}^2 \frac{\mathrm{d}t}{4+3t^2}$

سوال 7.550: $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{4y^2-1}}$

جواب: $-\frac{\pi}{12}$

سوال 7.551: $\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{9y^2-1}}$

سوال 7.552: $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$

جواب: $\frac{3}{2}\sin^{-1} 2(r-1)+C$

سوال 7.553: $\int \frac{6\,\mathrm{d}r}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

سوال 7.554: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+(x-1)^2}$

جواب: $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}(\frac{x-1}{\sqrt{2}})+C$

سوال 7.555: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(3x+1)^2}$

سوال 7.556: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

جواب: $\frac{1}{4}\sec^{-1}\left|\frac{2x-1}{2}\right|+C$

سوال 7.557: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

سوال 7.558: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta \,\mathrm{d}\theta}{1+(\sin\theta)^2}$
جواب: π

سوال 7.559: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x \,\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^2}$

سوال 7.560: $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x \,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$
جواب: $\frac{\pi}{12}$

سوال 7.561: $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)}$

سوال 7.562: $\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}$
جواب: $\frac{1}{2}\sin^{-1} y^2 + C$

سوال 7.563: $\int \frac{\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\tan^2 y}}$

تکمل کا حل

سوال 7.564 تا سوال 7.573 حل کریں۔

سوال 7.564: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$
جواب: $\sin^{-1}(x-2)+C$

سوال 7.565: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$

سوال 7.566: $\int_{-1}^{0} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2t-t^2}}$
جواب: π

سوال 7.567: $\int_{1/2}^{1} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$

سوال 7.568: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-2y+5}$
جواب: $\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{y-1}{2})+C$

سوال 7.569: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+6y+10}$

سوال 7.570: $\int_1^2 \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$
جواب: 2π

سوال 7.571: $\int_2^4 \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

سوال 7.572: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
جواب: $\sec^{-1}\lvert x+1\rvert + C$

سوال 7.573: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

سوال 7.574 تا سوال 7.581 میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

سوال 7.574: $\int \frac{e^{\sin^{-1}x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
جواب: $e^{\sin^{-1}x} + C$

سوال 7.575: $\int \frac{e^{\cos^{-1}x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

سوال 7.576: $\int \frac{(\sin^{-1}x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
جواب: $\frac{1}{3}(\sin^{-1}x)^3 + C$

سوال 7.577: $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1}x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$

سوال 7.578: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\tan^{-1}y)(1+y^2)}$
جواب: $\ln\left\lvert \tan^{-1}y \right\rvert + C$

سوال 7.579: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\sin^{-1}y)\sqrt{1-y^2}}$

سوال 7.580: $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1}x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$
جواب: $\sqrt{3}-1$

سوال 7.581: $\int \frac{\cos(\sec^{-1}x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

حد

سوال 7.582 تا سوال 7.585 میں حد تلاش کریں۔

سوال 7.582: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x}$

جواب: 5

سوال 7.583: $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1} x}$

سوال 7.584: $\lim_{x\to\infty} x \tan^{-1} \frac{2}{x}$

جواب: 2

سوال 7.585: $\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$

کلیات تکمل

سوال 7.586 تا سوال 7.589 میں دیے گئے تکمل کے کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال 7.586: $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

سوال 7.587: $\int x^3 \cos^{-1} 5x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$

سوال 7.588: $\int (\sin^{-1} x)^2\,\mathrm{d}x = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + C$

سوال 7.589: $\int \ln(a^2+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

ابتدائی قیمت مسائل

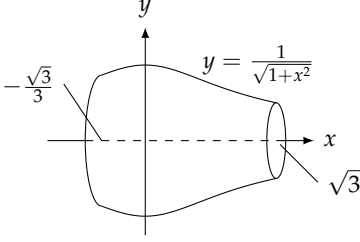
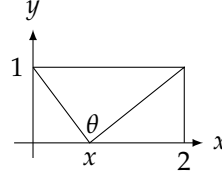
سوال 7.590 تا سوال 7.593 میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں

سوال 7.590: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

جواب: $y = \sin^{-1}(x)$

سوال 7.591: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

سوال 7.592: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, y(2) = \pi$

جواب: $y = \sec^{-1}(x) + \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1$

شکل 7.65: برائے سوال 7.606

شکل 7.64: برائے سوال 7.595

سوال 7.593: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

نظریہ اور مثالیں

سوال 7.594: تدریسی کمرہ (سوال 7.498)
آپ اپنی کرسی کو تختہ سیاہ سے اتنی دور رکھنا چاہتے ہو کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ α زیادہ سے زیادہ ہو۔ آپ کی کرسی تختہ سیاہ سے کتنی دور ہونی چاہیے؟
جواب: $3\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

سوال 7.595: متغیر x کو کونسی قیمت شکل 7.64 میں θ کو بڑے سے بڑا بناتی ہے؟ θ کی بڑی سے بڑی قیمت تلاش کریں۔ شروع اس سے کریں کہ $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2-x)$ ہو گا۔

سوال 7.596: کیا درج ذیل تکمل-ا اور تکمل-ب دونوں درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(ا) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$$

(ب) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

جواب: جی ہاں، $\sin^{-1}(x)$ اور $\cos^{-1}(x)$ میں فرق مستقل $\frac{\pi}{2}$ ہے۔

سوال 7.597: کیا درج ذیل دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(-u)^2}} \qquad x = -u \\
&= \int \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \cos^{-1} u + C \\
&= \cos^{-1}(-x) + C
\end{aligned}$$

سوال 7.598: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.40 سے مساوات 7.41 اخذ کریں۔

$$\cos^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} u$$

سوال 7.599: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.43 سے مساوات 7.42 اخذ کریں۔

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

سوال 7.600: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.44 سے مساوات 7.45 اخذ کریں۔

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

سوال 7.601: تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

حاصل کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے اس کے مساوی $\tan y = x$ کے دونوں اطراف کا تفرق لیں۔

سوال 7.602: درج ذیل تفرق کو مسئلہ 7.1 کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

سوال 7.603: درج ذیل تفرق کو مسئلہ 7.1 کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

سوال 7.604: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{x-1}{x+1}, \ x \geq 0 \quad \text{اور} \quad g(x) = 2\tan^{-1} \sqrt{x}$$

سوال 7.605: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{اور} \quad g(x) = \tan^{-1} \frac{1}{x}$$

سوال 7.606: محور x پر $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ تا $x = \sqrt{3}$ کے بیچ تفاعل $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.65)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $\frac{\pi^2}{2}$

سوال 7.607: قوس $y = \sqrt{1-x^2}, -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ کی لمبائی دریافت کریں۔

کٹلا سے حجم کی تلاش

سوال 7.608 اور سوال 7.609 میں اجسام کی حجم تلاش کریں۔

سوال 7.608: نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ سے $y = -\frac{1}{1+x^2}$ تک ہیں۔

ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے کونے $y = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ اور $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو مس کرتے ہیں۔

جواب: (ا) $\frac{\pi^2}{2}$ (ب) 2π

سوال 7.609: نقطہ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ اور $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے وتر محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.610: کیلکولیٹر
اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔ حوالہ کے لئے 5 مقامات تک درست قیمت $\sin^{-1} 0.6 = 0.643\,50$ ہے۔

$$\sin^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوال 7.611: اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

سوال 7.612: تفاعل $f(x) = \sin^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.613: تفاعل $f(x) = \tan^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

7.10 ہذلولی تفاعل

ہر ایسا تفاعل f جس کے دائرہ کار کا وسط مبدا پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تفاعل e^x کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تفاعل e^x کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب x کا ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ لچکدار ٹھوس مادہ میں لہروں کی حرکت، کھمبوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی **سرد کار**[26] میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

[26] heat sink

جدول 7.7: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل

$\cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی کوسائن
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی سائن
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی ٹینجنٹ
$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوٹینجنٹ
$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی سیکنٹ
$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوسیکنٹ

تعریف اور تماثل

ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کی تعریف جدول 7.7 کی پہلی دو مساواتیں پیش کرتی ہیں۔ اس جدول میں ہذلولی ٹینجنٹ، ہذلولی کوٹینجنٹ، ہذلولی سیکنٹ، اور ہذلولی کوسیکنٹ کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ ہم دیکھیں گے، ہذلولی تفاعل ان تکونیاتی تفاعل کے ساتھ کافی ملتے جلتے ہیں جن کے توسط سے ان کے نام رکھے گئے ہیں (سوال 7.699)۔ ہذلولی تفاعل کو شکل 7.66 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

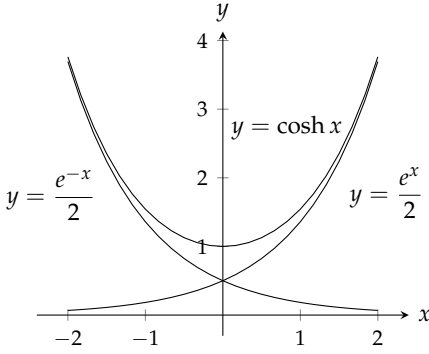
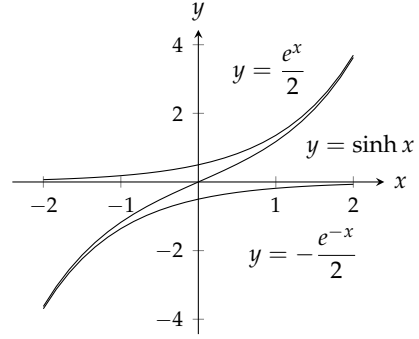
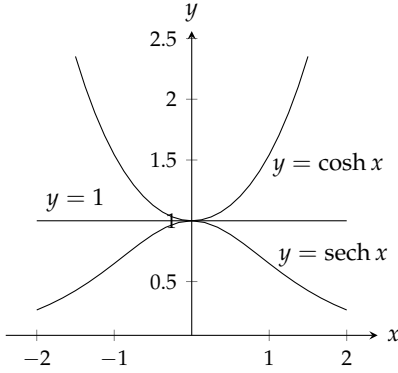
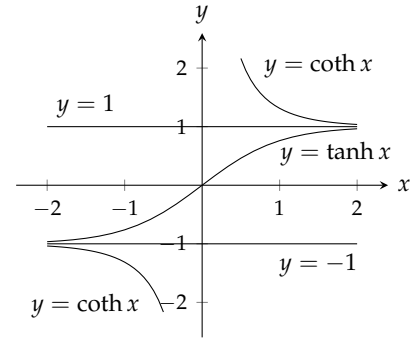
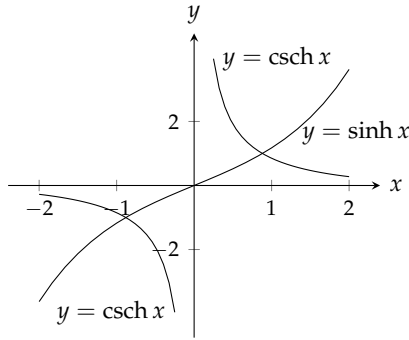
تماثل

ہذلولی تفاعل جدول 7.8 میں دی گئی تماثل کو مطمئن کرتے ہیں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل کو تکونیاتی تفاعل سے جانتے ہیں۔

تفرق اور تکمل

چھ بنیادی ہذلولی تفاعل، قابل تفرق تفاعل e^x اور e^{-x} کے ناطق مجموعے ہیں، لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر قابل تفرق ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔ یہاں بھی تکونیاتی تفاعل کے ساتھ مشابہت نظر آتی ہے۔ جدول 7.9-ا کے کلیات تفرق سے جدول 7.9-ب کے کلیات تکمل حاصل ہوتے ہیں۔ تکونیاتی تفاعل کی طرح ہذلولی تفاعل کی قیمتوں کو بھی کیلکولیٹر سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.69:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tanh\sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{1+t^2})\\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$

شکل 7.66: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل۔

جدول 7.8: ہذلولی تفاعل کے تماثل۔

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$$
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$

جدول 7.9: ہذلولی تفاعل کے کلیات تفرق اور کلیات تکمل۔

(ا) ہذلولی تفاعل کے تفرق۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ب) ہذلولی تفاعل کے تکمل۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

مثال 7.70:

$$\int \coth 5x \, dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} \, dx = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u} \qquad u = \sinh 5x$$
$$= \frac{1}{5} \ln|u| + C = \frac{1}{5} \ln|\sinh 5x| + C$$

□

مثال 7.71:

$$\int_0^1 \sinh^2 x \, dx = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2} \, dx \qquad \text{جدول } 7.8$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh 2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sinh 2x}{2} - x \right]_0^1$$
$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.406\,72$$

□

مثال 7.72:

$$\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} \, dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) \, dx$$
$$= \left[e^{2x} - 2x \right]_0^{\ln 2} = (e^{2 \ln 2} - 2 \ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2 \ln 2 - 1$$
$$\approx 1.6137$$

□

الٹ ہذلولی تفاعل

ہم چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کو تکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh x) = \cosh x > 0$ لہٰذا x کے لحاظ سے ہذلولی سائن بڑھتا تفاعل ہے۔ ہم اس کے الٹ کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

وقفہ $-\infty < x < \infty$ میں ہر x کے لئے $y = \sinh^{-1} x$ کی قیمت وہ ہو گی جس کے ہذلولی سائن کی قیمت x ہو۔ تفاعل $y = \sinh x$ اور $y = \sinh^{-1} x$ کے ترسیمات کو شکل 7.67-ا میں پیش کیا گیا ہے۔

جیسا آپ شکل 7.66-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تفاعل $y = \cosh x$ ایک ایک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ $y = \cosh x,\ x \geq 0$ ایک ایک ہے لہٰذا اس کا الٹ پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

متغیر $x \geq 1$ کے ہر قیمت کے لئے وقفہ $0 \leq y \leq \infty$ میں $y = \cosh^{-1} x$ ایک ایسا عدد ہو گا جس کے ہذلولی کوسائن کی قیمت x ہو گی۔ تفاعل $y = \cosh x,\ x \geq 0$ اور $y = \cosh^{-1} x$ کی ترسیمات کو شکل 7.67-ب میں دکھایا گیا ہے۔

تفاعل $y = \cosh x$ کی طرح $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ بھی ایک ایک نہیں ہے، البتہ x کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے $y = \operatorname{sech} x$ ایک ایک ہوتا ہے جس کا الٹ پایا جائے گا۔ اس الٹ کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ $(0, 1]$ میں x کی ہر قیمت کے لئے $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ وہ عدد ہو گا جس کا الٹ ہذلولی سیکنٹ x ہو گا۔

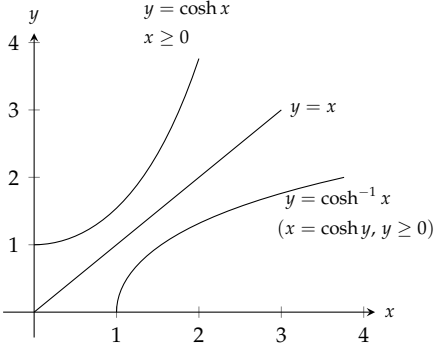
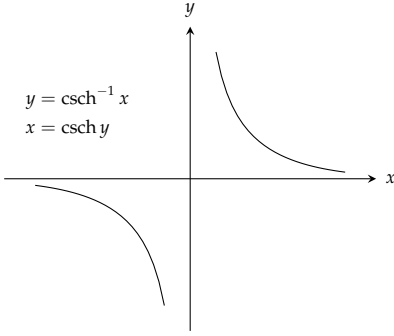
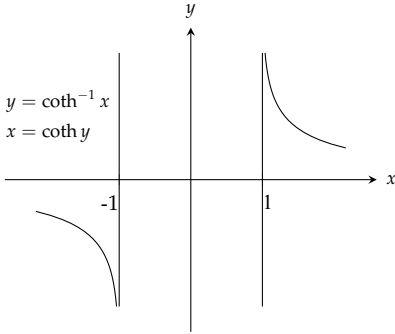
ہذلولی کوسیکنٹ، ہذلولی ٹینجنٹ اور ہذلولی کوٹینجنٹ اپنے اپنے دائرہ کار پر ایک ایک ہیں لہٰذا ان کے الٹ پائے جائیں گے جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \coth^{-1} x$$

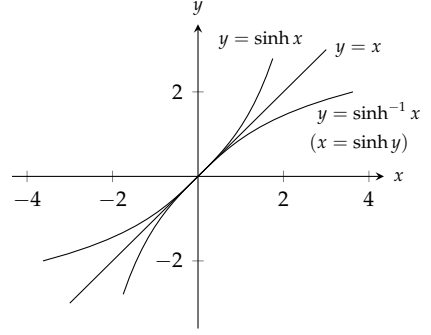
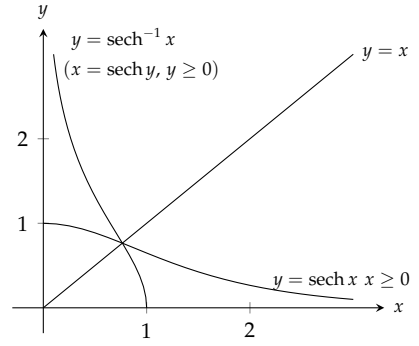
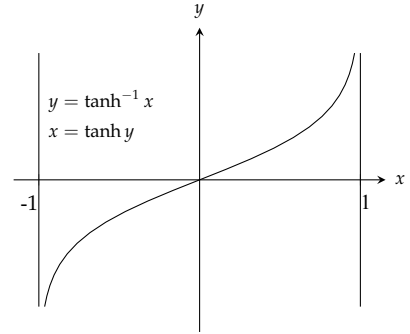
سے ظاہر کیا گیا ہے کو شکل 7.67-د، ہ، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

کارآمد تماثل

چند کارآمد تماثل کو جدول 7.10 میں پیش کیا گیا ہے۔ تفاعل $\cosh^{-1} x$ ، $\sinh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ان تماثل کی استعمال سے $\operatorname{sech}^{-1} x$ ، $\operatorname{csch}^{-1} x$ اور $\coth^{-1} x$ کی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

(ا) ہذلولی سائن اور الٹ ہذلولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

(ب) ہذلولی کوسائن اور الٹ ہذلولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

(ج) ہذلولی سیکنٹ اور الٹ ہذلولی سیکنٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

(د) الٹ ہذلولی کوسیکنٹ کا ترسیم۔

(ه) الٹ ہذلولی ٹینجنٹ کا ترسیم۔

(و) الٹ ہذلولی کوٹینجنٹ کا ترسیم۔

شکل 7.67: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کے الٹ۔

جدول 7.10: الٹ ہذلولی تفاعل کے چند کار آمد تماثل

$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \frac{1}{x}$
$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{1}{x}$
$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \frac{1}{x}$

جدول 7.11: الٹ ہذلولی تفاعل کے تفرق۔

$\frac{\mathrm{d}(\sinh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}(\cosh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 1$
$\frac{\mathrm{d}(\tanh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \lvert u\rvert < 1$
$\frac{\mathrm{d}(\coth^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \lvert u\rvert > 1$
$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{sech}^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad 0 < u < 1$
$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{csch}^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u \neq 0$

الٹ ہذلولی تفاعل کے تفرق اور تکمل

الٹ ہذلولی تفاعل کا اہم ترین استعمال، تکمل کے ذریعہ جدول 7.11 میں کلیات تفرق سے کلیات تکمل کا حصول ہے۔

تفاعل $\tanh^{-1} u$ اور $\coth^{-1} u$ کے تفرق پر $\lvert u\rvert < a$ اور $\lvert u\rvert > 1$ کی پابندی، ان تفاعل پر پابندی کی بنا ہے (شکل 7.67-ہ، دیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات تکمل میں تبدیل کرتے وقت $\lvert u\rvert < 1$ اور $\lvert u\rvert > 1$ میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر $\lvert u\rvert < 1$ ہو تب $\frac{1}{1-u^2}$ کا تکمل $\tanh^{-1} u + C$ ہو گا۔ اس کے برعکس $\lvert u\rvert > 1$ کی صورت میں تکمل $\coth^{-1} u + C$ ہو گا۔

مثال 7.73: دکھائیں کہ اگر متغیر x کا u قابل تفرق تفاعل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

جدول 7.12: وہ تکمل جو الٹ ہذلولی تفاعل دیتے ہیں۔

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad a>0$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad u>a>0$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{u}{a})+C & u^2<a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a})+C & u^2>a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C, \quad 0<u<a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right|+C, \quad u\neq 0$$

حل: ہم پہلے عددی $x>1$ کی صورت میں $y=\cosh^{-1} x$ کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1} x \\
x &= \cosh y && \text{اس کا مساوی} \\
1 &= \sinh y \frac{dy}{dx} && x \text{ کے لحاظ سے تفرق} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} && x>0,\ y>0,\ \sinh y>0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \cosh y = x
\end{aligned}$$

یوں $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

□

موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول 7.11 میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول 7.12 کے کلیات تکمل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 7.74: تکمل $\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}}$ کی قیمت دریافت کریں۔

حل: قطعی تکمل درج ذیل ہے۔

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}} \qquad u = 2x$$
$$= \sinh^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C$$
$$= \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} = \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}})\Big]_0^1 = \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - \sinh^{-1}(0)$$
$$= \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - 0 \approx 0.986\,65$$

□

سوالات

ہذلولی تفاعل کی قیمتیں اور تماثل

سوال 7.614 تا سوال 7.617 میں $\sinh x$ یا $\cosh x$ کی ایک قیمت دی گئی ہے۔ تماثل $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$ اور ہذلولی تفاعل کی تعریف استعمال کرتے ہوئے باقی پانچ ہذلولی تفاعل کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 7.614: $\sinh x = -\frac{3}{4}$

جواب: $\cosh x = \frac{5}{4},\ \tanh x = -\frac{3}{5},\ \coth x = -\frac{5}{3},\ \operatorname{sech} x = \frac{4}{5},\ \operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}$

سوال 7.615: $\sinh x = \frac{4}{3}$

سوال 7.616: $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

جواب: $\sinh x = \frac{8}{15},\ \tanh x = \frac{8}{17},\ \coth x = \frac{17}{8},\ \operatorname{sech} x = \frac{15}{17},\ \operatorname{csch} x = \frac{15}{8}$

سوال 7.617: $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

سوال 7.618 تا سوال 7.623 میں فقروں کو قوت نما کی روپ میں لکھ کر ان کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

سوال 7.618: $2\cosh(\ln x)$

جواب: $x + \frac{1}{x}$

سوال 7.619: $\sinh(2\ln x)$

سوال 7.620: $\cosh 5x + \sinh 5x$
جواب: e^{5x}

سوال 7.621: $\cosh 3x - \sinh 3x$

سوال 7.622: $(\sinh x + \cosh x)^4$
جواب: e^{4x}

سوال 7.623: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

سوال 7.624: درج ذیل تماثل

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

ب. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

سوال 7.625: $\cosh x$ اور $\sinh x$ کی تعریف سے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

تفرق

سوال 7.626 تا سوال 7.637 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے تلاش کریں۔

سوال 7.626: $y = 6\sinh \frac{x}{3}$
جواب: $2\cosh \frac{x}{3}$

سوال 7.627: $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$

سوال 7.628: $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$
جواب: $\operatorname{sech}^2\sqrt{t} + \frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

سوال 7.629: $y = t^2 \tanh \frac{1}{t}$

سوال 7.630: $y = \ln(\operatorname{sech} z)$
جواب: $\coth z$

سوال 7.631: $y = \ln(\cosh z)$

سوال 7.632: $y = \operatorname{sech} \theta (1 - \ln \operatorname{sech} \theta)$
جواب: $(\ln \operatorname{sech} \theta)(\operatorname{sech} \theta \tanh \theta)$

سوال 7.633: $y = \operatorname{csch} \theta (1 - \ln \operatorname{csch} \theta)$

سوال 7.634: $y = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \tanh^2 v$
جواب: $\tanh^3 v$

سوال 7.635: $y = \ln \sinh v - \frac{1}{2} \coth v$

سوال 7.636: $y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x)$ اشارہ: تفرق سے پہلے قوت نما روپ میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔
جواب: 2

سوال 7.637: $y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x)$

سوال 7.638 تا سوال 7.649 میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے حاصل کریں۔

سوال 7.638: $y = \sinh^{-1} \sqrt{x}$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

سوال 7.639: $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

سوال 7.640: $y = (1 - \theta) \tanh^{-1} \theta$
جواب: $\frac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1} \theta$

سوال 7.641: $y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta + 1)$

سوال 7.642: $y = (1 - t) \coth^{-1} \sqrt{t}$
جواب: $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1} \sqrt{t}$

سوال 7.643: $y = (1 - t^2) \coth^{-1} t$

سوال 7.644: $y = \cos^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x$

جواب: $-\operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 7.645: $y = \ln x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sech}^{-1} x$

سوال 7.646: $y = \operatorname{csch}^{-1} (\frac{1}{2})^{\theta}$

جواب: $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+(1/2)^{2\theta}}}$

سوال 7.647: $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^{\theta}$

سوال 7.648: $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

جواب: $|\sec x|$

سوال 7.649: $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

کلیات تکمل

سوال 7.650 تا سوال 7.653 میں دیے کلیات تکمل کی تصدیق کریں۔

سوال 7.650:

$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \tan^{-1}(\sinh x) + C$$
$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \sin^{-1}(\tanh x) + C$$

سوال 7.651: $\int x \operatorname{sech}^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

سوال 7.652: $\int x \coth^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

سوال 7.653: $\int \tanh^{-1} x \, \mathrm{d}x = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

غیر قطعی تکمل

سوال 7.654 تا سوال 7.663 میں تکمل حل کریں۔

سوال 7.654: $\int \sinh 2x \, \mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

سوال 7.655: $\int \sinh \frac{x}{5} \, \mathrm{d}x$

سوال 7.656: $\int 6 \cosh(\frac{x}{2} - \ln 3) \, \mathrm{d}x$
جواب: $12 \sinh(\frac{x}{2} - \ln 3) + C$

سوال 7.657: $\int 4 \cosh(3x - \ln 2) \, \mathrm{d}x$

سوال 7.658: $\int \tanh \frac{x}{7} \, \mathrm{d}x$
جواب: $7 \ln\left|e^{x/7} + e^{-x/7}\right| + C$

سوال 7.659: $\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} \, \mathrm{d}\theta$

سوال 7.660: $\int \operatorname{sech}^2(x - \frac{1}{2}) \, \mathrm{d}x$
جواب: $\tanh(x - \frac{1}{2}) + C$

سوال 7.661: $\int \operatorname{csch}^2(5 - x) \, \mathrm{d}x$

سوال 7.662: $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$
جواب: $-2 \operatorname{sech} \sqrt{t} + C$

سوال 7.663: $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)}{t} \, \mathrm{d}t$

قطعی تکمل

سوال 7.664 تا سوال 7.673 میں تکمل حل کریں۔

سوال 7.664: $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, \mathrm{d}x$
جواب: $\ln \frac{5}{2}$

سوال 7.665: $\int_{0}^{\ln 2} \tanh 2x \, \mathrm{d}x$

سوال 7.666: $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{3}{32} + \ln 2$

سوال 7.667: $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta}\sinh\theta \,\mathrm{d}\theta$

سوال 7.668: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cosh(\tan\theta)\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $e-e^{-1}$

سوال 7.669: $\int_0^{\pi/2} 2\sinh(\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال 7.670: $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{3}{4}$

سوال 7.671: $\int_1^4 \frac{8\cosh\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

سوال 7.672: $\int_{-\ln 2}^{0}\cosh^2(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{3}{8}+\ln\sqrt{2}$

سوال 7.673: $\int_0^{\ln 10} 4\sinh^2(\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$

الٹے ہذلولی تفاعل اور متعلقہ تکمل کی قیمت کا حصول

ہذلولی تفاعل کو درج ذیل لوگارتھمی روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\sinh^{-1}x &= \ln(x+\sqrt{x^2+1}), \quad -\infty<x<\infty\\
\cosh^{-1}x &= \ln(x+\sqrt{x^2-1}), \quad x\geq 1\\
\tanh^{-1}x &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1\\
\operatorname{sech}^{-1}x &= \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}), \quad 0<x\leq 1\\
\operatorname{csch}^{-1}x &= \ln(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}), \quad x\neq 0\\
\coth^{-1}x &= \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x|>1
\end{aligned}$$

درج بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال 7.674 تا سوال 7.679 میں دیے اعداد کو لوگارتھمی روپ میں لکھیں۔

سوال 7.674: $\sinh^{-1}(-\frac{5}{12})$
جواب: $\ln\frac{2}{3}$

سوال 7.675: $\cosh^{-1}(\frac{5}{3})$

سوال 7.676: $\tanh^{-1}(-\frac{1}{2})$
جواب: $-\frac{\ln 3}{2}$

سوال 7.677: $\coth^{-1}(\frac{5}{4})$

سوال 7.678: $\operatorname{sech}^{-1}(\frac{3}{5})$
جواب: $\ln 3$

سوال 7.679: $\operatorname{csch}^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

سوال 7.680 تا سوال 7.687 کو (ا) الٹ ہذلولی تفاعل (ب) قدرتی لوگارتھم کے روپ میں حل کریں۔

سوال 7.680: $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$
جواب: (ا) $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$ (ب) $\ln(\sqrt{3}+2)$

سوال 7.681: $\int_0^{1/3} \frac{6\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+9x^2}}$

سوال 7.682: $\int_{5/4}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$
جواب: (ا) $\coth^{-1}(2)-\coth^{-1}(\frac{5}{4})$ (ب) $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$

سوال 7.683: $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال 7.684: $\int_{1/5}^{3/13} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-16x^2}}$
جواب: (ا) $-\operatorname{sech}^{-1}(\frac{12}{13})+\operatorname{sech}^{-1}(\frac{4}{5})$
(ب) $-\ln(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13})+\ln(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5}) = -\ln(\frac{3}{2})+\ln(2) = \ln(\frac{4}{3})$

سوال 7.685: $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+x^2}}$

سوال 7.686: $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$
جواب: (ا) 0 (ب) 0

سوال 7.687: $\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.688: (ا) مبدا کے لحاظ سے تشاکلی وقفہ پر معین تفاعل f (یعنی ایسا تفاعل جو x پر معین ہونے کی صورت میں $-x$ پر بھی معین ہو) کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{7.50}$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ جفت اور $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ طاق ہو گا۔ (ب) اگر f از خود جفت یا طاق ہو تب مساوات 7.50 کافی سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ ان نئی مساواتوں کو تلاش کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ب) $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$ ، $f(x) = 0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

سوال 7.689: کلیہ $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), -\infty < x < \infty$ اخذ کریں۔ اس کلیہ میں جذر کے ساتھ منفی کی بجائے مثبت علامت کیوں استعمال ہوتا ہے؟

سوال 7.690: ایک جسم پر، جس کی کمیت m ہے، ساکن حال سے ثقلی کشش کی بنا زمین کی طرف گرتے ہوئے سمتی رفتار v کے مربع کے متناسب ہوائی مزاحمت عمل کرتی ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس جسم کی سمتی رفتار درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گی،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$$

جہاں k ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت کا دارومدار جسم کے **ہوائی حرکیات**[27] کے خواص اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہو گی۔ (ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم زیادہ بلندی سے نہیں گرتا ہے۔ یوں ہوائی کثافت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔)

ا. دکھائیں کہ درج ذیل مساوات تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات ($t = 0$ پر $v = 0$) کو مطمئن کرتی ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

ب. جسم کی تحدیدی سمتی رفتار $\lim_{t\to\infty} v$ تلاش کریں۔

ج. ایک **فضائی غوطہ باز**[28] جس کی کمیت $70\,\mathrm{kg}$ ہو کے لئے $k = 0.23$ ہو گا۔ اس فضائی غوطہ باز کی تحدیدی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

---

[27] aerodynamics
[28] skydiver

جواب: (ب) $v=\sqrt{\frac{gm}{k}}$ ، (ج) $v=54.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

سوال 7.691: فرض کریں ایک جسم محددی لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر اس کا مقام

$$s=a\cos kt+b\sin kt \qquad \text{(ا)}$$
$$s=a\cosh kt+b\sinh kt \qquad \text{(ب)}$$

ہے۔ دکھائیں کہ دونوں صورتوں میں اس جسم کی اسراع $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ فاصلہ s کے راست متناسب ہو گی، البتہ پہلی صورت میں یہ مبدا کی جانب اور دوسری صورت میں مبدا سے دوری کے جانب ہو گی۔

سوال 7.692: ایک ٹریکٹر ٹرالی محور x پر چلتے ہوئے مبدا تک پہنچ کر محور y کے رخ مڑتی ہے۔ ٹرالی کے پہیوں سے ٹریکٹر تک فاصلہ کو اکائی تصور کریں۔ یوں جب ٹریکٹر کے پہیے $(1,0)$ پر ہوں تب ٹریکٹر مبدا پر ہو گا۔ جب ٹریکٹر مبدا سے محور y پر چلتا ہے، ٹرالی قوسی راہ $y=f(x)$ اختیار کرتی ہے۔ یہ قوس درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y=0,\quad x=1 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

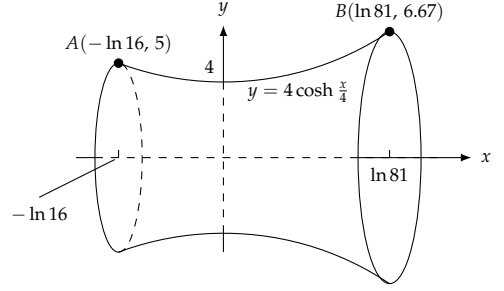
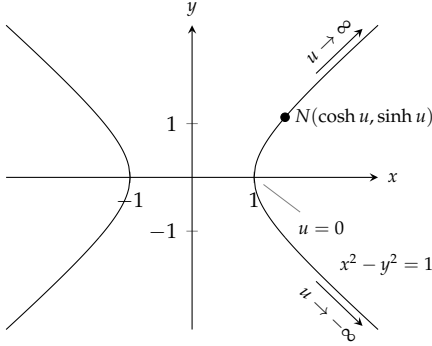
اس ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کریں۔ (آپ کو الٹ ہذلولی تفاعل درکار ہوں گے۔)
جواب: $y=\operatorname{sech}^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}$

سوال 7.693: دکھائیں کہ ربع اول میں قوس $y=\frac{1}{a}\cosh ax$ اور محددی لکیروں اور لکیر $x=b$ کے بیچ رقبہ اس مستطیل کے رقبہ جتنا ہو گا جس کی چوڑائی $\frac{1}{a}$ اور لمبائی s ہو جہاں $x=0$ سے $x=b$ تک قوس کی لمبائی s ہے۔

سوال 7.694: ربع اول میں بالائی طرف سے قوس $y=\cosh x$ ، زیریں طرف سے قوس $y=\sinh x$ ، بائیں سے محور y اور دائیں سے لکیر $x=2$ کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: 2π

سوال 7.695: قوس $y=\operatorname{sech} x$ ، محور x اور لکیر $x=\mp\ln\sqrt{3}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 7.696: (ا) قوس $y=\frac{1}{2}\cosh 2x$ کی لمبائی $x=0$ سے $x=\ln\sqrt{5}$ تک تلاش کریں۔ (ب) قوس $y=\frac{1}{a}\cosh ax$ کی لمبائی $x=0$ سے $x=b>0$ تک تلاش کریں۔
جواب: (ا) $\frac{6}{5}$ (ب) $\frac{\sinh ab}{a}$

سوال 7.697: کمتر سطح
قوس $y=4\cosh(\frac{x}{4}),\ -\ln 16\le x\le \ln 81$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 7.68)۔ اس سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

شکل 7.69: قطع زائد تفاعل کے نام کی وجہ (سوال 7.699)

شکل 7.68: کمتر سطح (سوال 7.697)

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے نقطہ A اور B کے بیچ تمام قابل تفرق قوسین میں سب سے کم سطح طواف پیدا کرنے والی قوس $y = 4\cosh \frac{x}{4}$ ہے۔ یوں A اور b پر واقع سخت دائری تاروں کے بیچ صابن کے جھاگ کا سطح یہی قوسی صورت اپنائے گا۔

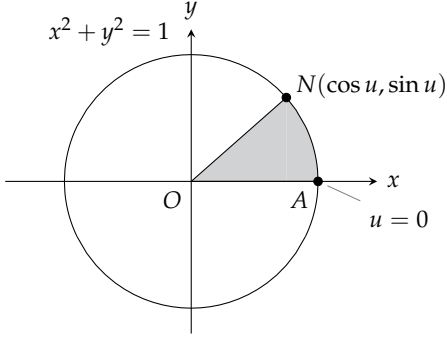
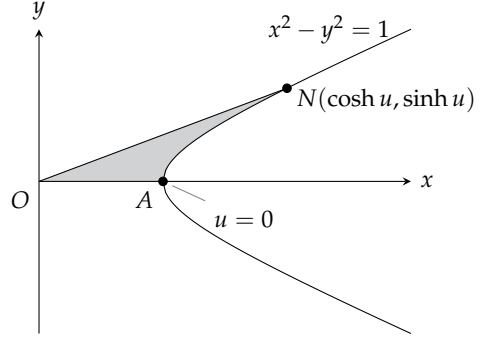
سوال 7.698: (ا) قوس $y = \cosh x, \; -\ln 2 \leq x \leq \ln 2$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کرتے ہوئے وسطانی مرکز کی نشاندہی کریں۔
جواب: (ا) $\bar{x} = 0, \; \bar{y} = \frac{5}{8} + \frac{\ln 4}{3} \approx 1.09$

سوال 7.699: ہذلولی تفاعل کا نام
اکائی دائرہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cos u$ اور $y = \sin u$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اکائی قطع زائد (جس کو ہذلولی تفاعل بھی کہتے ہیں) کے دائیں حصہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cosh u$ اور $y = \sinh u$ سے حاصل کرنا ممکن ہے (شکل 7.69)۔ اسی لئے ان تفاعل کو قطع زائد تفاعل یا **ہذلولی تفاعل** کہتے ہیں۔

دائری تفاعل اور قطع تفاعل کے بیچ دوسری مشابہت یہ ہے کہ قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے دائیں حصہ میں نقطہ $(\cosh u, \sinh u)$ کے متغیر u کی قیمت خطہ AON کے رقبہ کا دگنا ہو گا (شکل 7.70)۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دکھائیں کہ خطہ AON کا رقبہ $S(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں دی گئی مساوات کا u کے لحاظ سے تفرق $S'(u) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔

ج. اس آخری مساوات کو $S(u)$ کے لئے حل کریں۔ $S(0)$ کی قیمت کتنی ہے؟ تکمل کے مستقل C کی قیمت کتنی ہو گی؟ مستقل C جانتے ہوئے حل $S(u)$ اور u کا تعلق بیان کریں۔

(ب) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

(ا) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

شکل 7.70: دائری تفاعل اور قطع زائد تفاعل کا ایک تعلق (سوال 7.699)۔

لٹکی ہوئی تار

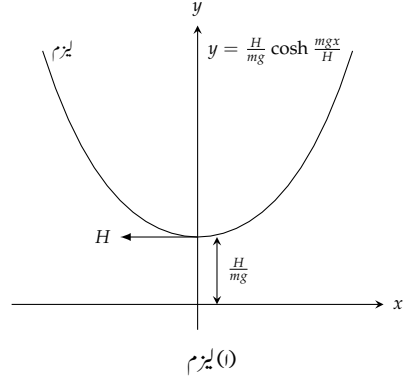
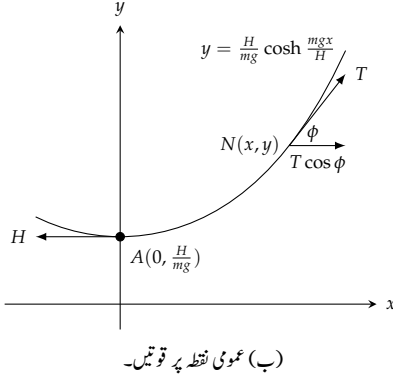
سوال 7.700: فرض کریں دو کھمبوں کے بیچ بجلی کی تار لٹکی ہوئی ہے (شکل 7.71)۔ اس تار کی فی اکائی لمبائی کمیت m ہے اور تار کی سب سے کم اونچائی والے نقطہ پر افقی تناو H ہے۔ ہم محدد یوں منتخب کرتے ہیں کہ قوسی تار کا نچلا حصہ مبدا سے $\frac{H}{mg}$ بلند ہو جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایسی صورت میں ہم دکھا سکتے ہیں کہ تار کی صورت ہذلولی کوسائن $y = \frac{H}{mg}\cosh\frac{mgx}{H}$ ہو گی۔ ایسی قوس کو **لیزم**[29] کہتے ہیں۔

ا. تار کے کسی عمومی نقطہ $N(x,y)$ پر تناو T ہو گا جو قوس کو مماسی ہو گا۔ دکھائیں کہ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh\frac{mgx}{H}$$

ب. چونکہ تار ساکن ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر افقی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا اور اسی طرح انتصابی قوتوں کا مجموعہ بھی صفر ہو گا۔ یوں دکھائیں کہ $T = H$ اور $T = mgy$ ہو گا۔ یوں N پر تناو y لمبائی کی تار کا وزن ہو گا۔

سوال 7.701: لیزم (سوال 7.700 جاری)
تار کی لمبائی $s = \frac{1}{a}\sinh x$ ہو گی (شکل 7.71) جہاں $a = \frac{mg}{H}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ N کے محدد کو s کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے:

$$x = \frac{1}{a}\sinh^{-1} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

شکل 7.71: لیزم برائے سوال 7.700 اور سوال 7.701

سوال 7.702: جھول اور افقی تناو ایک تار جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور کمیت $0.6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے کو ایک جتنے بلند کھمبوں کے سروں سے باندھا گیا ہے۔ کھمبوں کے بیچ فاصلہ $9\,\mathrm{m}$ ہے۔

ا. تار کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کریں۔

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \quad -5 \le x \le 5$$

دکھائیں کہ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے (سوال 7.701 کے نتائج استعمال کریں۔)

$$5a = \sinh 4.5a \tag{7.51}$$

ب. ترسیمات $y = 5a$ اور $y = \sinh 4.5a$ کا نقطہ تقاطع تلاش کرتے ہوئے جزو-ا کا ترسیمی حل تلاش کریں۔

ج. مساوات 7.51 کا اعدادی حل تلاش کریں۔ اعدادی حل کا ترسیمی حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

د. تار کے کم تر بلند نقطہ پر افقی تناو معلوم کریں۔

ھ. لیزم $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ کو وقفہ $-5 \le x \le 5$ پر ترسیم کریں۔ تار میں جھول کا اندازہ لگائیں۔

جواب: (ج) $a \approx 0.1785413$ (د) $32.93\,\mathrm{N}$

catenary[29]

7.11 یک رتبی تفرقی مساوات

ہم نے ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dt} = ky,\ y(0) = y_0$ کو حل کرتے ہوئے قوت نمائی تبدیلی $y = y_0 e^{kt}$ کا قاعدہ حصہ 7.5 میں دریافت کیا۔ جیسا کہ ہم نے دیکھا یہ مسئلہ نمو آبادی، تابکار تحلیل، انتقال حرارت اور دیگر اعمال کی نمونہ کشی کرتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ پر غور کریں گے جہاں تفاعل f غیر تابع متغیر x اور تابع متغیر y کا تفاعل ہو گا۔ اس مساوات کے استعمال مزید زیادہ ہیں۔

یک رتبی تفرقی مساوات

درج ذیل مساوات جس میں $f(x, y)$ مستوی xy کے متغیرات x اور y پر مبنی تفاعل $f(x, y)$ ہے کو **یک رتبی**[30] تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.52}$$

اس مساوات کو ہم $y' = f(x, y)$ بھی لکھتے ہیں۔ متغیر x کے کسی وقفہ (جو لامتناہی ہو سکتا ہے) پر معین قابل تفرق تفاعل $y = y(x)$ جس کے لئے

$$\frac{d}{dx} y(x) = f(x, y(x))$$

ہو، مساوات 7.52 کا **حل**[31] کہلاتا ہے۔ ابتدائی شرط $y(x_0) = y_0$ کا مطلب ہو گا کہ منحنی حل $y = y(x)$ نقطہ (x_0, y_0) سے گزرتی ہے۔ دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{dy}{dx}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

مثال 7.75: درج ذیل تفرقی مساوات میں $f(x, y) = 1 - \frac{y}{x}$ ہے۔

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

□

مثال 7.76: دکھائیں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = \frac{3}{2}$$

کا حل درج ذیل تفاعل ہے۔

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

---

[30] first order
[31] solution

حل: دیا گیا تفاعل ابتدائی شرط کو مطمئن کرتا ہے، یعنی:

$$y(2) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

یہ دکھانے کی خاطر کہ دیا گیا تفاعل تفرقی مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے، ہم y کی جگہ $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ پر کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات کے دونوں اطراف یکساں ہیں۔

بایاں ہاتھ
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$$

دایاں ہاتھ
$$\begin{aligned} 1 - \frac{y}{x} &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

تفاعل $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ ابتدائی شرط اور تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ □

قابل علیحدگی مساوات

اگر $f(x, y)$ کو x کے تفاعل اور y کے تفاعل کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ **قابل علیحدگی**[32] کہلاتی ہے۔ ایسی صورت میں ہم تفرقی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

اگر $h(y) \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو h سے تقسیم اور $\mathrm{d}x$ سے ضرب کرتے ہوئے متغیرات کو علیحدہ کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$$

یوں y اجزاء اور $\mathrm{d}y$ بائیں ہاتھ جبکہ x اجزاء اور $\mathrm{d}x$ دائیں ہاتھ منتقل ہوتے ہیں۔ ہم دونوں اطراف کا تکمل لے کر

$$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں۔ تکمل سے درکار حل حاصل ہوتا ہے جس میں y، متغیر x کا صریح تفاعل یا خفی تفاعل جمع مستقل ہو گا۔

مثال 7.77: درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + y^2)e^x$$

---

[32] separable

حل: چونکہ $1+y^2$ کبھی بھی صفر نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا ہم متغیرات کی علیحدگی سے اس تفرقی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1+x^2)e^x$$

$$\mathrm{d}y = (1+y^2)e^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{دونوں اطراف کو } \mathrm{d}x \text{ سے ضرب دیں}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = e^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{دونوں اطراف کو } 1+y^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int e^x\,\mathrm{d}x \qquad \text{تکمل}$$

$$\tan^{-1} y = e^x + C \qquad \text{دونوں اطراف کے مستقل کو } C \text{ ظاہر کرتا ہے}$$

مساوات $\tan^{-1} y = e^x + C$ میں y متغیر x کا خفی تفاعل ہے۔ ہم اس مساوات کو حل کر کے y کو x کے صریح تفاعل کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔ دونوں اطراف کا ٹینجنٹ لیتے ہیں:

$$\tan(\tan^{-1} y) = \tan(e^x + C)$$
$$y = \tan(e^x + C)$$

□

خطی یک رتبی مساوات

درج ذیل یک رتبی تفرق مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{7.53}$$

جس میں P اور Q متغیر x کے تفاعل ہوں **خطی**[33] یک رتبی مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات 7.53 اس کی **معیاری روپ**[34] ہے۔ دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

مثال 7.78: درج ذیل کو معیاری روپ میں لکھیں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

---

[33] linear
[34] standard form

حل:

$$
\begin{aligned}
x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^2+3y \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x+\frac{3}{x}y && x \text{ سے تقسیم} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{3}{x}y &= x && \text{معیاری روپ؛ } P(x)=-\tfrac{3}{x} \text{ اور } Q(x)=x \text{ ہیں۔}
\end{aligned}
$$

□

مثال 7.79: ہم نے حصہ 7.5 میں درج ذیل مساوات سے جرثوموں کی نمو، تابکار تحلیل اور تبدیلی حرارت کو ظاہر کیا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ky$$

اس خطی یک رتبی تفرقی مساوات کی معیاری روپ درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-ky=0 \qquad P(h)=-k,\ Q(x)=0$$

□

ہم معیاری مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.54}$$

کے دونوں اطراف کو اس مثبت تفاعل $v(x)$ سے ضرب دیتے ہیں جو بائیں ہاتھ کو حاصل ضرب $v(x)\cdot y$ کے تفرق میں تبدیل کرتا ہو۔ تفاعل $v(x)$ کو مساوات 7.54 کا **جزو تکمل**[35] کہتے ہیں۔ ہم بہت جلد $v(x)$ معلوم کرنا سکھائیں گے۔ پہلے $v(x)$ جانتے ہوئے تفرقی مساوات کے حل پر بات کرتے ہیں۔

آئیں دیکھتے ہیں کہ v سے ضرب دینا کیوں کار آمد ثابت ہوتا ہے:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y &= Q(x) && \text{دی گئی معیاری مساوات} \\
v(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)v(x)y &= v(x)Q(x) && v(x) \text{ سے ضرب دیں} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\cdot y) &= v(x)Q(x) && (7.55) \\
v(x)\cdot y &= \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x && x \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
y &= \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x && y \text{ کے لئے حل کریں}
\end{aligned}
$$

[35] integrating factor

یاد رہے کہ $v(x)$ کا انتخاب یوں کیا جاتا ہے کہ $v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Pvy=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\cdot y)$ ہو۔درج بالا میں تیسرے قدم پر اسی حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے۔ مساوات 7.54 کا حل تفاعل $v(x)$ اور $Q(x)$ کی صورت میں مساوات 7.55 دیتی ہے۔

کیا $P(x)$ مساوات کے حل میں نہیں پایا جاتا ہے؟ درحقیقت $P(x)$ بالواسطہ طور پر حل میں پایا جاتا ہے۔ یہ $v(x)$ کے انتخاب میں شامل ہوتا ہے۔ ہم $v(x)$ پر مسلط شرط سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vy) &= v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Pvy && \text{پر مسلط شرط } v\\
v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Pvy && \text{زنجیری قاعدہ}\\
y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= Pvy && \text{جزو } v\tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \text{ کٹ جاتے ہیں}
\end{aligned}$$

اس آخری مساوات کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کرتے ہوئے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر $v>0$ کی بنا $\ln v$ میں مطلق قیمت کی علامت کی ضرورت پیش نہیں آتی۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= Pv\\
\frac{\mathrm{d}v}{v} &= P\,\mathrm{d}x && \text{علیحدگی متغیرات}\\
\int\frac{\mathrm{d}v}{v} &= \int P\,\mathrm{d}x && \text{تکمل}\\
\ln v &= \int P\,\mathrm{d}x\\
e^{\ln v} &= e^{\int P\,\mathrm{d}x} && \text{قوت نما}\\
v &= e^{\int P\,\mathrm{d}x}
\end{aligned} \tag{7.56}$$

یوں ایسا $v(x)$ جو مساوات 7.56 کو مطمئن کرتا ہو ہمیں مساوات 7.55 کے ذریعہ مساوات 7.54 کا حل دیگا۔ ہمیں v کی عمومی ترین صورت کی ضرورت نہیں ہے بلکہ اس کی کوئی بھی صورت کافی ہے۔ یوں P کے تکمل $\int P\,\mathrm{d}x$ کی سادہ ترین صورت لینا زیادہ بہتر ہو گا۔

مسئلہ 7.4: خطی یک رتبی تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{7.57}$$

کا حل

$$y=\frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.58}$$

ہو گا جہاں

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{7.59}$$

ہے۔ تفاعل $v(x)$ کے کلیہ میں $P(x)$ کے الٹ تفرق کی عمومی صورت کی ضرورت نہیں ہو گی بلکہ اس کا کوئی بھی الٹ تفرق کار آمد ہو گا۔

خطی یک رتبی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے اقدام:

ا. مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر $P(x)$ اور $Q(x)$ معلوم کریں۔

ب. $P(x)$ کا الٹ تفرق معلوم کریں۔

ج. جزو تکمل $v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

د. مساوات 7.58 کی مدد سے حل تلاش کریں۔

مثال 7.80: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

حل: ہم اس مساوات کو چار قدموں میں حل کرتے ہیں۔

قدم اول: مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر P اور Q کی نشاندہی کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}y = x, \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x \qquad \text{7.78مثال}$$

قدم دوم: $P(x)$ کا (کوئی بھی) الٹ تفرق تلاش کرتے ہیں۔

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -3\ln|x| = -3\ln x \qquad x > 0$$

قدم سوم: جزو تکمل $v(x)$ کی تلاش۔

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \qquad \text{مساوات 7.59}$$

قدم چہارم: حل کی تلاش۔

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{v(x)} \int v(x) Q(x)\, \mathrm{d}x && \text{مساوات 7.58} \\
&= \frac{1}{(1/x^3)} \int \Big(\frac{1}{x^3}\Big)(x)\, \mathrm{d}x && \text{جزو-اتاج کی معلومات} \\
&= x^3 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&= x^3\Big(-\frac{1}{x} + C\Big) && \text{مستقل } C \text{ مت بھولیں} \\
&= -x^2 + Cx^3
\end{aligned}
$$

یوں حل $y = -x^2 + Cx^3,\ x > 0$ ہو گا۔ □

مثال 7.81: درج ذیل مساوات کو حل کریں

$$xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

جہاں ابتدائی معلومات $y(1) = 2$ دی گئی ہے۔

حل: ہم مثال 7.80 میں اس کا درج ذیل حل تلاش کر چکے ہیں۔

$$y = -x^2 + Cx^3, \quad x > 0$$

ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + Cx^3 \\
2 &= -(1)^2 + C(1)^3 \\
C &= 2 + (1)^2 = 3
\end{aligned}
$$

یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تفاعل $y = -x^2 + 3x^3$ ہو گا۔ □

سمتی رفتار کے متناسب مزاحمت

بعض اوقات جب باقی قوتوں کو رد کرنا ممکن ہو، یہ کہنا درست ہو گا کہ حرکت کرتے ہوئے جسم پر لاگو مزاحمت اس کی سمتی رفتار کے راست متناسب ہو گی۔ایک گاڑی جس کا انجن بند ہو اور یہ رک رہی ہو، ایسی ایک مثال ہے۔ ایسا جسم جتنا آہستہ چل رہا ہو، اس پر ہوائی مزاحمت اتنی کم

ہو گی۔ اس عمل کو ریاضی کا جامہ پہنانے کی خاطر ہم جسم کو کمیت m سے ظاہر کرتے ہیں جو محددی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ t پر اس جسم کی رفتار v اور مقام s ہوں گے۔ مزاحمتی قوت جسم کی سمتی رفتار کے الٹ رخ ہو گا لہٰذا ہم

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \qquad\qquad k > 0$$

لکھ سکتے ہیں جس کی معیاری روپ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v = 0$$

ہو گی۔فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی سمتی رفتار v_0 ہو تب ہم مسئلہ 7.4 کی مدد سے درج ذیل حل حاصل ہو گا (سوال 7.744)۔

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \tag{7.60}$$

ہم مساوات 7.60 سے کیا سیکھ سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر m بہت زیادہ ہو، مثلاً ریت سے بھرا ہوا ٹرک، تب اس جسم کو رکنے کے لئے بہت زیادہ وقت درکار ہو گا۔ اس کے علاوہ ہم اس مساوات کا تکمل لے کر طے شدہ فاصلہ s معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ایک جسم صرف ہوائی مزاحمت کی موجودگی میں رک رہا ہے اور یہ قوت جسم کی رفتار کے راست تناسب ہے۔ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ یہ جاننے کی خاطر ہم مساوات 7.60 سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-(k/m)t} \qquad\qquad s(0) = 0$$

t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C$$

ملتا ہے جس میں $t = 0$ پر $s = 0$ پر کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت جانتے ہیں۔

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \quad \implies \quad C = \frac{v_0 m}{k}$$

اس جسم کا مقام لمحہ t پر

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$

ہو گا۔ یہ جاننے کے لئے کہ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا ہم $t \to \infty$ پر $s(t)$ کا حد تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ $-\frac{k}{m} < 0$ ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(k/m)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})\\ &= \frac{v_0 m}{k}(1 - 0) = \frac{v_0 m}{k}\end{aligned}$$

یوں یہ جسم کو رکنے کے لئے درج ذیل فاصلہ درکار ہو گا۔

$$\text{طے فاصلہ} = \frac{v_0 m}{k} \tag{7.61}$$

چونکہ صرف ریاضیات میں ہم وقت کو لا متناہی تک بڑھا سکتے ہیں لہٰذا یہ ایک فرضی فاصلہ ہے۔ حقیقی فاصل اس سے کم ہو گا۔ ہاں یہ درست ہو گا کہ بھاری جسم کو رکنے کے لئے زیادہ وقت درکار ہو گا اور یہ زیادہ دور تک چل کر رکے گا۔

مثال 7.82: برف پھسلن پر پھسلنے والے $80\,\mathrm{kg}$ شخص کے لئے مساوات 7.60 میں $k = 4.4\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہو گا۔ یہ شخص $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے آہستہ ہو کر $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار تک کتنی دیر میں پہنچے گا؟ اس دورانیے میں یہ شخص کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

حل: ہم مساوات 7.60 کو t کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
3e^{-4.4t/80} &= 0.25\\
e^{-4.4t/80} &= \frac{1}{12}\\
-\frac{4.4t}{80} &= \ln(\frac{1}{12})\\
t &= \frac{80}{4.4}\ln 12 \approx 45\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

اس عرصہ میں طے فاصلہ کو مساوات 7.61 سے حاصل کرتے ہیں۔

$$= \frac{v_0 m}{k} = \frac{(3)(80)}{4.4} \approx 55\,\mathrm{m}$$

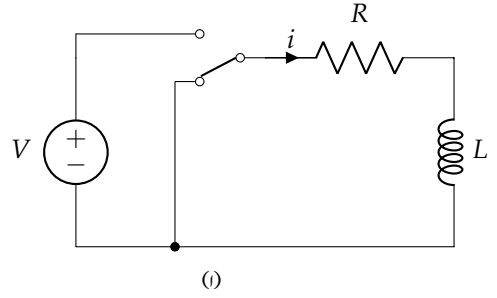
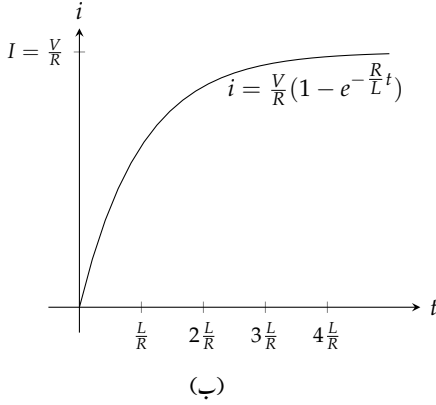
□

ادوار RL

منبع دباو کے ساتھ لمحہ $t = 0$ پر مزاحمت R اور امالہ L کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے (شکل 7.72)۔امالہ کی اکائی ہینری H اور مزاحمت کی اکائی اوہم Ω ہے۔ اس دور کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V \tag{7.62}$$

جہاں t وقت کو، i برقی رو کو اور V لاگو برقی دباو کو ظاہر کرتی ہے۔اس مساوات کو حل کرتے ہوئے لمحہ t پر برقی رو $i(t)$ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

مثال 7.83: سلسلہ وار جڑے RL دور کو مساوات 7.62 ظاہر کرتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

شکل 7.72: سلسلہ وار مزاحمت، امالہ برقی دور (مثال 7.83)

حل: ہم اس مساوات کو معیاری روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{7.63}$$

یوں مسئلہ 7.4 کے تحت حل درج ذیل ہو گا (سوال 7.756)۔

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{7.64}$$

چونکہ $-\frac{R}{L}$ نفی ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(R/L)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}$$

ہو گا۔ یوں کسی بھی لمحہ پر برقی رو $\frac{V}{T}$ سے کم ہو گی لیکن جیسے جیسے وقت گزرتا ہے برقی رو برقرار حال قیمت $\frac{V}{R}$ تک پہنچتی ہے۔ درج ذیل مساوات کے تحت

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V$$

اگر $L = 0$ (امالہ کی غیر موجودگی) یا $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ (برقرار حال) ہو تب اس دور میں $i = \frac{V}{R}$ ہو گا (شکل 7.72)۔

مساوات 7.64 در حقیقت دو مختلف حل کا مجموعہ ہے۔ اس کا پہلا جزو $\frac{V}{R}$ **برقرار حال حل** ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو $-\frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ **عارضی حال حل** ہے جو $t \to \infty$ کرنے سے صفر ہو گا۔ □

سوالات

حل کی تصدیق

سوال 7.703 اور سوال 7.704 میں تصدیق کریں کہ ہر $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

سوال 7.703: $2y' + 3y = e^{-x}$
(ا) $y = e^{-x}$، (ب) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$، (ج) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

سوال 7.704: $y' = y^2$ ؛
(ا) $y = -\frac{1}{x}$، (ب) $y = -\frac{1}{x+3}$، (ج) $y = -\frac{1}{x+C}$

سوال 7.705 اور سوال 7.706 میں تصدیق کریں کہ $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

سوال 7.705: $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$ ، $x^2y' + xy = e^x$

سوال 7.706: $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ ، $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$

سوال 7.707 تا سوال 7.710 میں ابتدائی قیمت مسئلے کے دیے گئے حل کی تصدیق کریں۔

سوال 7.707: $y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}, \quad y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}; \quad y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$

سوال 7.708: $y' = e^{-x^2} - 2xy, \quad y(2) = 0; \quad y = (x-2)e^{-x^2}$

سوال 7.709: $xy' + y = -\sin x, \quad x > 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0; \quad y = \frac{\cos x}{x}$

سوال 7.710: $x^2y' = xy - y^2, \quad x > 1, \quad y(e) = e; \quad y = \frac{x}{\ln x}$

قابل علیحدگی مساوات

سوال 7.711 تا سوال 7.716 میں دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔

سوال 7.711: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(x + y^2x)$
جواب: $y = \tan(x^2 + C)$

سوال 7.712: $(y+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x-1)$

سوال 7.713: $2\sqrt{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1, \quad x,y>0$
جواب: $\frac{2}{3}y^{3/2}-x^{1/2}=C$

سوال 7.714: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2\sqrt{y}, \quad y>0$

سوال 7.715: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{x-y}$
جواب: $e^y-e^x=C$

سوال 7.716: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x^2+1}{xe^y}, \quad x>0$

خطی یک رتبی مساوات

سوال 7.717 تا سوال 7.722 میں تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 7.717: $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=e^x, \quad x>0$
جواب: $y=\frac{e^x+C}{x}$

سوال 7.718: $e^x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2e^xy=1$

سوال 7.719: $xy'+3y=\frac{\sin x}{x^2}, \quad x>0$
جواب: $y=\frac{C-\cos x}{x^3}, x>0$

سوال 7.720: $y'+(\tan x)y=\cos^2 x, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

سوال 7.721: $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=1-\frac{1}{x}, \quad x>0$
جواب: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}, x>0$

سوال 7.722: $(1+x)y'+y=\sqrt{x}$

یک رتبی مساوات

سوال 7.723 تا سوال 7.736 میں تفرقی مساوات حل کریں۔

سوال 7.723: $2y'=e^{x/2}+y$
جواب: $y=\frac{1}{2}xe^{x/2}+Ce^{x/2}$

سوال 7.724: $\sqrt{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=e^{y+\sqrt{x}}, \quad x>0$

سوال 7.725: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$
جواب: $y = x^2e^{-2x} + Ce^{-2x}$

سوال 7.726: $xy' - y = 2x\ln x$

سوال 7.727: $\sec x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{y+\sin x}$
جواب: $-e^{-y} - e^{\sin x} = C$

سوال 7.728: $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

سوال 7.729: $(t-1)^3\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 4(t-1)^2s = t+1, \quad t > 1$
جواب: $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

سوال 7.730: $(t+1)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + 2s = 3(t+1) + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

سوال 7.731: $(\sec^2\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x}$
جواب: $2\tan\sqrt{x} = t + C$

سوال 7.732: $\sin t - (x\cos^2 t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 7.733: $\sin\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
جواب: $r = \csc\theta(\ln|\sec\theta| + C)$

سوال 7.734: $\tan\theta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} + r = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

سوال 7.735: $\cosh x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\sinh x)y = e^{-x}$
جواب: $y = -e^{-x}\operatorname{sech} x + C\operatorname{sech} x$

سوال 7.736: $\sinh x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3(\cosh x)y = \cosh x\sinh x$

ابتدائی قیمت مسائل کا حل

سوال 7.737 تا سوال 7.742 میں ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال 7.737: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = 3; \quad y(0) = 1$
جواب: $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

سوال 7.738: $t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=t^3, \quad t>0; \quad y(2)=1$

سوال 7.739: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+y=\sin\theta, \quad \theta>0; \quad y(\pi/2)=1$
جواب: $y=-\frac{1}{\theta}\cos\theta+\frac{\pi}{2\theta}$

سوال 7.740: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}-2y=\theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta>0; \quad y(\pi/3)=2$

سوال 7.741: $(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2(x^2+x)y=\frac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x>-1; \quad y(0)=5$
جواب: $y=6e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x+1}$

سوال 7.742: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x, \quad y(0)=-6$

سوال 7.743: درج ذیل ابتدائی قیمت مساوات کو مسئلہ 7.4 سے حل کرتے ہوئے کیا حاصل ہوتا ہے۔ یہاں y متغیر t کا تفاعل ہے۔
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ky, \quad$ مستقل $k; \quad y(0)=y_0$
جواب: $y=y_0e^{kt}$

سوال 7.744: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو مسئلہ 7.4 کی مدد سے حل کریں جہاں v متغیر t کا تفاعل ہے۔
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v, \quad$ m اور k مستقل ہیں$; \quad v(0)=v_0$

نظریہ اور استعمال

سوال 7.745: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=x\ln|x|+C$$

(ب) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=x\ln|x|+Cx$$

جواب: (الف) غلط (ب) درست

سوال 7.746: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$$

(ب) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x=\tan x+\frac{C}{\cos x}$$

سوال 7.747: شکر خون
ایک مریض کو مستقل شرح سے گلوکوز کی خوراک درون وریدی کھلائی جاتی ہے۔ وقت کے لحاظ سے خون میں گلوکوز کی ارتکاز $c(t)$ کو درج ذیل تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں G ، V اور k مثبت مستقل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{100V} - kc$$

فی منٹ ملی گرام میں گلوکوز کی شرح G ہے جبکہ بدن میں خون کا حجم V لٹر ہے جو بالغ شخص کے لئے تقریباً $5\,\mathrm{L}$ ہو گا۔ ارتکاز $c(t)$ کو ملی گرام فی دس مربع سنٹی میٹر ناپا جاتا ہے۔ جزو $-kc$ کو اس لئے شامل کیا گیا ہے کہ گلوکوز مسلسل دیگر اجزاء میں تبدیل ہو گا اور اس تبدیلی کی شرح اس وقت پائے جانے والی گلوکوز کے راست متناسب ہو گی۔ (ا) $c(0)$ کو c_0 سے ظاہر کرتے ہوئے اس مساوات کو حل کریں۔ (ب) برقرار حال ارتکاز $\lim_{t\to\infty} c(t)$ تلاش کریں۔
جواب: (ا) $c = \frac{G}{100Vk} + (c_0 - \frac{G}{100Vk})e^{-kt}$ ، (ب) $\frac{G}{100Vk}$

سوال 7.748: مسلسل سود در سود
آپ بینک سے 1000 روپیہ قرضہ لیتے ہیں اور ہر سال مزید 1000 روپیہ بینک سے قرض کرتے ہیں۔ آپ کو 10 % سالانہ مسلسل سود در سود دینا ہو گا۔ t سال بعد آپ کی واجب الادا رقم x درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1000 + 0.1x, \quad x(0) = 1000$$

(ا) اس مساوات کو حل کریں۔ (ب) آپ کی واجب الادا رقم کتنے سالوں میں 100 000 ہو گی؟

سوال 7.749: حوض خالی کرنے کے لئے درکار وقت
ایک پانی سے بھرے ہوئے انتصابی بیلنی حوض کی تہہ میں نسب نلکی کو کھول کر حوض خالی کا جاتا ہے۔ شروع میں پانی کی نکاسی تیز ہوتی ہے لیکن جیسے جیسے پانی کی سطح گرتی ہے، پانی کی نکاسی بھی آہستہ ہوتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں پانی کی گہرائی کی شرح تبدیلی، گہرائی y کے جذر کے راست متناسب ہوتی ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{y}$$

مستقل k کی قیمت ثقلی اسراع، نلکی کے سوراخ کی شکل اور حوض کے رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتی ہے۔

فرض کریں t کو منٹوں میں ناپا جاتا ہے اور $k = \frac{1}{10}$ ہو۔ اگر پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو تب حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟
جواب: 40 منٹ

سوال 7.750: گریزی رفتار
ہوا سے خالی چاند پر کمیت m کے جسم پر ثقلی قوت $F = -\frac{GMm}{s^2} = -\frac{GMm}{R^2}\frac{R^2}{s^2} = -\frac{mgR^2}{s^2}$ عمل کرتی ہے جہاں چاند کے مرکز سے جسم تک فاصلہ s اور چاند کا رداس R ہے (شکل 7.73)۔ چونکہ قوت F نیچے رخ عمل کرتا ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا

ہے۔ (ا) ایک جسم کو $t = 0$ پر سطح چاند سے v_0 رفتار کے ساتھ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = ma$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقام s پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

یوں جب تک $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ ہو، رفتار مثبت رہے گی۔ رفتار $v_0 = \sqrt{2gR}$ چاند کی **گریزی رفتار**[36] کہلاتی ہے۔ جس جسم کو اس رفتار یا اس سے زیادہ رفتار سے سطح چاند سے اوپر پھینکا جائے، وہ جسم چاند پر واپس نہیں گرے گا۔ (ب) دکھائیں کہ اگر $v_0 = \sqrt{2gR}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}$$

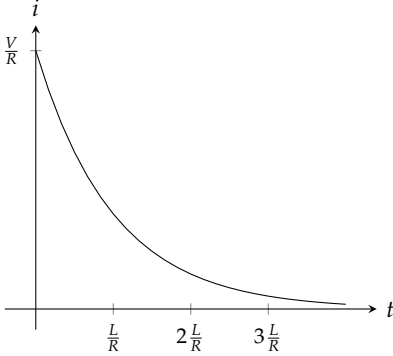
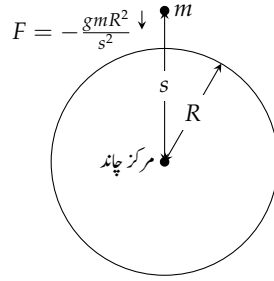
سمتی رفتار کے راست مزاحمت

سوال 7.751: ایک سائکل سوار $21.6\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتے ہوئے پیڈل گھمانا بند کرتا ہے۔ مساوات 7.60 میں $k = \frac{20}{7}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیں اور سائکل سوار کی کمیت $80\,\mathrm{kg}$ ہے۔ (ا) سائکل سوار کتنا فاصلہ طے کر کے رکے گا۔ (ب) کتنی دیر بعد سائکل سوار کی رفتار $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی؟
جواب: (ا) $168\,\mathrm{m}$، (ب) تقریباً 70 سیکنڈ

سوال 7.752: ایک بحری جہاز جس کی کمیت $2.5 \times 10^7\,\mathrm{kg}$ ہے کے لئے مساوات 7.60 میں $k = 44\,000\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہے۔ اس بحری جہاز کی رفتار $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہوتی ہے جب اس کا انجن کام کرنا چھوڑ دیتا ہے۔ (ا) یہ بحری جہاز کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا؟ (ب) اس کی رفتار کتنی دیر میں $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ تک ہو گی؟

RL ادوار

سوال 7.753: سلسلہ وار RL دور میں برقی رو
ایک سلسلہ وار RL دور پر لمحہ $t = 0$ پر برقی دباو لاگو کیا جاتا ہے۔ کتنی دیر میں برقرار حال برقی رو کی نصف قیمت تک دور میں برقی رو پہنچے گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جواب کا دارومدار R اور L کی قیمتوں پر ہو گا نا کہ لاگو برقی دباو کی قیمت پر۔
جواب: $t = \frac{L}{R}\ln 2$ سیکنڈ بعد

[36] escape velocity

شکل 7.74: تنزل برقی رو (سوال 7.754)

شکل 7.73: چاند پر قوت کشش

سوال 7.754: تنزل برقی رو

سلسلہ وار RL دور میں ابتدائی طور پر I_0 برقی رو پائی جاتی ہے جو درج ذیل مساوات کے تحت وقت کے ساتھ گھٹتی ہے (شکل 7.74)۔

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

(ا) اس مساوات کو برقی رو i کے لئے حل کریں۔ (ب) برقی رو کتنی دیر میں $\frac{I_0}{2}$ ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = \frac{L}{R}$ پر i کتنا ہو گا۔

سوال 7.755: وقتی مستقل

مستقل $\frac{L}{R}$ کو مہندس RL دور کا **وقتی مستقل**[37] کہتے ہیں۔ تقریباً 3 وقتی مستقل دورانیہ میں برقی رو برقرار حال قیمت کے 95 % قیمت تک پہنچ پاتا ہے۔ یوں وقتی مستقل سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ دور کتنا جلدی برقرار حاصل اختیار کرے گا۔ (ا) مساوات 7.64 میں لمحہ $t = 3\frac{L}{R}$ پر i تلاش کریں۔ یہ برقرار حال برقی رو کی 95 % قیمت ہو گی۔ (ب) لمحہ $t = 2\frac{L}{R}$ پر مساوات 7.64 کتنی برقی رو دیتی ہے؟

جواب: (ا) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} \approx 0.95\frac{V}{R}$، (ب) 86 %

سوال 7.756: آئیں مساوات 7.64 حاصل کرتے ہیں۔

ا. مسئلہ 7.4 کی مدد سے دکھائیں کہ

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

کا حل درج ذیل ہے۔

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

[37] time constant

ب. ابتدائی معلومات $i(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کریں۔ یوں مساوات 7.64 حاصل ہوتی ہے۔

ج. دکھائیں کہ $i = \frac{V}{R}$ مساوات 7.63 کا حل ہے اور درج ذیل $i = Ce^{-(R/L)t}$ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0$$

مرکب کے مسائل

ایک کیمیا جو مائع (یا گیس) کی صورت میں ہے کو ایک برتن میں ڈالا جاتا ہے جس میں پہلے سے کوئی مائع (یا گیس) موجود ہے اور عین ممکن ہے کہ اسی کیمیا کی مخصوص مقدار بھی اس برتن میں پہلے سے موجود ہو۔ مرکب کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھتے ہوئے برتن سے اس کی نکاسی مستقل شرح سے کی جاتی ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ہمیں برتن میں کیمیا کی لحاتی مقدار معلوم ہو۔ درج ذیل مساوات پر مبنی تفرقی مساوات اس عمل کو بیان کرتی ہے۔

$$\text{(کیمیا کی شرح اخراج)} - \text{(کیمیا کی شرح آمد)} = \text{برتن میں کیمیا کی مقدار کی شرح تبدیلی} \tag{7.65}$$

گر لمحہ t پر برتن میں کیمیا کی مقدار $y(t)$ اور برتن میں مواد کا کل حجم $V(t)$ ہو تب کیمیا کے اخراج کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \text{انعکاس کیمیا} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{(شرح انعکاس مائع)} \\ &= \text{(شرح انعکاس مائع)} \cdot \text{(لمحہ } t \text{ پر برتن میں ارتکاز)} \end{aligned} \tag{7.66}$$

یوں مساوات 7.65 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \text{(شرح آمد کیمیا)} - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot \text{(شرح انعکاس مائع)} \tag{7.67}$$

سوال 7.757: ایک حوض میں ابتدائی طور پر 500 لٹر نمکین پانی پایا جاتا ہے جس میں $25\,\mathrm{kg}$ نمک حل ہے۔ اس حوض میں $5\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے نمکین پانی داخلی ہوتا ہے جس میں $0.4\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ نمک ملا ہوا ہے جبکہ حوض سے نمکین پانی کا انخلا $4\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں نمکین پانی کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھا جات ہے۔

ا. حوض میں نمک داخل ہونے کی شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) کیا ہے؟

ب. لمحہ t پر حوض میں نمکین پانی کا حجم کتنا ہے؟

ج. لمحہ t پر نمک کس شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) سے حوض سے خارج ہوتا ہے؟

د. مرکب بنانے کے اس عمل کا ابتدائی قیمت مسئلہ لکھیں اور اس کو حل کریں۔

ہ. عمل شروع ہونے کے 25 منٹ بعد حوض میں نمک کا ارتکاز کتنا ہو گا؟

جواب: (ا) $2\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$، (ب) $100+t$ لٹر، (ج) $\frac{4y}{100+t}\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$، (د) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2-\frac{4y}{100+t},\ y(0)=25$، $y(t)=\frac{2}{5}(100+t)-\frac{15}{(1+t/100)^4}$، (ہ) $0.35\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$

سوال 7.758: تیل صاف سازی کے کارخانہ میں ایک حوض میں $10\,000\,\mathrm{L}$ تیل پایا جاتا ہے جس میں ابتدائی طور پر $50\,\mathrm{kg}$ اضافی مادہ شامل ہے۔ سردی کے موسم کے بنا اس میں $0.4\,\mathrm{kg}$ فی لٹر اضافی مواد کو $200\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ شامل کیا جاتا ہے۔ حوض میں تیل کو اچھی طرح ہلا کر یکساں رکھا جاتا ہے۔ حوض سے مرکب کے انعکاس کی شرح $225\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے 20 منٹ بعد حوض میں اضافی مواد کی مقدار معلوم کریں۔

سوال 7.759: ایک حوض میں $500\,\mathrm{L}$ خالص پانی پایا جاتا ہے۔ ایک محلول جس میں $0.1\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ پایا کھاد پایا جاتا ہے کو $5\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے حوض میں شامل کیا جاتا ہے۔ حوض سے محلول کا انعکاس $15\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں کھاد کی زیادہ سے زیادہ مقدار معلوم کریں اور اس مقدار تک پہنچنے کے لئے درکار وقت معلوم کریں۔
جواب: ؟؟

سوال 7.760: ایک دفتر کے ایک کمرے میں ابتدائی طور پر $150\,\mathrm{m^3}$ صاف ہوا پائی جاتی ہے۔ لمحہ $t=0$ پر قریبی کمرے میں موجود افسران سگریٹ پینا شروع کرتے ہیں جس کی بنا $4\,\%$ زہریلی کاربن مونو آکسائڈ $0.01\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے اس کمرے میں داخل ہوتی ہے جہاں ایک پنکھا پوری ہوا کو یکساں رکھتا ہے۔ اس کمرے سے ہوا کا انخلا $0.01\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ ہے۔ اس کمرے میں کب زہریلی گیس $0.01\,\%$ ہو گی؟

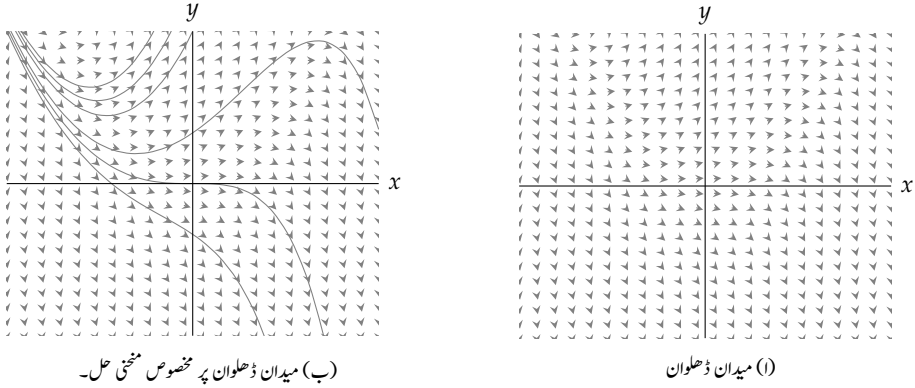
7.12 یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لئے y کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم **اعدادی حل**[38] کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو **اعدادی ترکیب**[39] کہتے ہیں۔ اعدادی تراکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل نا ممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی تراکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو **ترکیب یولر**[40] کہتے ہیں۔

---

[38] numerical solution
[39] numerical method
[40] Euler' method

(ا) میدان ڈھلوان

(ب) میدان ڈھلوان پر مخصوص منحنی حل۔

شکل 7.75: تفرقی مساوات $y' = y - x^2$ کے میدان ڈھلوان پر منحنی حل ترسیم کی گئی ہیں۔ کمپیوٹر پر میدان ڈھلوان کو عموماً سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے اگرچہ ڈھلوان سمتیہ نہیں ہے۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ ہر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ ڈھلوان والی قلیل سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x, y) سے گزرتے ہوئے حل کی ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کی ڈھلوان کے برابر ہو گا لہٰذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں (شکل 7.75)۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آئیں کمپیوٹر کی مدد سے منحنی حل کے حصول پر غور کریں۔

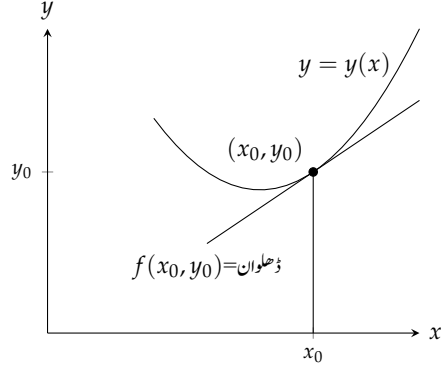
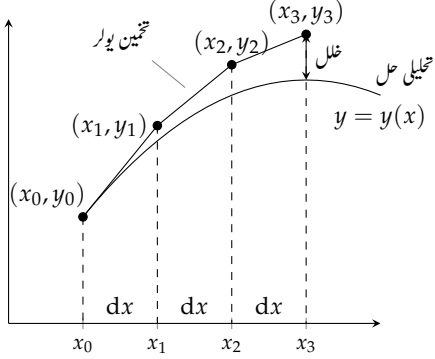
خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم منحنی حل $y = y(x)$ کی تخمین درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x - x_0)$$

یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تفاعل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمین ہو گا (شکل 7.76)۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بندیوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لئے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

شکل 7.77: ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی قیمت مسئلہ $y'=f(x,y),\, y(x_0)=y_0$ کے ابتدائی تین نقطوں کا حصول۔ ہر قدم پر مجموعی خلل بڑھتا ہے۔

شکل 7.76: خط مماس کی مساوات $y=L(x)=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$ ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0,y_0) منحنی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0=x_0+\mathrm{d}x$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری $\mathrm{d}x$ بہت کم ہو تب

$$y_1=L(x_1)=y_0+f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x$$

اصل حل $y=y(x_1)$ کا اچھا تخمین ہو گا۔ یوں نقطہ (x_0,y_0) سے، جو ٹھیک منحنی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1,y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو منحنی حل پر نقطہ $(x_1,y(x_1))$ کے بہت قریب ہو گا۔

نقطہ (x_1,y_1) اور ڈھلوان $f(x_1,y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2=x_1+\mathrm{d}x$ لے کر

$$y_2=y_1+f(x_1,y_1)\,\mathrm{d}x$$

سے، منحنی حل $y=y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینی نقطہ (x_2,y_2) حاصل کرتے ہیں (شکل 7.77)۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2,y_2) اور ڈھلوان $f(x_2,y_2)$ سے

$$y_3=y_2+f(x_2,y_2)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال 7.84: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لئے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمین y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y'=1+y,\quad y(0)=1$$

ابتدا $x_0=0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x=0.1$ لیں۔

حل: **قدم اول:**

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + (1+1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

قدم دوم:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.2 + (1+1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$

قدم سوم:

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.42 + (1+1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

□

ترکیب یولر

ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

کے حل کی تخمینی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \mathrm{d}x \\ x_2 &= x_1 + \mathrm{d}x \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.68}$$

اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{7.69}$$

جدول 7.13: تحلیلی حل اور ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال 7.85)

$y_{\text{تحلیلی}} - y_{\text{تخمینی}} = \text{خلل}$	$y_{\text{تحلیلی}}$	$y_{\text{تخمینی}}$	x
0.0000	1.0000	1.0000	0.0
0.0103	1.2103	1.2000	0.1
0.0228	1.4428	1.4200	0.2
0.0377	1.6997	1.6620	0.3
0.0554	1.9836	1.9282	0.4
0.0764	2.2974	2.2210	0.5
0.1011	2.6442	2.5431	0.6
0.1301	3.0275	2.8974	0.7
0.1639	3.4511	3.2872	0.8
0.2033	3.9192	3.7159	0.9
0.2491	4.4366	4.1875	1.0

ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں خلل جمع ہو گا۔

مثال 7.85: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \le x \le 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل: اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول 7.13 میں، مساوات 7.68 اور مساوات 7.69 استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ درست تخمینی نتائج کا تحلیلی حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل میں 5.6 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال 7.86: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لئے وقفہ $0 \le x \le 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

شروع $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.05$ لیں۔

حل: جدول 7.14 میں نتائج اور تحلیلی بالکل ٹھیک حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قدموں کی تعداد 10 سے 20 کرنے سے خلل کم ہوتا ہے۔ اس مرتبہ $x = 1$ پر صرف 2.9 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

جدول 7.14: ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد بڑھانے سے خلل میں کمی پیدا ہوتی ہے (مثال 7.86)۔

$y_{\text{تخمینی}} - y_{\text{تحلیلی}} =$ خلل	$y_{\text{تحلیلی}}$	$y_{\text{تخمینی}}$	x
0.0000	1.0000	1.0000	0.00
0.0025	1.1025	1.1000	0.05
0.0053	1.2103	1.2050	0.10
0.0084	1.3237	1.3153	0.15
0.0118	1.4428	1.4310	0.20
0.0155	1.5681	1.5526	0.25
0.0195	1.6997	1.6802	0.30
0.0239	1.8381	1.8142	0.35
0.0287	1.9836	1.9549	0.40
0.0339	2.1366	2.1027	0.45
0.0396	2.2974	2.2578	0.50
0.0458	2.4665	2.4207	0.55
0.0525	2.6442	2.5917	0.60
0.0598	2.8311	2.7713	0.65
0.0676	3.0275	2.9599	0.70
0.0761	3.2340	3.1579	0.75
0.0854	3.4511	3.3657	0.80
0.0953	3.6793	3.5840	0.85
0.1060	3.9192	3.8132	0.90
0.1175	4.1714	4.0539	0.95
0.1300	4.4366	4.3066	1.00

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد مزید بڑھا کر اس سے بھی بہتر نتیجہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں ایسا کرنے سے نا صرف کمپیوٹر کو حل حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہو گا بلکہ کمپیوٹر میں ہندسوں کی تعداد پر پابندی کی بنا پیدا پور و پور خلل بڑھتا ہے۔

خلل اور اس کو کم کرنے کے طریقوں پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔ انہیں سمجھنے کے لئے مزید اعلیٰ درجے کی نصاب درکار ہو گی۔ ترکیب یولر سے زیادہ بہتر اعدادی تراکیب پائے جاتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات پڑھنے کے دوران سیکھیں گے۔ اعدادی ترکیب میں قدموں کی تعداد اور خلل کے تعلق پر غور کرنے کے لئے آپ کو سوالات میں موقع ملے گا۔

سوالات

تخمینِ یولر

سوال 7.761 تا سوال 7.766 میں ترکیب یولر سے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلہ کے اولین تین تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔ دیا گیا قدم استعمال کریں۔ مسئلے کا تحلیلی حل تلاش کریں اور اپنے تخمین کی درستگی پر غور کریں۔ اپنے نتائج کو 4 اعشاریہ درست رکھیں۔

سوال 7.761: $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$, $y_1 = -0.25$, $y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.75$

سوال 7.762: $y' = x(1-y), \quad y(1) = 0, \quad \mathrm{d}x = 0.2$

سوال 7.763: $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad \mathrm{d}x = 0.2$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4.2$, $y_2 = 6.216$, $y_3 = 9.697$

سوال 7.764: $y' = y^2(1+2x), \quad y(-1) = 1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال 7.765: $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.1$
جواب: $y_{\text{تحلیلی}} = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2.0$, $y_2 = 2.0202$, $y_3 = 2.0618$

سوال 7.766: $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال 7.767: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = y, y(0) = 1$ کے لئے $y(1)$ تلاش کریں۔ $y(1)$ کی ٹھیک قیمت کتنی ہے؟
جواب: $y \approx 2.488\,32$ ، ٹھیک جواب e ہے۔

سوال 7.768: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = \frac{y}{x}, y(1) = 2$ کے لئے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

شکل 7.78: میدان ڈھلوان برائے سوال 7.771 تا سوال 7.774

سوال 7.769: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.5$ لے کر $y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}}, y(1) = -1$ کے لئے $y(5)$ تلاش کریں۔ $y(5)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

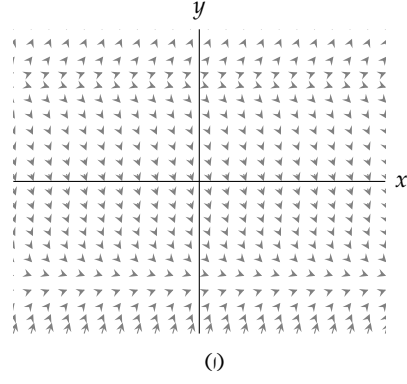
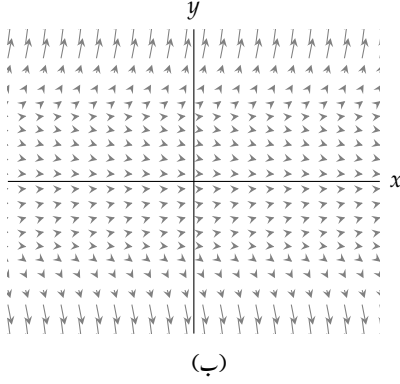
جواب: $y \approx -0.2272$ ، ٹھیک جواب $\frac{1}{1-2\sqrt{5}} \approx -0.2880$ ہے۔

سوال 7.770: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ لے کر $y' = y - e^{2x}, y(0) = 1$ کے لئے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

میدان ڈھلوان

سوال 7.771 تا سوال 7.774 میں دیے گئے تفرقی مساوات کے منحنی حل اور میدان ڈھلوان کی نشاندہی شکل 7.78 میں کریں۔

سوال 7.771: $y' = xy$

جواب: ب

شکل 7.79: میدان ڈھلوان برائے سوال 7.775 اور سوال 7.776

سوال 7.772: $y' = x + y$

سوال 7.773: $y' = x$
جواب: الف

سوال 7.774: $y' = x - y$

سوال 7.775 میں شکل 7.79-ا اور سوال 7.776 میں شکل 7.79-ب کے میدان ڈھلوان کی نقل اتار کر اس پر منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

سوال 7.775: $y' = (y+2)(y-2)$

سوال 7.776: $y' = y(y+1)(y-1)$

سوال 7.777 تا سوال 7.780 میں میدان ڈھلوان کا کچھ حصہ کھینچ کر دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

سوال 7.777: $y' = y$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$

سوال 7.778: $y' = 2(y-4)$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,4)$، (ج) $(0,5)$

سوال 7.779: $y' = y(2-y)$ اور نقاط (ا) $(0,1/2)$، (ب) $(0,3/2)$، (ج) $(0,2)$، (د) $(0,3)$

سوال 7.780: $y' = y^2$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$، (د) $(0,0)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 7.781 تا سوال 7.784 میں دیے گئے تفرقی مساوات پر درج ذیل اقدام کرتے ہوئے ترسیمی غور کریں۔

ا. دیے گئے تفرقی مساوات کا میدان ڈھلوان xy مستوی میں کھینچیں۔

ب. تفرقی مساوات کا عمومی حل کمپیوٹر کے کسی ریاضی کے پروگرام کی مدد سے حاصل کریں۔

ج. اختیاری مستقل $C = -2, -1, 0, 1, 2$ لیتے ہوئے منحنی حل کو میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

د. دیے گئے مسئلے کا تحلیلی حل وقفہ $[0, b]$ پر تلاش کر کے ترسیم کریں۔

ھ. دیے گئے وقفہ کو 4 ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے یولر تخمین کو بھی میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

و. جزو-ہ کو 8، 16 اور 32 ذیلی وقفوں کے لئے دوبارہ حل کر کے جزو-ہ کے نتائج کے اوپر ترسیم کریں۔

ز. نقطہ $x = b$ پر چاروں یولر تخمین میں خلل تلاش کریں۔ نتائج کی بہتری پر تبصرہ کریں۔

سوال 7.781: $y' = x + y,\ y(0) = -\frac{7}{10};\ -4 \le x \le 4,\ -4 \le y \le 4;\ b = 1$

سوال 7.782: $y' = -\frac{x}{y},\ y(0) = 2;\ -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3;\ b = 2$

سوال 7.783: $y' = y(2 - y),\ y(0) = \frac{1}{2};\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ b = 3$

سوال 7.784: $y' = (\sin x)(\sin y),\ y(0) = 2;\ -6 \le x \le 6,\ -6 \le y \le 6;\ b = \frac{3\pi}{2}$

سوال 7.785 اور سوال 7.786 کا بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح حل نہیں پایا جاتا ہے۔ان تفرقی مساوات پر ترسیمی غور کریں۔ مذکورہ بالا جزو-الف تا جزو-ز میں زیادہ سے زیادہ کو کرنے کی کوشش کریں۔

سوال 7.785: $y' = \cos(2x - y),\ y(0) = 2;\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5;\ y(2)$

سوال 7.786: $y' = y(\frac{1}{2} - \ln y),\ y(0) = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ y(3)$

سوال 7.787: ابتدائی قیمت مسئلہ $y' + y = f(x),\ y(0) = 0$ کا حل کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں جہاں $f(x)$ درج ذیل ہے۔

(ا) $2x$، (ب) $\sin 2x$، (ج) $3e^{x/2}$، (د) $2e^{-x/2}\cos 2x$

تمام حل کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے کی خاطر انہیں وقفہ $-2 \le x \le 6$ پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال 7.788: (ا) درج ذیل تفرقی مساوات کی میدان ڈھلوان کا خاکہ وقفہ $-3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3$ کے لئے کھینچیں۔

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

(ب) متغیرات کی علیحدگی کے بعد کمپیوٹر کے ریاضی پروگرام کی مدد سے تکمل کرتے ہوئے خفی حل تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب کے نتیجہ کو مستقل $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ کے لئے ترسیم کریں۔ (د) اس حل کو ترسیم کریں جو ابتدائی شرط $y(0) = -1$ کو مطمئن کرتا ہو۔

باب 8

تکمل کے طریقے

ہم نے دیکھا کہ چیزوں کی ناپ اور روز مرہ زندگی کے اعمال کی نمونہ کشی تکمل کو جنم دیتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ الٹ تفرق سے تکمل کو حل کیا جا سکتا ہے۔ کسی عمل کی نمونہ کشی میں زیادہ گہرائی تک جانے سے زیادہ پیچیدہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ اس طرح کے پیچیدہ تکمل کو کس طرح سادہ صورت دی جا سکتی ہے جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو۔ اس باب میں ہم انجانے تکمل سے جانے پہچانے تکمل کا حصول سیکھیں گے جنہیں جدول سے دیکھا جا سکتا ہے یا جس کو کمپیوٹر سے حل کیا جا سکتا ہے۔

8.1 تکمل کے بنیادی کلیات

ہم نے حصہ 5.1 میں دیکھا کہ غیر قطعی تکمل کو حل کرنے کے لئے اس کے الٹ تفرق کے ساتھ مستقل جمع کرنا ہو گا۔ جدول 8.1 میں ان تکمل کی بنیادی روپ درج کی گئی ہے جنہیں اب تک ہم حل کرتے آ رہے ہیں۔ زیادہ تکملات کا جدول کتاب کی آخر میں پیش کیا گیا ہے جس پر حصہ 8.5 میں غور کیا جائے گا۔

الجبرائی طریقہ

ہمیں عموماً تکمل کو جانی پہچانی معیاری روپ میں لکھنا ہو گا۔

مثال 8.1: سادہ روپ حاصل کرنے کا بدل
تکمل $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

جدول 8.1: تکمل کے بنیادی کلیات

شمار	کلیہ
1	$\int \mathrm{d}u = u + C$
2	$\int k\,\mathrm{d}u = ku + C$ (k عدد ہے)
3	$\int (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v$
4	$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
6	$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$
7	$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C$
8	$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C$
9	$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C$
10	$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C$
11	$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C$
12	$\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
13	$\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C = -\ln\lvert\csc u\rvert + C$
14	$\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$
15	$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
16	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
17	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + C$
18	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C$

حل:

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} \qquad u = x^2-9x+1$$
$$= \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C \qquad \text{جدول 8.1 کلیہ 4 میں } n = -1/2$$
$$= 2u^{1/2} + C$$
$$= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C$$

□

مثال 8.2: تکمیل مربع
تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}}$ حل کریں۔

حل: ہم مربع مکمل کرتے ہوئے زیر جذر کو لکھتے ہیں:

$$8x-x^2 = -(x^2-8x) = -(x^2-8x+16-16)$$
$$= -(x^2-8x+16)+16 = 16-(x-4)^2$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-(x-4)^2}}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = 4, u = (x-4)$$
$$= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C \qquad \text{جدول 8.1 کلیہ 16}$$
$$= \sin^{-1}(\tfrac{x-4}{4}) + C$$

□

مثال 8.3: طاقت پھیلا کر تماثل کا استعمال
تکمل $\int (\sec x \tan x)^2\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم متکمل کو پھیلاتے ہیں۔

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$$

بائیں ہاتھ پہلے دو اجزاء کا تکمل ہم جانتے ہیں البتہ $\tan^2 x$ کا کچھ کرنا ہو گا۔ ہم درج ذیل تماثل کے ذریعہ اس کو جانی پہچانی روپ میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \implies \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2 \, dx &= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1) \, dx \\ &= 2\int \sec^2 dx + 2\int \sec x \tan x \, dx - \int 1 \, dx \\ &= 2\tan x + 2\sec x - x + C\end{aligned}$$

□

مثال 8.4: جذر سے چھٹکارا
تکمل $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x} \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم تماثل

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \implies 1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

میں $\theta = 2x$ پر کر کے

$$1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$$

لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر وقفہ $[0, \frac{\pi}{4}]$ پر $\cos 2x \geq 0$ کی بنا $|\cos 2x| = \cos 2x$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x} \, dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x} \, dx \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x| \, dx \qquad\qquad \sqrt{u^2} = |u| \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \\ &= \sqrt{2} \left. \frac{\sin 2x}{2} \right|_0^{\pi/4} \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{1}{2} - 0\Big] = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

□

مثال 8.5: غیر مناسب کسر کی مناسب کسر میں تبدیلی
تکمل $\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: متکمل غیر مناسب کسر (نسب نما کی طاقت، شمار کنندہ کی طاقت سے زیادہ یا اس کے برابر ہے) ہے۔ اس کا تکمل لینے سے پہلے ہم پہلے تقسیم کر کے حاصل تقسیم اور باقی حاصل کرتے ہیں جو مناسب کسر ہو گا:

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline 3x+2 & 3x^2-7x \\ & -3x^2-2x \\ \hline & -9x \\ & 9x+6 \\ \hline & 6 \end{array}$$

یوں

$$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x-3+\frac{6}{3x+2}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x-3+\frac{6}{3x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln|3x+2| + C$$

□

یہ ضروری نہیں ہے کہ غیر مناسب کسر کو بذریعہ تقسیم مناسب کسر میں تبدیل کرنے سے ہمیں ایسا تکمل حاصل ہو جسے ہم سیدھا تکمل کر سکیں۔ ایسی صورت پر حصہ 8.3 میں غور کیا جائے گا۔

مثال 8.6: ایک کسر کی علیحدگی
تکمل $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم متکمل کو دو علیحدہ کسر لکھتے ہیں۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

بائیں ہاتھ پہلے نئے تکمل میں ہم $u = 1 - x^2$ ، $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ اور $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1\end{aligned}$$

دوسرا نیا تکمل معیاری روپ میں ہے لہٰذا

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1} x + C_2$$

ہو گا۔یوں پورا تکمل درج ذیل ہو گا جہاں $C_1 + C_2 = C$ لکھا گیا ہے۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1} x + C$$

□

مثال 8.7: اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب
تکمل $\int \sec x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \int (\sec x)(1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} && u = \tan x + \sec x \\ &= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

□

ہم مثال 8.7 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ لیتے ہوئے کوسیکنٹ کے تکمل کا کلیہ معلوم کر سکتے ہیں (سوال 8.95)۔

جدول 8.2: سیکنٹ اور کوسیکنٹ کے کلیات تکمل

شمار	کلیہ
1	$\int \sec u \, \mathrm{d}u = \ln\lvert \sec u + \tan u \rvert + C$
2	$\int \csc u \, \mathrm{d}u = -\ln\lvert \csc u + \cot u \rvert + C$

تکمل کو بنیادی کلیہ کی روپ میں لکھنے کا طریقہ

طریقہ	مثال
سادہ روپ بذریعہ بدل	$\frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$
تکمیل مربع	$\sqrt{8x-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{16-(x-4)^2}$
تکونیاتی تماثل	$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$
	$= \sec^2 x + 2\sec x \tan x + (\sec^2 x - 1)$
	$= 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1$
جذر سے چھٹکارا	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\lvert\cos 2x\rvert$
غیر مناسب سے مناسب کسر کا حصول	$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x - 3 + \frac{6}{3x+2}$
کسر کی علیحدگی	$\frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب	$\sec x = \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$
	$= \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}$

سوالات

بنیادی بدل

سوال 8.1 تا سوال 8.36 میں بدل کی استعمال سے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.1: $\int \frac{16x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8x^2+1}}$

جواب: $2\sqrt{8x^2+1} + C$

سوال 8.2: $\int \frac{3\cos x \,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3\sin x}}$

سوال 8.3: $\int 3\sqrt{\sin v}\cos v \,\mathrm{d}v$
جواب: $2(\sin v)^{3/2} + C$

سوال 8.4: $\int \cot^3 y \csc^2 y \,\mathrm{d}y$

سوال 8.5: $\int_0^1 \frac{16x \,\mathrm{d}x}{8x^2+2}$
جواب: $\ln 5$

سوال 8.6: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z} \,\mathrm{d}z$

سوال 8.7: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
جواب: $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$

سوال 8.8: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x}}$

سوال 8.9: $\int \cot(3-7x) \,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{7}\ln\left|\sin(3-7x)\right| + C$

سوال 8.10: $\int \csc(\pi x - 1) \,\mathrm{d}x$

سوال 8.11: $\int e^\theta \csc(e^\theta + 1) \,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\ln\left|\csc(e^\theta+1) + \cot(e^\theta+1)\right| + C$

سوال 8.12: $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x} \,\mathrm{d}x$

سوال 8.13: $\int \sec\frac{t}{3} \,\mathrm{d}t$
جواب: $3\ln\left|\sec\frac{t}{3} + \tan\frac{t}{3}\right| + C$

سوال 8.14: $\int x\sec(x^2-5) \,\mathrm{d}x$

سوال 8.15: $\int \csc(s-\pi) \,\mathrm{d}s$
جواب: $-\ln\left|\csc(s-\pi) + \cot(s-\pi)\right| + C$

سوال 8.16: $\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta} \,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.17: $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2xe^{x^2}\,dx$
جواب: 1

سوال 8.18: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(y)e^{\cos y}\,dy$

سوال 8.19: $\int e^{\tan v}\sec^2 v\,dv$
جواب: $e^{\tan v}+C$

سوال 8.20: $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt$

سوال 8.21: $\int 3^{x+1}\,dx$
جواب: $\frac{e^{x+1}}{\ln 3}+C$

سوال 8.22: $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,dx$

سوال 8.23: $\int \frac{2^{\sqrt{w}}}{2\sqrt{w}}\,dw$
جواب: $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2}+C$

سوال 8.24: $\int 10^{2\theta}\,d\theta$

سوال 8.25: $\int \frac{9\,du}{1+9u^2}$
جواب: $3\tan^{-1}3u+C$

سوال 8.26: $\int \frac{4\,dx}{1+(2x+1)^2}$

سوال 8.27: $\int_0^{1/6} \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
جواب: $\frac{\pi}{18}$

سوال 8.28: $\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$

سوال 8.29: $\int \frac{2s\,ds}{\sqrt{1-s^4}}$
جواب: $\sin^{-1}s^2+C$

سوال 8.30: $\int \frac{2\,dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

سوال 8.31: $\int \frac{6\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{25x^2-1}}$
جواب: $6\sec^{-1}|5x|+C$

سوال 8.32: $\int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-9}}$

سوال 8.33: $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$
جواب: $\tan^{-1}e^x+C$

سوال 8.34: $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

سوال 8.35: $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cos(\ln x)}$
جواب: $\ln(2+\sqrt{3})$

سوال 8.36: $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x+4x\ln^2 x}$

تکمیل مربع

سوال 8.37 تا سوال 8.42 میں مربع مکمل کر کے اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.37: $\int_1^2 \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$
جواب: 2π

سوال 8.38: $\int_2^4 \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

سوال 8.39: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$
جواب: $\sin^{-1}(t-2)+C$

سوال 8.40: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$

سوال 8.41: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$
جواب: جب $|x+1|>1$ تب $\sec^{-1}|x+1|+C$

سوال 8.42: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

تکونیاتی تماثل

سوال 8.43 تا سوال 8.46 میں تکونیاتی تماثل اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.43: $\int (\sec x + \cot x)^2 \, dx$
جواب: $\tan x - 2\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert - \cot x - x + C$

سوال 8.44: $\int (\csc x - \tan x)^2 \, dx$

سوال 8.45: $\int \csc x \sin 3x \, dx$
جواب: $x + \sin 2x + C$

سوال 8.46: $\int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) \, dx$

غیر مناسب کسر

سوال 8.47 تا سوال 8.52 میں غیر مناسب کسر سے مناسب کسر کے حصول اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.47: $\int \frac{x}{x+1} \, dx$
جواب: $x - \ln\lvert x + 1\rvert + C$

سوال 8.48: $\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

سوال 8.49: $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x^3}{x^2-1} \, dx$
جواب: $7 + \ln 8$

سوال 8.50: $\int_{-1}^{3} \frac{4x^2-7}{2x+3} \, dx$

سوال 8.51: $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4} \, dt$
جواب: $2t^2 - t + 2\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) + C$

سوال 8.52: $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5} \, d\theta$

کسر کی علیحدگی

سوال 8.53 تا سوال 8.56 میں کسر علیحدہ کر کے بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.53: $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$
جواب: $\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

سوال 8.54: $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.55: $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\sqrt{2}$

سوال 8.56: $\int_0^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

سوال 8.57 تا سوال 8.62 میں اکائی کی ایک روپ سے ضرب اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

سوال 8.57: $\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\tan x - \sec x + C$

سوال 8.58: $\int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.59: $\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\ln|1+\sin\theta| + C$

سوال 8.60: $\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.61: $\int \frac{1}{1-\sec x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\cot x + x + \csc x + C$

سوال 8.62: $\int \frac{1}{1-\csc x}\,\mathrm{d}x$

جذر سے چھٹکارا

سوال 8.63 تا سوال 8.70 میں جذر سے چھٹکارے کے بعد تکمل حل کریں۔

سوال 8.63: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x$
جواب: 4

سوال 8.64: $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.65: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\sqrt{2}$

سوال 8.66: $\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$

سوال 8.67: $\int_{-\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: 2

سوال 8.68: $\int_{\pi/2}^{\pi}\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.69: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 y}\,\mathrm{d}y$
جواب: $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$

سوال 8.70: $\int_{-\pi/4}^{0}\sqrt{\sec^2 y-1}\,\mathrm{d}y$

مختلف قسم کے تکمل

سوال 8.71 تا سوال 8.82 میں کوئی بھی موزوں طریقہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔

سوال 8.71: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\csc x-\cot x)^2\,\mathrm{d}x$
جواب: $4-\frac{\pi}{2}$

سوال 8.72: $\int_{0}^{\pi/4}(\sec x+4\cos x)^2\,\mathrm{d}x$

سوال 8.73: $\int\cos\theta\csc(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $-\ln\left|\csc(\sin\theta)+\cot(\sin\theta)\right|+C$

سوال 8.74: $\int(1+\frac{1}{x})\cot(x+\ln x)\,\mathrm{d}x$

سوال 8.75: $\int(\csc x-\sec x)(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\ln\lvert\sin x\rvert+\ln\lvert\cos x\rvert+C$

سوال 8.76: $\int(\csc x+\sec x)(\tan x+\cot x)\,\mathrm{d}x$

سوال 8.77: $\int\frac{6\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(1+y)}$
جواب: $12\tan^{-1}(\sqrt{y})+C$

سوال 8.78: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-1}}$

سوال 8.79: $\int \frac{7\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$
جواب: $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right|+C$

سوال 8.80: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

سوال 8.81: $\int \sec^2 t\tan(\tan t)\,\mathrm{d}t$
جواب: $\ln\left|\sec(\tan t)\right|+C$

سوال 8.82: $\int \frac{\tan\theta}{2\sec\theta+1}$

تکونیاتی طاقت

سوال 8.83:

ا. حل کریں: $\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ (اشارہ: $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$)

ب. حل کریں: $\int \cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

ج. بغیر حل کیے بتائیں کہ آپ $\int \cos^9\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

جواب: (ا) $\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+C$ (ب) $\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta+C$
(ج) $\int\cos^9\theta\,\mathrm{d}\theta=\int\cos^8\theta(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int(1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.84:

ا. حل کریں: $\int \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ (اشارہ: $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$)

ب. حل کریں $\int \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta$

ج. حل کریں: $\int \sin^7\theta\,\mathrm{d}\theta$

د. بغیر حل کیے بتائیں آپ $\int \sin^{13}\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

سوال 8.85:

ا. $\int \tan^3\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan\theta\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔(اشارہ: $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$)

ب. $\int \tan^5\theta\,\mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan\theta^3\,\mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \tan^7 \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan \theta^5 \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \tan^{2k+1} \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \tan^{2k-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

جواب:

ا. $\int \tan^3 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta - \int \tan \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \tan^2 \theta + \ln|\cos \theta| + C$

ب. $\int \tan^5 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \tan^4 \theta \, \mathrm{d}\theta - \int \tan^3 \theta \, \mathrm{d}\theta$

ج. $\int \tan^7 \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{6} \tan^6 \theta - \int \tan^5 \theta \, \mathrm{d}\theta$

د. $\int \tan^{2k+1} \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2k} \tan^{2k} \theta - \int \tan^{2k-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 8.86:

ا. $\int \cot^3 \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot \theta \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔(اشارہ: $\cot^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$)

ب. $\int \cot^5 \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot \theta^3 \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \cot^7 \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot \theta^5 \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \cot^{2k+1} \theta \, \mathrm{d}\theta$ کو $\int \cot^{2k-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

نظریہ اور استعمال

سوال 8.87: بالائی جانب $y = 2\cos x$ اور زیریں جانب $y = \sec x, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ میں گھیرے ہوئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

جواب: $2\sqrt{2} - \ln(3 + 2\sqrt{2})$

سوال 8.88: ایک تکونی خطہ کا بالائی سرحد $y = \csc x$ ، نچلا سرحد $y = \sin x, \frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد $x = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اس خطہ کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 8.89: محور x کے گرد سوال 8.87 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

جواب: π^2

سوال 8.90: محور x کے گرد سوال 8.88 کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 8.91: منحنی $y = \ln(\cos x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں۔
جواب: $\ln(2+\sqrt{3})$

سوال 8.92: منحنی $y = \ln(\sec x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

سوال 8.93: محور x، قوس $y = \sec x$، لکیر $x = -\frac{\pi}{4}$ اور $x = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2}+3)}$

سوال 8.94: محور x، قوس $y = \csc x$، لکیر $x = \frac{\pi}{6}$ اور $x = \frac{5\pi}{6}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 8.95: تفاعل $\csc x$ کا تکمل
سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ استعمال کرتے ہوئے مثال 8.7 کی طرز پر درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int \csc x \,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + C$$

سوال 8.96: دکھائیں کہ تکمل

$$\int ((x^2-1)(x+1))^{-2/3}\,\mathrm{d}x$$

کو درج ذیل تمام طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. $u = \frac{1}{x+1}$

ب. $u = \tan^{-1} x$

ج. $u = \tan^{-1}\sqrt{x}$

د. $u = \tan^{-1}(\frac{x-1}{2})$

ھ. $u = \cos^{-1} x$

و. $u = \cosh^{-1} x$

ز. $u = (\frac{x-1}{x+1})^k$

جہاں جزو-ز میں $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$ ہو سکتا ہے۔

8.2 تکمل بالحصص

تکمل بالحصص کی ترکیب سے تکمل

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

جس میں f بار بار قابل تفرق اور g بار بار قابل تکمل ہو کو کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل تکمل

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x$$

اس قسم کا ایک تکمل ہے جہاں $f(x) = x$ دو بار تفرق کے بعد صفر ہو جاتا ہے جبکہ $g(x) = e^x$ کا تکمل بار بار لیا جا سکتا ہے۔ تکمل بالحصص کی ترکیب درج ذیل قسم کے تکمل پر بھی قابل اطلاق ہے

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

جس میں ہر دو بار تفرق اور ہر دو بار تکمل کے بعد وہی f اور g دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔

اس حصہ میں تکمل بالحصص پر غور کیا جائے گا اور اس کا استعمال سکھایا جائے گا۔

تکمل بالحصص کا کلیہ

تکمل بالحصص[1] کا کلیہ قاعدہ ضرب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

سے حاصل ہوتا ہے جس کو تفریقی روپ

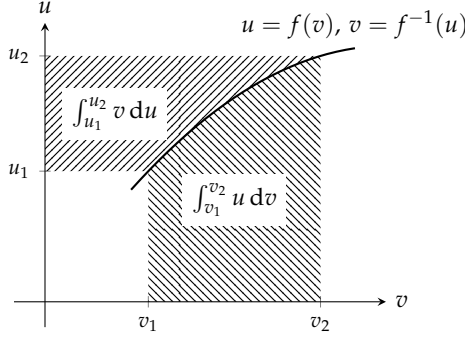
$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

یا

$$u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\,\mathrm{d}u$$

میں لکھ کر تکمل لینے سے درج ذیل کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

کلیہ تکمل بالحصص
$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \tag{8.2}$$

[1] integration by parts

شکل 8.1: بڑے مستطیل سے چھوٹا مستطیل منفی کرنے سے $u_2v_2 - u_1v_1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\int v\,\mathrm{d}u$ منفی کرنے سے $\int u\,\mathrm{d}v$ حاصل ہو گا۔

تکمل بالحصص کا کلیہ ایک تکمل، $\int u\,\mathrm{d}v$ کو دوسرے تکمل، $\int v\,\mathrm{d}u$، کی صورت میں بیان ہے۔ u اور v کی صحیح انتخاب سے دوسرا تکمل حل کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ یہی اس کلیہ کی اہمیت کا سبب ہے۔ جب ہمیں کسی تکمل کو حل کرنے میں ناکامی ہو، ہم اس کو دوسرے تکمل میں تبدیل کر کے توقع کرتے ہیں کہ ہم اس نئے تکمل کو حل کر پائیں گے۔

قطعی تکمل کے لئے مساوی کلیہ درج ذیل ہے جس کو شکل 8.1 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{v_1}^{v_2} u\,\mathrm{d}v = (u_2v_2 - u_1v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v\,\mathrm{d}u \tag{8.3}$$

تکمل بالحصص کب اور کیسا استعمال ہو گا

کب: اگر بدل سے مسئلہ حل نہ ہو تب تکمل بالحصص سے مسئلہ حل کرنے کی کوشش کریں۔

کیسے: دیے گئے تکمل $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ کو تکمل $\int u\,\mathrm{d}v$ کی صورت میں لکھیں جہاں $\mathrm{d}x$ بشمول متکمل کا کچھ حصہ $\mathrm{d}v$ ہو۔

u اور $\mathrm{d}v$ کا انتخاب: کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ دائیں ہاتھ ایک نیا تکمل دیتا ہے۔ اگر یہ نیا تکمل بائیں ہاتھ تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہو تب u اور $\mathrm{d}v$ کا از سر نو انتخاب کریں۔

مثال 8.8: تکمل $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم تکمل بالحصص کے کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ میں

$$u = x, \quad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x,$$
$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad v = \sin x \qquad \cos x \text{ کا سادہ ترین الٹ تفرق}$$

لیتے ہیں۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

□

آئیں مثال 8.8 میں u اور $\mathrm{d}v$ کے مختلف انتخابات پر غور کرتے ہیں۔

مثال 8.9: دوبارہ مثال 8.8 پر غور کرتے ہیں درج ذیل تکمل

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

میں ہم انتخاب درج ذیل چار ممکنہ طریقوں سے کر سکتے ہیں۔

ا. $u = 1, \quad \mathrm{d}v = x\cos x\,\mathrm{d}x$

ب. $u = x, \quad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$

ج. $u = x\cos x, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$

د. $u = \cos x, \quad \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$

آئیں ان پر باری باری غور کریں۔

چونکہ ہمیں $\mathrm{d}v = x\cos x\,\mathrm{d}x$ کا تکمل معلوم نہیں ہے لہٰذا انتخاب-ا کارآمد نہیں ہو گا۔
جیسا ہم نے مثال 8.8 میں دیکھا، انتخاب-ب کارآمد ہے۔
انتخاب-ج درج ذیل دیتا ہے

$$u = x\cos x, \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}u = (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x, \qquad v = x$$

لہٰذا نیا تکمل

$$\int v\,\mathrm{d}u = \int (x\cos x - x^2\sin x)\,\mathrm{d}x$$

ہو گا جو دیے گئے تکمل سے زیادہ مشکل ہے۔
انتخاب-د درج ذیل دے گا

$$u = \cos x, \qquad \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad v = \tfrac{x^2}{2}$$

لہٰذا نیا تکمل

$$\int v\,\mathrm{d}u = -\int \frac{x^2}{2}\sin x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ یہ تکمل بھی دیے گئے تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہے۔

خلاصہ: یاد رہے کہ ہمارا مقصد $\int u\,\mathrm{d}v$ سے تکمل بالحصص کے ذریعہ نیا نسبتاً سادہ تکمل کا حصول ہے۔ بعض اوقات تکمل بالحصص ایسا کرنے میں ناکام ہو گا۔ □

مثال 8.10: ربع اول میں منحنی $y = e^x$، لکیر $x = \ln 2$ اور محددی محوروں کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم بیلنی خول کی ترکیب استعمال کرتے ہیں جو درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi\int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس تکمل کو کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ سے حل کرتے ہیں۔

$$u = x, \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \quad v = e^x \qquad \text{کا سادہ ترین الٹ تفرق } e^x$$

یوں

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$$

ہو گا لہٰذا

$$\int_0^{\ln 2} xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x \,\mathrm{d}x$$
$$= [\ln 2e^{\ln 2} - 0] - [e^x]_0^{\ln 2}$$
$$= 2\ln 2 - [2-1]$$
$$= 2\ln 2 - 1$$

حاصل ہو گا۔ اس طرح جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi \int_0^{\ln 2} xe^x \,\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi(2\ln 2 - 1)$$

□

تکمل بالحصص وہاں بھی کارآمد ہو سکتا ہے جہاں متکمل صرف ایک جزو پر مبنی ہو۔ مثال کے طور پر ہم $\int \ln x \,\mathrm{d}x$ (اگلی مثال) یا $\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x$ (سوال 8.143) کو تکمل بالحصص سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال 8.11: تکمل $\int \ln x \,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم اس کو $\int \ln x \cdot 1 \,\mathrm{d}x$ لکھ کر $\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$ استعمال کرتے ہیں جس میں

$u = \ln x,$	اس کا تفرق سادہ ہے
$\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x,$	اس کا تکمل آسان ہے
$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d},$	
$v = u,$	سادہ ترین الٹ تفرق

ہوں گے۔یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

□

8.2.1 بار بار استعمال

بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے مسئلہ حل ہو گا۔

مثال 8.12: تکمل $\int x^2 e^x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ میں

$$u = x^2, \quad dv = e^x \, dx, \quad v = e^x, \quad du = 2x \, dx$$

لیتے ہیں جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

ہمیں دائیں ہاتھ نیا تکمل حل کرنے کے لئے مزید ایک بار تکمل بالحصص استعمال کرنا ہو گا۔ ہم مثال 8.10 میں دیکھ چکے ہیں کہ اس کی قیمت $xe^x - e^x + C$ ہے۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

□

نا معلوم تکمل کے لئے حل

برقی انجینئری میں درج ذیل قسم کے تکمل پائے جاتے ہیں جن کے حل میں تکمل بالحصص دو بار استعمال کرنے کے بعد نا معلوم تکمل کے لئے حل درکار ہوتا ہے۔ آئیں اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 8.13: تکمل $\int e^x \cos x \, dx$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ میں درج ذیل لیتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad dv = \cos x \, dx, \quad v = \sin x, \quad du = e^x \, dx$$

یوں

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

ہو گا جہاں نیا تکمل، دیے گئے تکمل کی طرح ہے۔ ان میں فرق صرف اتنا ہے کہ نئے تکمل میں $\cos x$ کی بجائے $\sin x$ ہے۔ ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس نئے تکمل کو بھی تکمل بالحصص حل کرتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x, \quad v = -\cos x, \quad \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x$$

یوں

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x \sin x - (-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, \mathrm{d}x)) \\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

ہو گا جہاں نا معلوم تکمل دو بار پایا جاتا ہے۔ ہم نا معلوم تکمل کو ایک طرف منتقل کر کے

$$2 \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C'$$

اگرچہ دوسرے تکمل میں $u = e^x$ اور $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$ کا انتخاب اختیاری معلوم ہوتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ اگر ہم $u = \sin x$ اور $\mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x$ منتخب کریں تب

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x \sin x - (e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x) \\ &= \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

حاصل ہو گا، یعنی ہم وہیں ہیں جہاں سے شروع کیا تھا۔ اس طرز کے تکمل میں تفرق اور تکمل کے اجزاء منتخب کرنے کے بعد انہیں تبدیل نہ کریں۔ تفاعل $e^{ax} \cos bx$ اور اس سے ملتا جلتا تفاعل $e^{ax} \sin bx$ کے تکمل آپ کو کتاب کے آخر میں تکمل کے جدول میں ملیں گے۔ □

جدولی تکمل

ہم نے دیکھا اگر f کا تفرق بار بار لینے سے صفر ملتا ہو اور g کا تکمل بار بار با آسانی لینا ممکن ہو تب $\int f(x)g(x) \, \mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص سے حل کرنا ممکن ہو گا۔ بعض اوقات بار بات تکمل لینے کی تعداد اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ اجزاء پر نظر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت

میں حساب کو ایسی ترتیب دی جا سکتی ہے جس سے کام میں کافی کمی پیدا ہوتی ہے۔ اس کو **جدولی تکمل**[2] کہتے ہیں جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں کی گئی ہے۔

مثال 8.14: جدولی تکمل سے $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$ کو حل کریں۔

حل: ہم $f(x) = x^2$ اور $g(x) = e^x$ لے کر اجزاء کو جدول میں درج کرتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

ہم تیر کے نشان سے جڑے ہوئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کے وسط پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

□

مثال 8.15: جدولی تکمل سے $\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sin x$ لیتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

ہم تیر کے نشان سے جوڑے گئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کی نشان پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

□

[2] tabular integration

سوالات

تکمل بالحصص

سوال 8.97 تا سوال 8.120 کو حل کریں۔

سوال 8.97: $\int x \sin \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$
جواب: $-2x\cos(\frac{x}{2}) + 4\sin(\frac{x}{2}) + C$

سوال 8.98: $\int \theta \cos \pi\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال 8.99: $\int t^2 \cos t \, \mathrm{d}t$
جواب: $t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C$

سوال 8.100: $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.101: $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$
جواب: $\ln 4 - \frac{3}{4}$

سوال 8.102: $\int_1^e x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.103: $\int \tan^{-1} y \, \mathrm{d}y$
جواب: $y\tan^{-1}(y) - \ln\sqrt{1+y^2} + C$

سوال 8.104: $\int \sin^{-1} y \, \mathrm{d}y$

سوال 8.105: $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$
جواب: $x\tan x + \ln|\cos x| + C$

سوال 8.106: $\int 4x \sec^2 2x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.107: $\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$
جواب: $(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$

سوال 8.108: $\int p^4 e^{-p} \, \mathrm{d}p$

سوال 8.109: $\int (x^2 - 5x)e^x \, \mathrm{d}x$
جواب: $(x^2 - 7x + 7)e^x + C$

سوال 8.110: $\int (r^2+r+1)e^r \,\mathrm{d}r$

سوال 8.111: $\int x^5 e^x \,\mathrm{d}x$
جواب: $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)e^x+C$

سوال 8.112: $\int t^2 e^{4t} \,\mathrm{d}t$

سوال 8.113: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta \,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{\pi^2-4}{8}$

سوال 8.114: $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x \,\mathrm{d}x$

سوال 8.115: $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t \,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{5\pi-3\sqrt{3}}{9}$

سوال 8.116: $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2) \,\mathrm{d}x$

سوال 8.117: $\int e^\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{1}{2}(-e^\theta \cos\theta + e^\theta \sin\theta)+C$

سوال 8.118: $\int e^{-y} \cos y \,\mathrm{d}y$

سوال 8.119: $\int e^{2x} \cos 3x \,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x + 2\cos 3x)+C$

سوال 8.120: $\int e^{-2x} \sin 2x \,\mathrm{d}x$

بدل اور تکمل بالحصص

سوال 8.121 تا سوال 8.126 میں تکمل بالحصص سے پہلے بدل استعمال کریں۔

سوال 8.121: $\int e^{\sqrt{3s+9}} \,\mathrm{d}s$
جواب: $\frac{2}{3}(\sqrt{3s+9}\, e^{\sqrt{3s+9}} - e^{\sqrt{3s+9}})+C$

سوال 8.122: $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \,\mathrm{d}x$

شکل 8.2: ترسیم برائے سوال 8.127

شکل 8.3: ترسیم برائے سوال 8.128

سوال 8.123: $\int_0^{\pi/3} x\tan^2 x \,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$

سوال 8.124: $\int \ln(x + x^2)\,\mathrm{d}x$

سوال 8.125: $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)] + C$

سوال 8.126: $\int z(\ln z)^2\,\mathrm{d}z$

نظریہ اور مثالیں

سوال 8.127: محور x اور منحنی $y = x\sin x$ کے بیچ (شکل 8.2) وقفہ (ا) $0 \le x \le \pi$، (ب) $\pi \le x \le 2\pi$، اور (ج) $2\pi \le x \le 3\pi$ پر رقبہ تلاش کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $n\pi \le x \le (n+1)\pi$، جہاں n غیر منفی عدد صحیح ہے، پر یہ رقبہ کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) π، (ب) 3π، (ج) 5π، (د) $(2n+1)\pi$

سوال 8.128: منحنی $y = x\cos x$ اور محور x کے بیچ (شکل 8.3) وقفہ (ا) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$، (ب) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$، اور (ج) $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$ پر رقبہ معلوم کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $(\frac{2n-1}{2})\pi \le x \le (\frac{2n+1}{2})\pi$ پر یہ رقبہ کتنا ہو گا، جہاں n اختیاری عدد صحیح ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8.129: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^x$ اور لکیر $x = \ln 2$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \ln 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: $2\pi(1 - \ln 2)$

سوال 8.130: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^{-x}$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 8.131: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ اور لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔
جواب: (ا) $\pi(\pi - 2)$، (ب) 2π

سوال 8.132: محور x اور منحنی $y = x \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \pi$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (منحنی کے لئے شکل 8.2 دیکھیں)۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال 8.133: (ا) ربع اول میں محور x، منحنی $y = x^2e^x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔
جواب: $\bar{x} = \frac{6-2e}{e-2} \approx 0.78, \bar{y} = \frac{e^2-3}{8(e-2)} \approx 0.76$

سوال 8.134: (ا) محور x، منحنی $y = \ln x$ اور لکیر $x = e$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔

سوال 8.135: ایک چادر کی کثافت $\delta = 1 + x$ ہے۔ یہ چادر محور x اور منحنی $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس چادر کا معیار اثر تلاش کریں۔
جواب: $\pi^2 + \pi - 4$

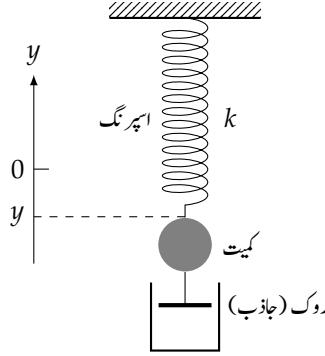
سوال 8.136: اگرچہ ہم $\int \mathrm{d}v$ کو تکمل بالحصص سے حل کر کے v کی تلاش میں تکمل کے مستقل کو صفر تصور کر کے رد کرتے ہیں۔ بعض اوقات اس مستقل کو غیر صفر تصور کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\int x \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$$

میں $u = \tan^{-1} x$ اور $v = \frac{x^2}{2} + C$ لے کر C کی ایسی قیمت منتخب کریں جس سے حاصل کلیہ کی سادہ صورت ملتی ہو۔

سوال 8.137: چھت سے جڑے ہوئے اسپرنگ کے نچلے سر سے ایک کمیت آویزاں ہے جس کی حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے کی خاطر اسپرنگ کے نچلے سر کو بند بیلن میں چلنے والے ایک بوکا کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے والے اس نظام کو اصطلاحروک[3] یا **جذب** کہتے ہیں (شکل 8.4)۔ یوں لمحہ t پر کمیت کا مقام

$$y = 2e^{-t} \cos t, \quad t \geq 0$$

ہو گا۔ (ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔
جواب: (ا) $\frac{1}{2\pi}\left(1 - e^{-2\pi}\right)$

شکل 8.4: اسپرنگ، کمیت اور جاذب کا قصری نظام (سوال 8.137 اور سوال 8.138)۔

سوال 8.138: اسپرنگ، کمیت اور روک کا نظام شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ t پر کمیت کا مقام درج ذیل ہے۔

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \quad t \geq 0$$

(ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔

الٹے تفاعل کے تکمل

تکمل بالحصص کی استعمال سے الٹ تفاعل کا تکمل حاصل کرنے سے ایک قاعدہ اخذ ہوتا ہے جو عموماً اچھے نتائج دیتا ہے:

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)\,dx &= \int y f'(y)\,dy && y = f^{-1}(x),\ x = f(y),\ dx = f'(y)\,dy \\
&= yf(y) - \int f(y)\,dy && \text{(} u = y \text{ اور } dv = f'(y)\,dy \text{ لے کر تکمل بالحصص)} \\
&= xf^{-1}(x) - \int f(y)\,dy
\end{aligned}$$

ہمارا غرض پہلے متکمل کے پیچیدہ ترین حصہ، جو یہاں $f^{-1}(x)$ ہے، کی سادہ صورت کا حصول ہے۔ یوں $\ln x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int \ln x\,dx &= \int ye^y\,dy && y = \ln x,\ x = e^y,\ dx = e^y\,dy \\
&= ye^y - e^y + C \\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}$$

dashpot[3]

تفاعل $\cos^{-1} x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x &= x\cos^{-1} x - \int \cos y \,\mathrm{d}y \qquad\qquad y = \cos^{-1} x\\ &= x\cos^{-1} x - \sin y + C\\ &= x\cos x^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C\end{aligned}$$

سوال 8.139 تا سوال 8.142 میں درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔ جواب کو x کی صورت میں لکھیں۔

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int f(y)\,\mathrm{d}y \qquad\qquad y = f^{-1}(x) \tag{8.4}$$

سوال 8.139: $\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}x$
جواب: $x\sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x) + C$

سوال 8.140: $\int \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$

سوال 8.141: $\int \sec^{-1} x \,\mathrm{d}x$
جواب: $x\sec^{-1} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$

سوال 8.142: $\int \log_2 x \,\mathrm{d}x$

قابل تکمل تفاعل $f^{-1}(x)$ کو تکمل بالحصص سے دوسرے طریقہ سے بھی حل کیا جا سکتا ہے جس میں $u = f^{-1}(x)$ اور $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = xf^{-1}(x) - \int x\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x)\Big)\,\mathrm{d}x \tag{8.5}$$

سوال 8.143 اور سوال 8.144 میں مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حاصل نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے۔

سوال 8.143: تفاعل $\cos^{-1}(x)$ کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}&\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x = x\cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C\\ &\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x = x\cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned} \tag{8.6}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔
جواب: جی ہاں

سوال 8.144: تفاعل $\tan^{-1}(x)$ کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \ln \sec(\tan^{-1} x) + C$$
$$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C \tag{8.7}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 8.145 اور سوال 8.146 کو مساوات 8.4 اور مساوات 8.5 سے حل کریں۔ ہر بار حاصل نتیجہ کا تفرق لے کر اس کی درستگی کی تصدیق کریں۔

سوال 8.145: $\int \sin^{-1} x \, dx$

جواب: (ا) $x \sinh^{-1} x - \cosh(\sinh^{-1} x) + C$، (ب) $x \sinh^{-1} x + (1+x^2)^{1/2} + C$

سوال 8.146: $\int \tan^{-1} x \, dx$

8.3 جزوی کسر

اعلیٰ الجبرا کا ایک مسئلہ (جس کو زیادہ تفصیل سے بعد میں پیش کیا جائے گا) کہتا ہے کہ کوئی بھی ناطق تفاعل، جو جتنا بھی پیچیدہ کیوں نہ ہو، کو سادہ کسروں کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں ہم اب تک جانتے ہوئے تراکیب سے تکمل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} \tag{8.8}$$

ہو گا لہٰذا بائیں ہاتھ ناطق تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم دائیں ہاتھ سادہ کسروں کا تکمل لیں گے۔

ناطق تفاعل کو اس طرح سادہ کسروں کی صورت میں لکھنے کو **جزوی کسری ترکیب**[4] کہتے ہیں۔ اس ترکیب میں مستقل A اور B کی وہ قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں جو

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \tag{8.9}$$

کو مطمئن کرتے ہوں۔ فرض کریں ہمیں A اور B کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں۔ ہم $\frac{A}{x+1}$ اور $\frac{B}{x-3}$ کو **جزوی کسر**[5] کہتے ہیں جبکہ A اور B کی قیمتیں حاصل نہ کر دی جائیں انہیں نا معلوم مستقل کہتے ہیں۔

---

[4] method of partial fractions
[5] partial fractions

نا معلوم مستقل اور دریافت کرنے سے پہلے ہم مساوات 8.9 میں نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

یہ مساوات تب درست ہو گی جب دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے جزو ضربی ایک دوسرے کے برابر ہوں:

$$A + B = 5, \quad -3A + B = -3$$

انہیں بیک وقت حل کرتے ہوئے $A = 2$ اور $B = 3$ حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 8.16: نسب نما میں دو علیحدہ علیحدہ خطی اجزائے ضربی
درج ذیل حل کریں۔

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

حل: مذکورہ بالا تبصرہ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C\end{aligned}$$

□

مثال 8.17: نسب نما میں جزو ضربی کا تکرار
درج ذیل کو جزوی کسروں کا مجموعہ لکھیں۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}$$

حل: چونکہ نسب نما میں $x + 2$ ایک سے زیادہ مرتبہ پایا جاتا ہے لہٰذا جزوی کسر کو درج ذیل صورت میں لکھنا لازمی ہے۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \tag{8.10}$$

مساوات 8.10 کے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں:

$$6x + 7 = A(x+2) + B = Ax + (2A + B)$$

دونوں اطراف ایک جیسے طاقتوں کے جزو ضربی کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے $A = 6$ اور

$$7 = 2A + B = 12 + B, \quad \Longrightarrow \quad B = -5$$

ملتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}=\frac{6}{x+2}-\frac{5}{(x+2)^2}$$

□

نا معلوم مستقل کی قیمت کی تلاش

ا. دیے گئے مساوات میں نسب نما کو ختم کریں۔

ب. دونوں اطراف x کے یکساں طاقتوں کے اجزائے ضربی کو ایک دوسرے کے برابر پر کریں۔

ج. حاصل مساوات کو بیک وقت حل کے نا معلوم مستقل کی قیمتیں دریافت کریں۔

مثال 8.18: ایک غیر مناسب کسر
درج ذیل کو جزوی کسروں کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$$

حل: ہم شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad 2x \\ \hline x^2-2x-3 & 2x^3-4x^2-x-3 \\ & -2x^3+4x^2+6x \\ \hline & \quad\quad\quad 5x-3 \end{array}$$

یوں ایک کثیر رکنی اور ایک مناسب کسر حاصل ہوتا ہے۔ اس کے بعد مناسب کسر کو جزوی کسروں کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}&=2x+\frac{5x-3}{x^2-2x-3} && \text{تقسیم کا نتیجہ}\\ &=2x+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3} && \text{مناسب کسر کا جزوی کسری مجموعہ}\end{aligned}$$

□

مثال 8.19: نسب نما میں ناقابل تخفیف دو درجی جزو
درج ذیل کو جزوی کسروں کا مجموعہ لکھیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

ایسا دو درجی کثیر رکنی جس کو حقیقی عددی سر والے خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھنا ممکن نہ ہو **ناقابل تخفیف**[6] کہلاتا ہے۔

حل: نسب نما میں ناقابل تخفیف جزو کے علاوہ دہرایا گیا جزو بھی پایا جاتا ہے۔یوں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \tag{8.11}$$

دو درجی جزو ضربی کے لئے ہم یک درجی شمار کنندہ استعمال کرتے ہیں نا کہ مستقل شمار کنندہ، لہٰذا x^2+1 کا شمار کنندہ $Ax+B$ لکھا گیا ہے۔ نسب نما سے چھٹکارا حاصل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D) \end{aligned}$$

یکساں اجزاء (جن میں x کے طاقت یکساں ہوں) کے ضربی کو ایک دوسرے کے برابر پر کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} 0 &= A+C && x^3 \text{ کا ضربیہ} \\ 0 &= -2A+B-C+D && x^2 \text{ کا ضربیہ} \\ -2 &= A-2B+C && x^1 \text{ کا ضربیہ} \\ 4 &= B-C+D && x^0 \text{ کا ضربیہ} \end{aligned}$$

ان مساوات کو بیک وقت حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$-4=-2A, \quad A=2$	چوتھی مساوات کو پہلی سے منفی کریں
$C=-A=-2$	پہلی مساوات سے
$B=1$	تیسری میں $A=2$ اور $C=-2$
$D=4-B+C=1$	چھوتی مساوات سے

ان مستقل کو مساوات 8.11 میں پر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

---

[6] irreducible

□

مثال 8.20: تکمل $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$ حل کریں۔

حل: ہم مثال 8.19 کی طرح متکمل کو جزوی کسری روپ میں لکھ کر جزو در جزو تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx &= \int \Big(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\Big)\,dx &&\text{مثال}8.19\\ &= \int \Big(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\Big)\,dx\\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

□

ترکیب پر عمومی تبصرہ

ناطق تفاعل $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھنا دو چیزوں پر منحصر ہے:

ا. $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے کم ہونا ضروری ہے۔ایسا نہ ہونے کی صورت میں f کو g سے تقسیم کر کے باقی کے ساتھ کام کریں۔

ب. $g(x)$ کے اجزائے ضربی معلوم ہونا ضروری ہے۔ کثیر رکنی کا نظریہ کہتا ہے کہ حقیقی عددی سر والے ہر کثیر رکنی کو حقیقی خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھا جا سکتا ہے۔ حقیقت میں ان اجزائے ضربی کو معلوم کرنا نہایت مشکل ہو سکتا ہے۔

اعلیٰ الجبرا کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جب یہ شرائط پورے ہوں تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو درج ذیل اقدام سے جزوی کسری مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

ترکیب جزوی کسری مجموعہ (مناسب $\frac{f(x)}{g(x)}$)

ا. فرض کریں $g(x)$ کا ایک خطی جزو ضربی $x-r$ ہے اور $x-r$ کا بلند تر طاقت جو $g(x)$ کو تقسیم کر سکتا ہو $(x-r)^m$ ہے۔ تب اس جزو ضربی کو درج ذیل اجزاء مختص کریں۔

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

$g(x)$ کے ہر منفرد جزو ضربی کے لئے یہی کریں۔

ب. فرض کریں $g(x)$ کا ایک ناقابل تخفیف دو درجی جزو ضربی $x^2 + px + q$ ہے اور $(x^2 + px + q)^n$ اس جزو کا بلند تر طاقت ہے جو $g(x)$ کو تقسیم کر سکتا ہو۔ تب اس جزو ضربی کو درج ذیل اجزاء مختص کریں:

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2 + px + q)^n}$$

$g(x)$ کے ہر منفرد دو درجی جزو ضربی، جس کو حقیقی عددی سر والے خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھنا ممکن نہ ہو، کے لئے یہی کریں۔

ج. اصل کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو ان تمام کے مجموعہ کے برابر لکھیں۔ حاصل مساوات کے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کر کے اجزاء کو x کے گھٹتے طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیں۔

د. x کے یکساں طاقت کے عددی سر کو برابر پر کر کے حاصل مساوات کو بیک وقت حل کر کے تمام نا معلوم مستقل کی قیمتیں تلاش کریں۔

خطی جزو ضربی کی "ڈھانپنے" کی ترکیب ہیوی سائیڈ

جب کثیر رکنی $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے کم ہو، اور

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

n عدد منفرد خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہو جہاں ہر جزو کا طاقت ایک ہو، تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کا جزوی کسری مجموعہ با آسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 8.21: درج ذیل کسری جزوی مجموعہ میں A ، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \tag{8.12}$$

حل: دونوں اطراف کو $(x - 1)$ سے ضرب دے کر

$$\frac{x^2 + 1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

ملتا ہے جس میں $x = 1$ پر کرنے سے A حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{(1)^2 + 1}{(1-2)(1-3)} = A + 0 + 0, \quad \implies \quad A = 1$$

ہم اصل کسر

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

کے نسب نما میں $(x-1)$ کو ڈھانپ کر پوشیدہ کر کے باقی حصہ میں $x=1$ پر کر کے A کی یہی قیمت حاصل کر سکتے ہیں:

$$A=\frac{(1)^2+1}{\underbrace{\boxed{(x-1)}}_{\text{پوشیدہ}}(1-2)(1-3)}=\frac{2}{(-1)(-2)}=1$$

اسی طرح مساوات 8.12 میں $(x-2)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=2$ پر کر کے B حاصل ہو گا۔

$$B=\frac{(2)^2+1}{(2-1)\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\text{پوشیدہ}}(2-3)}=\frac{5}{(1)(-1)}=-5$$

اور آخر میں مساوات 8.12 میں $(x-3)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=3$ پر کر کے C حاصل ہو گا۔

$$C=\frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\underbrace{\boxed{(x-3)}}_{\text{پوشیدہ}}}=\frac{10}{(2)(1)}=5$$

□

ڈھانپنے کی ترکیب کے اقدام درج ذیل ہیں۔

ا. کسر میں $g(x)$ کو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھیں:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)} \tag{8.13}$$

ب. مساوات 8.13 میں باری باری جزو $(x-r_i)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=r_i$ پر کرتے ہوئے مستقل A_i تلاش کریں:

$$\begin{aligned}
A_1&=\frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}\\
A_2&=\frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}\\
&\vdots\\
A_n&=\frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}
\end{aligned}$$

ج. دیے گئے کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو درج ذیل جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

مثال 8.22: تکمل $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: شمار کنندہ $f(x) = x+4$ کا درجہ نسب نما $g(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$ کے درجہ سے کم ہے۔ ہم $g(x)$ کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}$$

$g(x)$ کے جذر $r_1 = 0$ ، $r_2 = 2$ اور $r_3 = -5$ ہیں۔ ہم نا معلوم مستقل کو ڈھانپنے کی ترکیب سے معلوم کرتے ہیں۔

$$A_1 = \frac{0+4}{\underbrace{\boxed{x}}_{\text{پوشیدہ}}(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

$$A_2 = \frac{2+4}{2\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\text{پوشیدہ}}(2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)\underbrace{\boxed{(x+5)}}_{\text{پوشیدہ}}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}$$

یوں

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$$

ہو گا لہٰذا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C$$

□

نا معلوم مستقل تلاش کرنے کے دیگر تراکیب

نا معلوم مستقل کو تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس ترکیب کو اگلے مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے بھی ان مستقل کو تلاش کیا جا سکتا ہے۔

مثال 8.23: درج ذیل مساوات میں مستقل A ، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}$$

حل: ہم پہلے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں:

$$x-1=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

اس میں $x=-1$ پر کرنے سے $C=-2$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کے بعد ہم دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں:

$$1=2A(x+1)+B$$

اس میں $x=-1$ پر کرنے سے $B=1$ ملتا ہے۔ مزید ایک مرتبہ تفرق لینے سے $0=2A$ یعنی $A=0$ ملتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}$$

□

بعض اوقات x کو چھوٹی قیمتیں، مثلاً $x=0,\mp1,\mp2,\cdots$ ، مختص کرنے سے A ، B ، C کے مساوات حاصل کر کے، باقی تراکیب سے زیادہ جلدی، مستقل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 8.24: درج ذیل میں مستقل A ، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

حل: ہم نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

اب باری باری $x = 1, 2, 3$ پر کرتے ہوئے A, B, C تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
(1)^1 + 1 &= A(-1)(-2) + B(0) + C(0) && x = 1\\
2 &= 2A\\
A &= 1\\
(2)^2 + 1 &= A(0) + B(1)(-1) + C(0) && x = 2\\
5 &= -B\\
B &= -5\\
(3)^2 + 1 &= A(0) + B(0) + C(2)(1) && x = 3\\
10 &= 2C\\
C &= 5
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$
\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}
$$

□

سوالات

جزوی کسری مجموعہ

سوال 8.147 تا سوال 8.154 میں حاصل تقسیم کا جزوی کسری مجموعہ دریافت کریں۔

سوال 8.147: $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

جواب: $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2}$

سوال 8.148: $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

سوال 8.149: $\frac{x+4}{(x+1)^2}$

جواب: $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$

سوال 8.150: $\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$

سوال 8.151: $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$

جواب: $-\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z-1}$

سوال 8.152: $\frac{z}{z^3-z^2-6z}$

سوال 8.153: $\frac{t^2+8}{t^2-5t+6}$
جواب: $1+\frac{17}{t-3}-\frac{12}{t-2}$

سوال 8.154: $\frac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

غیر دہراتے خطی جزو ضربی

سوال 8.155 تا سوال 8.162 میں متکمل کو جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھ کر تکمل حل کریں۔

سوال 8.155: $\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$
جواب: $\frac{1}{2}[\ln|1+x|-\ln|1-x|]+C$

سوال 8.156: $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x}$

سوال 8.157: $\int\frac{x+4}{x^2+5x-6}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{7}\ln\left|(x+6)^2(x-1)^5\right|+C$

سوال 8.158: $\int\frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.159: $\int_4^8\frac{y}{y^2-2y-3}\,\mathrm{d}y$
جواب: $\frac{\ln 15}{2}$

سوال 8.160: $\int_{1/2}^1\frac{y+4}{y^2+y}\,\mathrm{d}y$

سوال 8.161: $\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+t^2-2t}$
جواب: $-\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{6}\ln|t+2|+\frac{1}{3}\ln|t-1|+C$

سوال 8.162: $\int\frac{x+3}{2x^3-8x}\,\mathrm{d}x$

دہراتے خطی جزو ضربی

سوال 8.163 تا سوال 8.166 میں متکمل کو جزوی کسی مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

سوال 8.163: $\int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$
جواب: $3\ln 2 - 2$

سوال 8.164: $\int_{-1}^0 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+1}$

سوال 8.165: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$
جواب: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$

سوال 8.166: $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

ناقابل تخفیف دو درجی جزو ضربی

سوال 8.167 تا سوال 8.174 میں متکمل کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

سوال 8.167: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$
جواب: $\frac{\pi+2\ln 2}{8}$

سوال 8.168: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,\mathrm{d}t$

سوال 8.169: $\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$
جواب: $\tan^{-1} y - \frac{1}{y^2+1} + C$

سوال 8.170: $\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.171: $\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,\mathrm{d}s$
جواب: $-(s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} + \tan^{-1} s + C$

سوال 8.172: $\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,\mathrm{d}s$

سوال 8.173: $\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\frac{-1}{\theta^2+2\theta+2} + \ln\left|\theta^2+2\theta+2\right| - \tan^{-1}(\theta+1) + C$

سوال 8.174: $\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,\mathrm{d}\theta$

غیر مناسب کسر

سوال 8.175 تا سوال 8.180 میں قلم و کاغذ سے متکمل کو تقسیم کر کے مناسب کسر کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

سوال 8.175: $\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

جواب: $x^2+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

سوال 8.176: $\int \frac{x^4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.177: $\int \frac{9x^2-3x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$

جواب: $9x+2\ln|x|+\frac{1}{x}+7\ln|x-1|+C$

سوال 8.178: $\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.179: $\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,\mathrm{d}y$

جواب: $\frac{y^2}{2}-\ln|y|+\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+C$

سوال 8.180: $\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,\mathrm{d}y$

تکمل کا حل

سوال 8.181 تا سوال 8.186 میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

سوال 8.181: $\int \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{e^{2t}+3e^t+2}$

جواب: $\ln\left|\frac{e^t+1}{e^t+2}\right|+C$

سوال 8.182: $\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$

سوال 8.183: $\int \frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{\sin^2 y+\sin y-6}$

جواب: $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sin y-2}{\sin y+3}\right|+C$

سوال 8.184: $\int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

سوال 8.185: $\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{(\tan^{-1}2x)^2}{4}-3\ln\lvert x-2\rvert+\frac{6}{x-2}+C$

سوال 8.186: $\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

ابتدائی قیمت مسئلہ

سوال 8.187 تا سوال 8.190 میں ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے t کے لحاظ سے x تلاش کریں۔

سوال 8.187: $(t^2-3t+2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad (t>2),\quad x(3)=0$
جواب: $x=\ln\lvert t-2\rvert-\ln\lvert t-1\rvert+\ln 2$

سوال 8.188: $(3t^4+4t^2+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{3},\quad x(1)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

سوال 8.189: $(t^2+2t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+2,\quad (t,x>0),\quad x(1)=1$
جواب: $x=\frac{6t}{t+2}-1$

سوال 8.190: $(t+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+1,\quad (t>-1),\quad x(0)=\frac{\pi}{4}$

استعمال اور مثالیں

سوال 8.191 اور سوال 8.191 میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا گیا ہے۔

سوال 8.191: سایہ دار خطہ شکل 8.5 میں دیا گیا ہے جس کو محور x کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
جواب: $3\pi\ln 25$

سوال 8.192: سایہ دار خطہ شکل 8.6 میں دیا گیا ہے جس کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال 8.193: ربع اول میں منحنی $y=\tan^{-1}x$، محور x اور لکیر $x=\sqrt{3}$ کے بیچ خطہ کے وسطانی مرکز کا x محدد 2 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: 1.10

سوال 8.194: سایہ دار خطے (شکل 8.7) کے وسطانی مرکز کا 2 اعشاریہ درست x محدد تلاش کریں۔

شکل 8.5: سایہ دار خطہ برائے سوال 8.191

شکل 8.6: سایہ دار خطہ برائے سوال 8.192

شکل 8.7: سایہ دار خطہ برائے سوال 8.194

سوال 8.195: افواہ
کسی بھی بڑی آبادی N میں اگر x افراد نے ایک افواہ سنی ہو تب شرح تبدیلی x اور ان افراد کی تعداد جنہوں نے افواہ نہ سنی ہو کے حاصل ضرب کا راست متناسب ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(N-x)$$

فرض کریں t دنوں میں ہے، $N = 1000$ اور $k = \frac{1}{250}$ ہے۔ دو افراد ایک افواہ اڑاتے ہیں۔ (ا) متغیر t کے لحاظ سے تفاعل x تلاش کریں۔ (ب) کب آدھی آبادی افواہ سن چکی ہو گی؟ (یہ وہ وقت ہو گا جب افواہ زیادہ سے زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔)
جواب: (ا) $x = \frac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}$، (ب) 1.55 دن

سوال 8.196: دورتبی کیمیائی عمل
بہت سارے کیمیائی اعمال میں دو مختلف قسم کے **سالمہ**[7] ایک تبدیلی سے گزر کر ایک نیا مادہ پیدا کرتے ہیں۔ کیمیائی عمل کی رفتار کا دارومدار ان سالمہ کی ارتکاز پر ہوتا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر مادہ A کا ارتکاز a اور مادہ B کا ارتکاز b ہو اور لمحہ t پر حاصل مادہ کی مقدار x ہو تب تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x) \qquad k \text{ مستقل}$$

اس عمل کو ظاہر کرتی ہے جس کو

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اطراف کا تکمل لیتے ہوئے $t = 0$ پر $x = 0$، اور (ا) $a = b$، (ب) $a \neq b$ تصور کرتے ہوئے متغیر t کا تفاعل x دریافت کریں۔

[7] molecule

سوال 8.197: ایک تکمل جو π اور $\frac{22}{7}$ کا تعلق دیتا ہے
(ا) تکمل $\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔ (ب) تخمین $\frac{22}{7} \approx \pi$ کتنا درست ہے؟ $\frac{22}{7} - \pi$ کو π کا فی صد لکھیں۔ (ج) تفاعل $y = \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ کو وقفہ $0 \leq x \leq 1$ کے لئے ترسیم کریں۔ محور y پر سعت پہلے 0 تا 1 لیں، بعد میں صفر تا 0.5 اور اس کے بعد مزید کم کریں حتٰی کہ ترسیم نظر آئے۔ آپ ترسیم کے نیچے رقبہ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟
جواب: (ا) $\frac{22}{7} - \pi$، (ب) $0.04\,\%$، (ج) رقبہ 0.003 سے کم ہے۔

سوال 8.198: ایک ایسی دو درجی کثیر رکنی $P(x)$ جو $P(0) = 1$ اور $P'(0) = 0$ دیتی ہو اور جس کا تکمل

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

ناطق تفاعل ہو تلاش کریں۔

8.4 تکونیاتی بدل

ہم $a^2 + x^2$ ، $a^2 - x^2$ اور $x^2 - a^2$ میں تکونیاتی بدل پر کر کے ایک مربع جزو حاصل کرتے ہیں جو ایسے تکمل، جن میں ان کا جذر پایا جاتا ہو، کو سادہ صورت میں بدل دیتا ہے۔ ان سادہ تکمل کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔

تین بنیادی بدل

تین عمومی بدل $x = a\tan\theta$ ، $x = a\sin\theta$ اور $x = a\sec\theta$ ہیں جو شکل 8.8 میں قائمہ مثلثوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

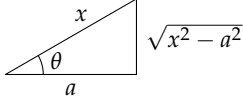
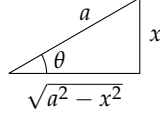
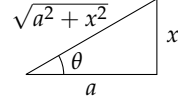
$x = a\tan\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

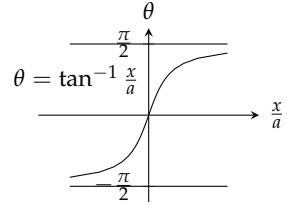
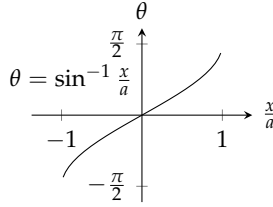
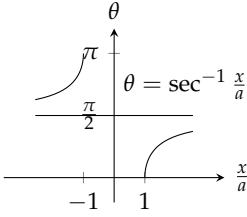
$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1 + \tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta \tag{8.14}$$

$x = a\sin\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta \tag{8.15}$$

$x = a\sec\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta \tag{8.16}$$

تکونیاتی بدل

شکل 8.8: تکونیاتی بدل کو حوالہ مثلث۔

شکل 8.9: الٹ تکونیاتی تفاعل کے ترسیمات۔

ا. $x = a\tan\theta$ لے کر $a^2 + x^2$ کی جگہ $a^2\sec^2\theta$ پر کریں۔

ب. $x = a\sin\theta$ لے کر $a^2 - x^2$ کی جگہ $a^2\cos^2\theta$ پر کریں۔

ج. $x = a\sec\theta$ لے کر $x^2 - a^2$ کی جگہ $a^2\tan^2\theta$ پر کریں۔

ہم ایسا بدل استعمال کرنا چاہیں گے جو قابل واپسی ہو تا کہ آخری قدم پر اس کو واپس کرتے ہوئے اصل متغیرات میں نتیجہ لکھ سکیں۔ مثال کے طور پر اگر $x = a\tan\theta$ کی صورت میں ہم چاہیں گے کہ تکمل لینے کے بعد آخری قدم پر $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ لکھنا ممکن ہو۔ اسی طرح $x = a\sin\theta$ کی صورت میں ہم تکمل کے بعد $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ اور $x = a\sec\theta$ کے لئے $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ پر کرنا چاہیں گے۔

جیسا ہم حصہ 7.8 سے جانتے ہیں ان تفاعل کے الٹ صرف مخصوص وقفہ پر پائے جاتے ہیں (شکل 8.9)۔ الٹ کے لئے درج ذیل ضروری ہے۔

ا. $x = a\tan\theta$ کا الٹ $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہو گا۔

ب. $x = a\sin\theta$ کا الٹ $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہو گا۔

ج. $x = a\sec\theta$ کا الٹ $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ پر $\frac{x}{a} \ge 1$ کی صورت میں اور وقفہ $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ پر $\frac{x}{a} \le -1$ کی صورت میں ہو گا۔

حساب کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم بدل $x = a\sec\theta$ کے استعمال کو ان تکمل تک پابند کرتے ہیں جن میں $\frac{x}{a} \ge 1$ ہو۔اس طرح θ وقفہ $[0, \frac{\pi}{2})$ میں ہو گا جہاں $\tan\theta \ge 0$ ہو گا۔یوں $a > 0$ کی صورت میں

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$$

ہو گا جو مطلق کی علامت سے آزاد ہے۔

مثال 8.25: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$ حل کریں۔

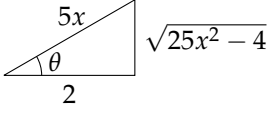
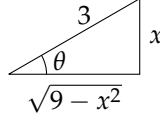
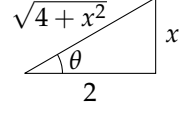
حل: ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 2\tan\theta, \quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1 + \tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| \\
&= \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C && \text{شکل } 8.10 \\
&= \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C' && C' = C - \ln 2
\end{aligned}$$

ہو گا۔ آپ اس پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہم نے $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ کو x کی صورت میں کس طرح لکھا۔ ہم نے ابتدائی بدل $x = 2\tan\theta$ کے لئے حوالہ مثلث (شکل 8.10) کا خاکہ بنایا اور اسی سے نسبتیں $\tan\theta = \frac{x}{2}$ اور $\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ پڑھیں۔ □

مثال 8.26: تکمل $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$ حل کریں۔

شکل 8.10: حوالہ مثلث برائے مثال 8.25

شکل 8.11: حوالہ مثلث برائے مثال 8.26

شکل 8.12: حوالہ مثلث برائے مثال 8.27

حل: جزو $9-x^2$ کی جگہ ایک مربع جزو پر کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 3\sin\theta, \quad \mathrm{d}x = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$9 - x^2 = 9(1-\sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{|3\cos\theta|} \\
&= 9\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{9}{2}\Big(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\Big) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{9}{2}\Big(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\Big) + C && \text{شکل } 8.11 \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C
\end{aligned}$$

ہو گا۔ ہم نے بدل $\sin\theta = \frac{x}{3}$ کے حوالہ مثلث (شکل 8.11) سے نسبتیں $\sin\theta = \frac{x}{3}$ اور $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ پڑھیں۔ □

مثال 8.27: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-4}},\ x > \frac{2}{5}$ حل کریں۔

حل: ہم جذر کو

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\Big(x^2 - \frac{4}{25}\Big)} = 5\sqrt{x^2 - \Big(\frac{2}{5}\Big)^2}$$

صورت میں لکھتے ہیں تا کہ یہ $x^2 - a^2$ روپ میں ہو۔ اس کے بعد درج ذیل بدل استعمال کرتے ہیں۔

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta \qquad \tan\theta > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

یوں

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2 - 4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{5\sqrt{x^2 - (4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}{5 \cdot (2/5)\tan\theta}$$
$$= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2} + \frac{\sqrt{25x^2 - 4}}{2}\right| + C$$

ہو گا۔ ہم نے بدل $\sec\theta = \frac{5x}{2}$ کے حوالہ مثلث (شکل 8.27) سے تکونیاتی نسبتیں پڑھیں۔ □

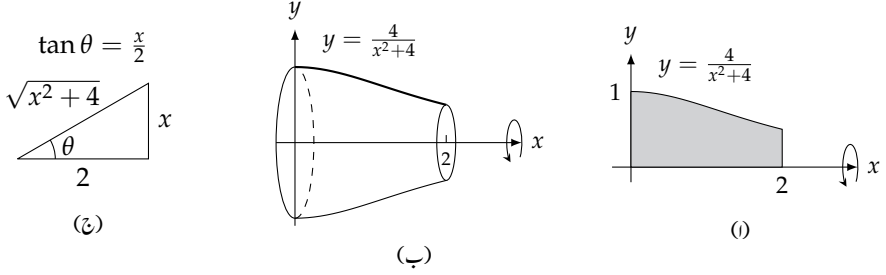
بعض اوقات دو درجی جزو کے طاقت کا تکمل تکونیاتی بدل سے ممکن ہوتا ہے۔ آئیں اگلی مثال میں اس عمل کو دیکھیں۔

مثال 8.28: منحنی $y = \frac{4}{x^2+4}$، محور x، لکیر $x = 0$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل 8.13)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کو ترسیم کر کے ترکیب قرص (حصہ 6.3) سے حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x = 16\pi\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} \qquad R(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

اس تکمل کو حل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 2\tan\theta, \quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2}$$
$$x^2 + 4 = 4\tan^2\theta + 4, \quad 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

شکل 8.13: خطہ، جسم طواف اور حوالہ مثلث برائے مثال 8.28

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= 16\pi \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{16\sec^4\theta} = \pi \int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4} \\
&= \pi\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] \approx 4.04
\end{aligned}$$

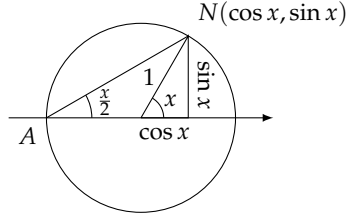
□

بدل $z = \tan(\frac{x}{2})$

$\sin x$ اور $\cos x$ کے ناطق تفاعل کے تکمل کو درج ذیل بدل

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{8.17}$$

متغیر z کے ناطق تفاعل کے تکمل میں بدلتا ہے جس کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر حل کیا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات 8.17 کا بدل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اگرچہ اس کا استعمال زیادہ آسان نہیں ہے اور صرف وہاں استعمال کیا جاتا ہے جب باقی تراکیب مددگار ثابت نہ ہوں۔

$\sin x$ اور $\cos x$ کے ناطق تفاعل کو $\tan\frac{x}{2}$ کی صورت میں لکھنا شکل 8.14 میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل کی مدد سے ہم بدل

شکل 8.14: ہم شکل سے $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ پڑھ سکتے ہیں۔

کے اثر کو دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1\\ &= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1\\ \cos x &= \frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned} \tag{8.18}$$

اور

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\ \sin x &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned} \tag{8.19}$$

اور

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2} \tag{8.20}$$

مثال 8.29:

(الف)
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} &= \int \frac{1+z^2}{2}\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}\\ &= \int \mathrm{d}z = z + C\\ &= \tan\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int \frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1} = \int \frac{\mathrm{d}z}{(z+1/2)^2+3/4}\\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}\\ &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

□

سوالات

بنیادی تکونیاتی بدل

سوال 8.199 تا سوال 8.226 میں تکمل حل کریں۔

سوال 8.199: $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}}$

جواب: $\ln\left|\sqrt{9+y^2}+y\right| + C$

سوال 8.200: $\int \frac{3\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+9y^2}}$

سوال 8.201: $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$

جواب: $\frac{\pi}{4}$

سوال 8.202: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{8+2x^2}$

سوال 8.203: $\int_0^{3/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 8.204: $\int_0^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$

سوال 8.205: $\int \sqrt{25-t^2}\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{t}{5}+\frac{t\sqrt{25-t^2}}{2}+C$

سوال 8.206: $\int \sqrt{1-9t^2}\,\mathrm{d}t$

سوال 8.207: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x>\frac{7}{2}$
جواب: $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7}+\frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right|+C$

سوال 8.208: $\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x>\frac{3}{5}$

سوال 8.209: $\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,\mathrm{d}y, \quad y>7$
جواب: $7[\frac{\sqrt{y^2-49}}{7}-\sec^{-1}\frac{y}{7}]+C$

سوال 8.210: $\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,\mathrm{d}y, \quad y>5$

سوال 8.211: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$
جواب: $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$

سوال 8.212: $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x>1$

سوال 8.213: $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$
جواب: $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}-4\sqrt{x^2+4}+C$

سوال 8.214: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

سوال 8.215: $\int \frac{8\,\mathrm{d}w}{w^2\sqrt{4-w^2}}$
جواب: $\frac{-2\sqrt{4-w^2}}{w}+C$

سوال 8.216: $\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,\mathrm{d}w$

سوال 8.217: $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$
جواب: $4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$

سوال 8.218: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$

سوال 8.219: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x>1$
جواب: $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}+C$

سوال 8.220: $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x>1$

سوال 8.221: $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5+C$

سوال 8.222: $\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.223: $\int \frac{8\,\mathrm{d}x}{(4x^2+1)^2}$
جواب: $2\tan^{-1}2x+\frac{4x}{4x^2+1}+C$

سوال 8.224: $\int \frac{6\,\mathrm{d}t}{(9t^2+1)^2}$

سوال 8.225: $\int \frac{v^2\,\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{5/2}}$
جواب: $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3+C$

سوال 8.226: $\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,\mathrm{d}r$

موزوں بدل کے بعد تکونیاتی بدل استعمال کرتے ہوئے سوال 8.227 تا سوال 8.234 میں تکمل حل کریں۔

سوال 8.227: $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}+9}}$
جواب: $\ln 9 - \ln(1+\sqrt{10})$

سوال 8.228: $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t \, \mathrm{d}t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

سوال 8.229: $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2 \, \mathrm{d}t}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$
جواب: $\frac{\pi}{6}$

سوال 8.230: $\int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

سوال 8.231: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$
جواب: $\sec^{-1}|x| + C$

سوال 8.232: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

سوال 8.233: $\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$
جواب: $\sqrt{x^2-1} + C$

سوال 8.234: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 8.235 تا سوال 8.238 کے ابتدائی قیمت مسائل حل کرتے ہوئے y حاصل کریں۔

سوال 8.235: $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$
جواب: $y = 2[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\frac{x}{2}]$

سوال 8.236: $\sqrt{x^2-9}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$

سوال 8.237: $(x^2+4)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3, \quad y(2) = 0$
جواب: $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}$

سوال 8.238: $(x^2+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

استعمال

سوال 8.239: ربع اول میں محددی محور اور منحنی $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{3\pi}{4}$

سوال 8.240: ربع اول میں محددی محور، لکیر $x=1$ اور منحنی $y=\frac{2}{1+x^2}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

بدل $z=\tan(x/2)$
سوال 8.241 تا سوال 8.248 کو مساوات 8.18 تا مساوات 8.20 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 8.241: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$
جواب: $\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}}+C$

سوال 8.242: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

سوال 8.243: $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$
جواب: 1

سوال 8.244: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$

سوال 8.245: $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$
جواب: $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

سوال 8.246: $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

سوال 8.247: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t-\cos t}$
جواب: $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(t/2)+1-\sqrt{2}}{\tan(t/2)+1+\sqrt{2}}\right|+C$

سوال 8.248: $\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1-\cos t}$

درج ذیل دو سوالات میں $z=\tan(\theta/2)$ پر کر کے حل کریں۔
سوال 8.249: $\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\ln\left|\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right|+C$

سوال 8.250: $\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta$

8.5 جدول تکمل اور کمپیوٹر

جیسا آپ جانتے ہیں تکمل کے بنیادی طریقے بدل اور تکمل بالحصص ہیں۔ان طریقوں سے ہم انجانے تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں بدلتے ہیں جس کو ہم حل کرنا جانتے ہیں یا جس کو جدول سے دیکھا جا سکتا ہے۔ ان جدول میں تکمل کہاں سے آتے ہیں؟ جدول میں تکمل بھی بدل یا تکمل بالحصص سے حاصل کیے گئے ہوتے ہیں۔ ہم ان تمام کو خود حاصل کر سکتے ہیں لیکن جدول ہمیں بار بار ایک ہی طرز کے تکمل حاصل کرنے سے چھٹکارا دیتا ہے۔ جب کوئی تکمل جدول میں پایا جاتا ہو یا الجبرا، تکونیات، بدل اور احصاء کی استعمال سے اس کو جدول میں درج کسی تکمل کی صورت میں لانا ممکن ہو، تب ہم تکمل کا حل جدول سے پڑھ سکتے ہیں۔ اس حصہ کی مثالوں اور سوالات میں کتاب کی آخر میں صفحہ 1891 پر تکملات کی جدول میں درج کلیات کو اخذ کرنا اور ان کا استعمال سکھایا جائے گا۔ یہاں استعمال پر زور دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں کلیات کو مستقل a, b, c, m, n وغیرہ کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یہ مستقل عموماً حقیقی اعداد ہوں گے جو غیر عدد صحیح ہو سکتے ہیں۔ جہاں ان مستقل پر شرائط مسلط ہو، وہاں اس کا ذکر کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر کلیہ 5 میں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے جبکہ کلیہ 11 میں $n \neq -2$ ہونا ضروری ہے۔

ان کلیات میں مستقل وہ قیمت اختیار نہیں کر سکتے ہیں جن کی بنا صفر سے تقسیم کرنا پڑے یا منفی اعداد کا جفت جذر لینا پڑے۔ مثال کے طور پر کلیہ 8 میں $a \neq 0$ ہو گا جبکہ کلیہ 13-الف صرف اس صورت قابل استعمال ہو گا جب b منفی ہو۔

بہت سارے غیر قطعی تکمل کو کمپیوٹر کی مدد سے بھی حل کیا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو کسی خاص صورت میں لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ کمپیوٹر الجبرا پر اس حصہ کے آخر میں غور کیا جائے گا۔

جدول کی مدد سے تکمل

مثال 8.30: تکمل $\int x(2x+5)^{-1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 8 استعمال کرتے ہیں (نا کہ کلیہ 7 جہاں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے۔)

$$\int x(ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = 5$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int x(2x+5)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C$$

□

مثال 8.31: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 13-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \qquad \text{اگر } b > 0 \text{ ہو}$$

یوں $a = 2$ اور $b = 4$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+4}} &= \frac{1}{\sqrt{4}} \ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}}\right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2}\right| + C\end{aligned}$$

کلیہ 13-الف یہاں قابل استعمال نہیں ہو گا چونکہ اس میں $b < 0$ ضروری ہے، البتہ اگلی مثال میں یہ کارآمد ہو گا۔ □

مثال 8.32: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 13-الف استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

□

مثال 8.33: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 15 سے شروع کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = -4$ لیتے ہوئے

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\cdot 4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}} + C$$

ملتا ہے۔ اب ہم کلیہ 13-الف استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ تکمل حل کرتے ہیں (مثال 8.32 سے رجوع کریں):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

□

مثال 8.34: تکمل $\int x\sin^{-1} x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم کلیہ 99 استعمال کرتے ہیں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

یوں $n = 1$ اور $a = 1$ لے کر

$$\int x\sin^{-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ہو گا۔ دائیں ہاتھ تکمل جدول میں کلیہ 33 ہے:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

اب $a = 1$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

یوں مجموعی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int x\sin^{-1} x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\Big) + C' \\ &= \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\Big)\sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C'\end{aligned}$$

□

کلیات تخفیف

دہراتے ہوئے تکمل بالحصص میں درج ذیل صورت کے کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں جنہیں **کلیات تخفیف**[8] کہتے ہیں۔

$$\int \tan^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \,\mathrm{d}x \tag{8.21}$$

$$\int (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} \tag{8.22}$$

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \cos^m x \,\mathrm{d}x &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} x \cos^m x \,\mathrm{d}x, \quad (n \neq -m)\end{aligned} \tag{8.23}$$

کلیات تخفیف کسی تفاعل کے طاقت کے تکمل کو اسی طرز کے تکمل جس میں تفاعل کی طاقت کم ہو سے تبدیل کرتا ہے۔ طاقت کی تخفیف کی بنا انہیں کلیات تخفیف کہتے ہیں۔ کلیات تخفیف بار بار استعمال کرتے ہوئے آخر کار تکمل میں تفاعل کی طاقت اتنی کم ہو جاتی ہے کہ تکمل با آسانی حل ہوتا ہے۔

مثال 8.35: تکمل $\int \tan^5 x \,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل: ہم $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات 8.21 استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^5 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x \,\mathrm{d}x$$

ہم $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات 8.21 دوبارہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

یوں مکمل نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int^5 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + C$$

□

کلیات تخفیف کو تکمل بالحصص سے حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[8] reduction formulae

مثال 8.36: کلیات تخفیف کا حصول
کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\int (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

حل: ہم تکمل بالحصص کے کلیہ

$$\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$$

میں

$$u = (\ln x)^n, \quad \mathrm{d}u = n(\ln x)^{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x, \quad v = x$$

لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\int (\ln x)^n \,\mathrm{d}x = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \,\mathrm{d}x$$

□

بعض اوقات دو کلیات تخفیف کا استعمال ضروری ہو گا۔

مثال 8.37: تکمل $\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل الف: ہم مساوات 8.23 میں $n = 2$ اور $m = 3$ لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3} \int \sin^0 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5} \int \cos^3 x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

ہم باقی تکمل کو کلیہ 61 سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\int \cos^n ax \,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \,\mathrm{d}x$$

یوں $n = 3$ اور $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C\end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ مجموعی نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\Big(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\sin x + C\Big)$$
$$= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{2}{15}\sin x + C'$$

حل ب: مساوات 8.23 جدول میں کلیہ 68 ہے، مگر ہم کلیات تکمل کے جدول کا کلیہ 69 بھی استعمال کر سکتے ہیں جس میں $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n x \cos^{m-2} x \, dx$$

لکھا جائے گا۔ اب $n = 2$ اور $m = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \sin^2 x \cos x \, dx$$
$$= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\Big(\frac{\sin^3 x}{3}\Big) + C$$
$$= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\sin^3 x + C$$

آپ نے دیکھا کہ کلیہ 69 زیادہ جلدی نتیجہ فراہم کرتا ہے۔ عموماً قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے کہ کونسا کلیہ زیادہ جلدی نتیجہ دیگا گا۔ اس پر وقت ضائع نہ کریں۔ جو بھی کلیہ قابل استعمال نظر آئے، اس کو فوراً استعمال کریں۔

آپ نے یہ بھی دیکھا ہو گا کہ کلیہ 68 اور کلیہ 69 کے نتائج مختلف نظر آتے ہیں۔ تکونیاتی تکمل میں عموماً ایسا ہی ہو گا۔ آپ فکر نہ کریں چونکہ ایسے نتائج درحقیقت بالکل ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔ □

غیر بنیادی تکمل

وہ الٹ تفرق جنہیں بنیادی تفاعل (وہ تفاعل جن پر اب تک غور کیا گیا) کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر بنیادی**[9] تکمل کہلاتے ہیں۔ غیر بنیادی تکمل کا حل لامتناہی سلسلہ یا اعدادی تراکیب سے حاصل ہو گا۔ اعدادی تراکیب سے حل ہونے والے تکمل میں تفاعل خلل

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-t^2} \, dt$$

---

[9] nonelementary

اور درج ذیل قسم کے تکمل شامل ہیں جو انجینئری اور طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔

$$\int \sin x^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

ان کے علاوہ

$$\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int e^{(e^x)}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \ln(\ln x)\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad 0<k<1$$

بھی غیر بنیادی تکمل ہیں جو بظاہر سادہ نظر آتے ہیں۔ انہیں حل کرنے کی کوشش کر کے دیکھیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مختلف بنیادی تفاعل کو کسی طرح بھی آپس میں جوڑ کر غیر بنیادی تکمل کا حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔وہ تکمل جن میں بدل پر کر کے غیر بنیادی تکمل میں تبدیل کرنا ممکن ہو کے لئے بھی یہی کچھ درست ہو گا۔ چونکہ یہ تمام متکمل استمراری ہیں لہٰذا ان کا الٹ تفرق ضرور پایا جائے گا، لیکن یہ الٹ تفرق غیر بنیادی ہوں گے۔

اس باب میں آپ کو کہیں پر بھی غیر بنیادی تکمل حل کرنے کو نہیں کہا جائے گا البتہ حقیقی دنیا میں آپ کو ان سے واسطہ ضرور پڑے گا۔

سوالات

جدول تکمل کا استعمال

کتاب کے آخر میں دیا گیا جدول تکمل استعمال کرتے ہوئے سوال 8.251 تا سوال 8.288 حل کریں۔

سوال 8.251: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-3}}$

جواب: $\frac{2}{\sqrt{3}}(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-3}{3}})+C$

سوال 8.252: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}$

سوال 8.253: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$

جواب: $\sqrt{x-2}(\frac{2(x-2)}{3}+4)+C$

سوال 8.254: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2x+3)^{3/2}}$

سوال 8.255: $\int x\sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x$

جواب: $\frac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5}+C$

سوال 8.256: $\int x(7x+5)^{3/2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.257: $\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{-\sqrt{9-4x}}{x}-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right|+C$

سوال 8.258: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4x-9}}$

سوال 8.259: $\int x\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6}+4\sin^{-1}(\frac{x-2}{2})+C$

سوال 8.260: $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.261: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{7+x^2}}$
جواب: $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right|+C$

سوال 8.262: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{7-x^2}}$

سوال 8.263: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$

سوال 8.264: $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.265: $\int \sqrt{25-p^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{p}{2}\sqrt{25-p^2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{p}{5}+C$

سوال 8.266: $\int q^2\sqrt{25-q^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.267: $\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,\mathrm{d}r$
جواب: $2\sin^{-1}\frac{r}{2}-\frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2}+C$

سوال 8.268: $\int \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-2}}$

سوال 8.269: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{5+4\sin 2\theta}$
جواب: $-\frac{1}{3}\tan^{-1}[\frac{1}{3}\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)]+C$

سوال 8.270: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{4+5\sin 2\theta}$

سوال 8.271: $\int e^{2t}\cos 3t\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t+3\sin 3t)+C$

سوال 8.272: $\int e^{-3t}\sin 4t\,\mathrm{d}t$

سوال 8.273: $\int x\cos^{-1}x\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{4}\sin^{-1}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

سوال 8.274: $\int x\sin^{-1}x\,\mathrm{d}x$

سوال 8.275: $\int \frac{\mathrm{d}s}{(9-s^2)^2}$
جواب: $\frac{s}{18(9-s^2)}+\frac{1}{108}\ln\left|\frac{s+3}{s-3}\right|+C$

سوال 8.276: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{(2-\theta^2)^2}$

سوال 8.277: $\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{\sqrt{4x+9}}{x}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right|+C$

سوال 8.278: $\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.279: $\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t}\,\mathrm{d}t$
جواب: $2\sqrt{3t-4}-4\tan^{-1}\sqrt{\frac{3t-4}{4}}+C$

سوال 8.280: $\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t}\,\mathrm{d}t$

سوال 8.281: $\int x^2\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$

سوال 8.282: $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.283: $\int \sin 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2} + C$

سوال 8.284: $\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.285: $\int 8 \sin 4t \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t$
جواب: $8[\frac{\sin(7t/2)}{7} - \frac{\sin(9t/2)}{9}] + C$

سوال 8.286: $\int \sin \frac{t}{3} \sin \frac{t}{6} \, \mathrm{d}t$

سوال 8.287: $\int \cos \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4} \, \mathrm{d}\theta$
جواب: $6 \sin(\theta/12) + \frac{6}{7} \sin(7\theta/12) + C$

سوال 8.288: $\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta \, \mathrm{d}\theta$

بدل اور جدول

سوال 8.289 تا سوال 8.302 میں بدل استعمال کر کے ایسا تکمل حاصل کریں جو جدول میں پایا جاتا ہو۔ اس نئے تکمل کو جدول کی مدد سے حل کریں۔

سوال 8.289: $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{2} \ln\left|x^2+1\right| + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$

سوال 8.290: $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2} \, \mathrm{d}x$

سوال 8.291: $\int \sin^{-1} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$
جواب: $(x - \frac{1}{2}) \sin^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x - x^2} + C$

سوال 8.292: $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

سوال 8.293: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$
جواب: $\sin^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + C$

سوال 8.294: $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

سوال 8.295: $\int \cot t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$
جواب: $\sqrt{1-\sin^2 t} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right| + C$

سوال 8.296: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\tan t\sqrt{4-\sin^2 t}}$

سوال 8.297: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$
جواب: $\ln\left|\ln y + \sqrt{3+(\ln y)^2}\right| + C$

سوال 8.298: $\int \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{5+\sin^2\theta}}$

سوال 8.299: $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{9r^2-1}}$
جواب: $\ln\left|3r+\sqrt{9r^2-1}\right| + C$

سوال 8.300: $\int \frac{3\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+9y^2}}$

سوال 8.301: $\int \cos^{-1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $x\cos^{-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$

سوال 8.302: $\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$

کلیات تخفیف کا استعمال

سوال 8.303 تا سوال 8.322 کو کلیات تخفیف کی مدد سے حل کریں۔

سوال 8.303: $\int \sin^5 2x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{\sin^4 2x\cos 2x}{10} - \frac{2\sin^2 2x\cos 2x}{15} - \frac{4\cos 2x}{15} + C$

سوال 8.304: $\int \sin^5\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.305: $\int 8\cos^4 2\pi t\,\mathrm{d}t$
جواب: $\frac{\cos^3 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi} + \frac{3}{2}\frac{\cos 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi} + 3t + C$

سوال 8.306: $\int 3\cos^5 3y \, dy$

سوال 8.307: $\int \sin^2 2\theta \cos^3 2\theta \, d\theta$
جواب: $\frac{\sin^3 2\theta \cos^2 2\theta}{10} + \frac{\sin^3 2\theta}{15} + C$

سوال 8.308: $\int 9\sin^3\theta \cos^{3/2}\theta \, d\theta$

سوال 8.309: $\int 2\sin^2 t \sec^4 t \, dt$
جواب: $\frac{2}{3}\tan^3 t + C$

سوال 8.310: $\int \csc^2 y \cos^5 y \, dy$

سوال 8.311: $\int 4\tan^3 2x \, dx$
جواب: $\tan^2 2x - 2\ln|\sec 2x| + C$

سوال 8.312: $\int \tan^4(x/2) \, dx$

سوال 8.313: $\int 8\cot^4 t \, dt$
جواب: $8[-\frac{1}{3}\cot^3 t + \cot t + t] + C$

سوال 8.314: $\int 4\cot^3 2t \, dt$

سوال 8.315: $\int 2\sec^3 \pi x \, dx$
جواب: $\frac{(\sec \pi x)(\tan \pi x)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\ln|\sec \pi x + \tan \pi x| + C$

سوال 8.316: $\int \frac{1}{2}\csc^3 \frac{x}{2} \, dx$

سوال 8.317: $\int 3\sec^4 3x \, dx$
جواب: $\frac{\sec^2 3x \tan 3x}{3} + \frac{2}{3}\tan 3x + C$

سوال 8.318: $\csc^4 \frac{\theta}{3} \, d\theta$

سوال 8.319: $\int \csc^5 x \, dx$
جواب: $-\frac{\csc^3 x \cot x}{4} - \frac{3\csc x \cot x}{8} - \frac{3}{8}\ln|\csc x + \cot x| + C$

سوال 8.320: $\int \sec^5 x \, dx$

سوال 8.321: $\int 16x^3(\ln x)^2 \, dx$
جواب: $4x^4(\ln x)^2 - 2x^4(\ln x) + \frac{x^2}{2} + C$

سوال 8.322: $\int (\ln x)^3 \, dx$

قوت نما ضرب x کے طاقت

سوال 8.323 تا سوال 8.330 کو جدول کے کلیات 103 تا 106 کی مدد سے حل کریں۔

سوال 8.323: $\int xe^{3x} \, dx$
جواب: $\frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C$

سوال 8.324: $\int xe^{-2x} \, dx$

سوال 8.325: $\int x^3e^{x/2} \, dx$
جواب: $2x^3e^{x/2} - 12x^2e^{x/2} + 96e^{x/2}(\frac{x}{2} - 1) + C$

سوال 8.326: $\int x^2e^{\pi x} \, dx$

سوال 8.327: $\int x^2 2^x \, dx$
جواب: $\frac{x^2 2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}[\frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}] + C$

سوال 8.328: $\int x^2 2^{-x} \, dx$

سوال 8.329: $\int x\pi^x \, dx$
جواب: $\frac{x\pi^x}{\ln \pi} - \frac{\pi^x}{(\ln \pi)^2} + C$

سوال 8.330: $\int x2^{\sqrt{2}x} \, dx$

بدل اور کلیات تخفیف

سوال 8.331 تا سوال 8.336 میں بدل (ممکنہ تکونیاتی) کے بعد کلیات تخفیف استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔

سوال 8.331: $\int e^t \sec^3(e^t - 1) \, dt$
جواب: $\frac{1}{2}[\sec(e^t-1)\tan(e^t-1) + \ln\left|\sec(e^t-1) + \tan(e^t-1)\right|] + C$

سوال 8.332: $\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.333: $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
جواب: $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$

سوال 8.334: $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^{5/2}}$

سوال 8.335: $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,\mathrm{d}r$
جواب: $\frac{\pi}{3}$

سوال 8.336: $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{7/2}}$

ہذلولی تفاعل

سوال 8.337 تا سوال 8.342 کو جدول تکمل کی مدد سے حل کریں۔

سوال 8.337: $\int \frac{1}{8}\sinh^5 3x\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{1}{120}\sinh^4 3x\cosh 3x-\frac{1}{90}\sinh^2 3x\cosh 3x+\frac{2}{90}\cosh 3x+C$

سوال 8.338: $\int \frac{\cosh^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.339: $\int x^2\cosh 3x\,\mathrm{d}x$
جواب: $\frac{x^2}{3}\sinh 3x-\frac{2x}{9}\cosh 3x+\frac{2}{27}\sinh 3x+C$

سوال 8.340: $\int x\sinh 5x\,\mathrm{d}x$

سوال 8.341: $\int \operatorname{sech}^7 x\tanh x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{\sinh^7 x}{7}+C$

سوال 8.342: $\int \operatorname{csch}^3 2x\coth 2x\,\mathrm{d}x$

نظریہ اور مثالیں

سوال 8.343 تا سوال 8.350 میں کتاب کے آخر میں جدول تکمل کے کلیات اخذ کرنے کو کہا گیا ہے۔

سوال 8.343: بدل $u = ax + b$ پر کرتے ہوئے کلیہ 9 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.344: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 17 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$$

سوال 8.345: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 29 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.346: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 46 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

سوال 8.347: درج ذیل کو تکمل بالحصص کی مدد سے حل کرتے ہوئے کلیہ 80 اخذ کریں۔

$$\int x^n \sin ax\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.348: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 110 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n (\ln ax)^m\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.349: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 99 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.350: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 101 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n \tan^{-1} ax \, \mathrm{d}x$$

سوال 8.351: منحنی $y = \sqrt{x^2+2},\ 0 \le x \le \sqrt{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\pi(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

سوال 8.352: منحنی $y = x^2,\ 0 \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 8.353: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ایک خطہ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $\bar{x} = \frac{4}{3},\ \bar{y} = \ln\sqrt{2}$

سوال 8.354: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{36}{2x+3}$ کے بیچ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس خطے کا معیار اثر تلاش کریں۔

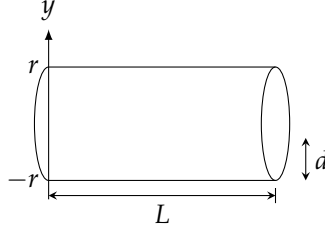
سوال 8.355: محور x کے گرد منحنی $y = x^2,\ -1 \le x \le 1$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جدول تکمل اور کیلکولیٹر کی مدد سے اس کا رقبہ 2 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔
جواب: 7.62

سوال 8.356: ایک افقی دائری حوض کا رداس r سنٹی میٹر اور لمبائی L سنٹی میٹر ہے۔ اس میں تیل کی گہرائی d سنٹی میٹر ہے (شکل 8.15)۔ (ا) دکھائیں کہ تیل کا حجم درج ذیل ہے۔

$$H = 2L\int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

(ب) اس تکمل کو حل کریں۔

سوال 8.357: کسی بھی a اور b کے لئے $\int_a^b \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $\frac{\pi}{8}$

سوال 8.358: کسی بھی a اور b کے لئے $\int_a^b x\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 8.15: تیل کا حوض (سوال 8.356)

کمپیوٹر الجبرائی نظام

کمپیوٹر میں الجبرا کے کئی پروگرام پائے جاتے ہیں۔ان میں سے ایک پروگرام **میکسما**[10] کہلاتا ہے جو نہایت طاقتور پروگرام ہے۔ متغیر x کے تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل حاصل کرنے کے لئے میکسما میں $integrate(f, x)$ لکھنا ہو گا۔اسی طرح a تا b قطعی تکمل کے لئے $integrate(f, x, a, b)$ لکھنا ہو گا۔ میکسما یا الجبرا کے کسی دوسرے پروگرام کو سیکھ کر اس کی مدد سوال 8.359 اور سوال 8.360 کو حل کریں۔

سوال 8.359:

ا. $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$

ب. $\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$

ج. $\int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x$

د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ تکمل $\int x^4 \ln x \,\mathrm{d}x$ کے کلیہ کی پیش گوئی کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

ھ. تکمل $\int x^n \ln x \,\mathrm{d}x,\ n \geq 1$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال 8.360:

ا. $\int \frac{\ln x}{x^2} \,\mathrm{d}x$

ب. $\int \frac{\ln x}{x^3} \,\mathrm{d}x$

ج. $\int \frac{\ln x}{x^4} \,\mathrm{d}x$

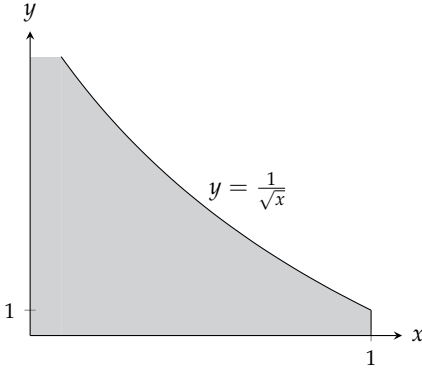
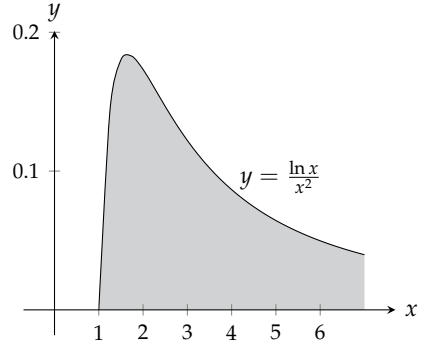
د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ تکمل $\int \frac{\ln x}{x^5} \,\mathrm{d}x$ کے کلیہ کی پیش گوئی کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

ھ. تکمل $\int \frac{\ln x}{x^n} \,\mathrm{d}x,\ n \geq 2$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال 8.361: (ا) درج ذیل تکمل کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں، جہاں n اختیاری مستقل ہے۔

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \,\mathrm{d}x$$

---

[10] maxima

شکل 8.16: کیا ان منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہیں؟

کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس کو حل کر پاتا ہے؟ (ب) اختیاری مستقل $n = 1, 2, 3, 5, 7$ لیتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ نتائج کی پیچیدگی پر تبصرہ کریں۔ (ج) اب $x = \frac{\pi}{2} - u$ پر کر کے نئے اور پرانے تکمل کا مجموعہ لیں۔ اب درج ذیل تکمل کی قیمت کیا ہے؟

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \, dx$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ معمولی سی ریاضیاتی عمل سے تکمل کتنا آسان ہو سکتا ہے۔
جواب: $\frac{\pi}{4}$

8.6 غیر مناسب تکمل

اب تک قطعی تکمل پر ہم دو شرائط لاگو کرتے آ رہے ہیں۔ پہلی شرط میں تکمل کا دائرہ کار a تا b کا متناہی ہونا لازمی تھا۔ دوسری شرط میں متکمل کا سعت متناہی ہونا ضروری تھا۔ حقیقت میں ہمیں عموماً ایسی صورت سے واسطہ پڑتا ہے جہاں ان میں سے ایک شرط یا دونوں شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں۔ زیر منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ وقفہ $x = 1$ تا $x = \infty$ رقبہ، لامتناہی دائرہ کار کی مثال ہے (شکل 8.16-الف)۔ اسی طرح زیر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ وقفہ $x = 0$ تا $x = 1$ رقبہ، لامتناہی سعت کی مثال ہے (شکل 8.16-ب)۔ ہم دونوں مثالوں پر ایک ہی طرح غور کرتے ہیں۔ ہم پوچھتے ہیں کہ دائرہ کار ذرہ کم کرنے سے تکمل کتنا ہو گا اور اس کے بعد دائرہ کار کو لامتناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کا حد تلاش کرتے ہیں۔ اسی طرح ہم متکمل کو متناہی رکھتے ہوئے تکمل دریافت کر کے متکمل کو لامتناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کا حد تلاش کرتے ہیں۔

شکل 8.17: زیر منحنی رقبہ (مثال 8.38)

شکل 8.18: زیر منحنی رقبہ (مثال 8.39)

مثال 8.38: کیا $x = 1$ تا $x = \infty$ منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ کے نیچے رقبہ متناہی ہے؟ ایسا ہونے کی صورت میں اس کی قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم $x = 1$ تا $x = b$ اس منحنی کے نیچے رقبہ تلاش کر کے $b \to \infty$ کی صورت میں رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔ اگر حد متناہی ہو، ہم اس کو لامتناہی منحنی کے نیچے رقبہ تصور کرتے ہیں (شکل 8.17)۔ آئیں $x = 1$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[(\ln x)\Big(-\frac{1}{x}\Big)\right]_1^b - \int_1^b \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1
\end{aligned}$$

بالائی حد $b \to \infty$ کرتے ہوئے رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right] &= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right] - 0 + 1 \\
&= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right] + 1 = 0 + 1 = 1 \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال}
\end{aligned}$$

یوں تکملی اظہار میں $x = 1$ تا $x = \infty$ زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

□

مثال 8.39: کیا $x = 0$ تا $x = 1$ زیر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ رقبہ متناہی ہے؟ اگر ایسا ہو تب رقبہ کتنا ہو گا؟

حل: ہم $x = a$ تا $x = 1$ رقبہ تلاش کر کے $a \to 0^+$ کی صورت میں رقبے کی حد پر نظر ڈالتے ہیں۔ اگر یہ حد متناہی ہو تب ہم اس کو 0 تا 1 زیر منحنی رقبہ مانتے ہیں (شکل 8.18)۔

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

اب $a \to 0^+$ کرتے ہوئے رقبے کا حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\lim_{a\to 0^+}(2 - 2\sqrt{a}) = 2 - 0 = 2$$

یوں تکملی اظہار میں 0 تا 1 زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$$

□

غیر مناسب تکمل

مثال 8.38 اور مثال 8.39 میں تکمل غیر مناسب ہیں۔

تعریف: وہ تکمل جن کے حد لا متناہی ہوں اور وہ تکمل جن کے متکمل وقفہ تکمل کے کسی نقطہ پر لا متناہی قیمت رکھتا ہو **غیر مناسب تکمل** کہلاتے ہیں۔ اگر تکمل کا حد موجود ہو تب اس حد کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

ا. اگر وقفہ $[a, \infty)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.24}$$

ب. اگر وقفہ $(-\infty, b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.25}$$

ج. اگر وقفہ $(a, b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.26}$$

د. اگر وقفہ $[a,b)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.27}$$

اگر تکمل کا حد متناہی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل **مرتکز** ہے اور تکمل کے حد کو اس غیر مناسب تکمل کی قیمت تصور کرتے ہیں۔ اگر تکمل کا حد غیر موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل **منفرج** ہے۔

□

تعریف کی پہلی شق مثال 8.38 میں نظر آتی ہے:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$ بالائی حد لا متناہی ہے

تعریف کی تیسری شق مثال 8.39 میں نظر آتی ہے:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$$ تکمل کے زیریں حد پر متکمل لا متناہی ہے

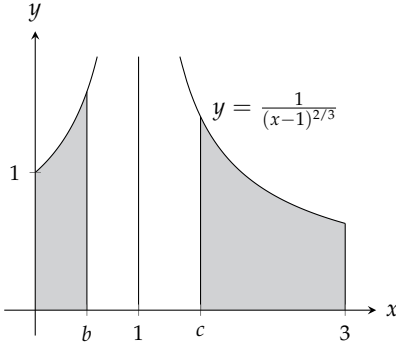
مذکورہ بالا دونوں صورتوں میں تکمل کا حد متناہی ہے۔ اگلی مثال میں تکمل منفرج ہے۔

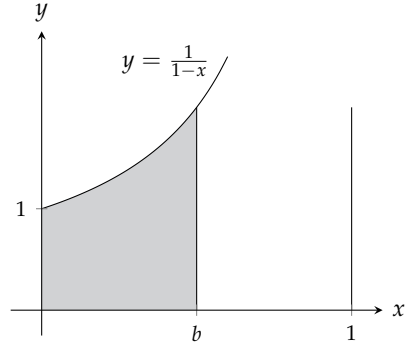
مثال 8.40: منفرج غیر مناسب تکمل
درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

حل: وقفہ $[0,1)$ پر متکمل $f(x)=\frac{1}{1-x}$ استمراری ہے لیکن $a\to 1^-$ کرنے سے یہ لا متناہی ہوتا ہے (شکل 8.19)۔ ہم تکمل کی قیمت حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to 1^-}\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b\\ &= \lim_{b\to 1^-}[-\ln(1-b)+0] = \infty\end{aligned}$$

تکمل کا حد لا متناہی ہے لہٰذا یہ منفرج تکمل ہے۔ □

شکل 8.19: غیر مناسب منفرج تکمل (مثال 8.40)

شکل 8.20: اندرون نقطہ پر لامتناہی متکمل (مثال 8.41)

مذکورہ بالا تعریف کو وسعت دیتے ہوئے ان تکمل جن کے زیریں اور بالائی حدود دونوں لامتناہی ہوں پر لاگو کیا جاتا ہے۔ ہم ان پر اسی حصے میں بعد میں غور کریں گے۔ وقفہ تکمل کے اندر نقطہ d پر لامتناہی متکمل کی صورت پر بھی یہ تعریف لاگو کی جاتی ہے۔ ہم ایسے تکمل کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے a تا b تکمل کو a تا d تکمل اور d تا b تکمل کا مجموعہ لیتے ہیں۔

تعریف: اگر وقفہ $[a, b]$ کے اندرون کسی نقطہ d پر متکمل f کی قیمت لامتناہی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.28}$$

اگر a تا d اور d تا b تکمل مرتکز ہوں تب a تا b تکمل **مرتکز** ہو گا ورنہ a تا b تکمل **منفرج** ہو گا۔

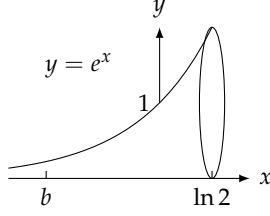
□

مثال 8.41: اندرونی نقطہ پر لامتناہی

درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$

حل: متکمل $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ نقطہ $x = 1$ پر لامتناہی ہے جبکہ وقفہ $[0, 1)$ اور $(1, 3]$ پر یہ استمراری ہے (شکل 8.20)۔ وقفہ $[0, 3]$ پر تکمل کی مرکوزیت وقفہ 0 تا 1 اور وقفہ 1 تا 3 پر تکمل کی مرکوزیت پر منحصر ہے۔ وقفہ $[0, 1]$ پر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}\\ &= \lim_{b\to 1^-}[3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}] = 3\end{aligned}$$

شکل 8.21: ٹھوس بگل کا حجم (مثال 8.42)

اور وقفہ $[1,3]$ پر

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+}\int_c^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$
$$= \lim_{c\to 1^+}[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}$$

ہو گا۔ دونوں حد متناہی ہیں لہٰذا وقفہ 0 تا 3 تفاعل f کا تکمل مرتکز ہو گا اور اس کی قیمت $3 + 3\sqrt[3]{2}$ ہو گی۔ □

مثال 8.42: محور x کے عمودی ایک بگل کا رقبہ عمودی تراش دائری قرص ہیں جن کے قطر وقفہ $-\infty < x \le \ln 2$ پر محور x سے منحنی $y = e^x$ تک ہیں (شکل 8.21)۔ اس بگل کا حجم تلاش کریں۔

حل: ایک علامتی رقبہ عمودی تراش کا رقبہ

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$$

ہو گا۔ ہم $b \to -\infty$ کرتے ہوئے b تا $\ln 2$ تک حجم کی حد کو بگل کا حجم مانتے ہیں۔ ہم حصہ 6.2 کی طرح ٹکیاں کاٹ کر حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_b^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{\ln 2}\frac{\pi}{4}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}e^{2x}\Big|_b^{\ln 2}$$
$$= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b})$$

اب $b \to -\infty$ کرنے سے $e^{2b} \to 0$ لہٰذا $H \to \frac{\pi}{8}(4-0) = \frac{\pi}{2}$ ہوتا ہے۔ یوں بگل کا حجم $\frac{\pi}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 8.43: تکمل $\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x && \text{جزوی کسر} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x\Big]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \tan^{-1} x\Big]_2^b && \text{لوگارتھمی اجزاء یکجا} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln\frac{(b-1)^2}{b^2+1} - \tan^{-1} b\Big] - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1} 2 \\
&= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1} 2 \approx 1.1458
\end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ $b \to \infty$ کر کے حد کی تلاش سے پہلے ہم نے لوگارتھمی اجزاء کو یکجا کیا۔ اگر ہم ایسا نہ کرتے تب ہمیں درج ذیل نا قابل معلوم مقدار ملتی۔

$$\lim_{b\to\infty}[(2\ln(b-1)) - \ln(b^2+1)] = \infty - \infty$$

$-\infty$ سے ∞ تک تکمل

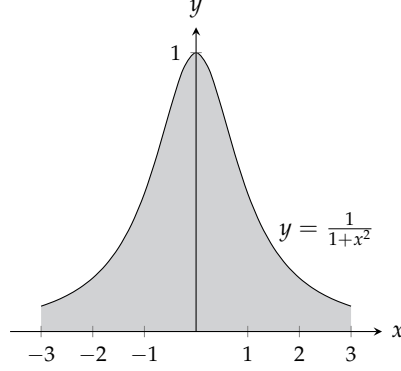
روشنی، بجلی اور صدا پر غور کرنے سے ایسے تکمل حاصل ہوتے ہیں جن کے دونوں حد لامتناہی ہوتے ہیں۔ اگلا تعریف ان کی مرکوزیت پر ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $(-\infty,\infty)$ پر f استمراری ہو اور اگر $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہے اور اس کی قیمت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{8.29}$$

مانتے ہیں۔ اگر دائیں ہاتھ ایک بھی تکمل منفرج ہو تب $-\infty$ سے ∞ تک f کا تکمل منفرج ہو گا۔

□

ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ مساوات 8.29 میں a کی قیمت اہمیت نہیں رکھتی ہے۔ ہم a کی کوئی بھی موزوں قیمت لے کر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی مرکوزیت دریافت کر سکتے ہیں۔

شکل 8.22: دونوں اطراف لامتناہی منحنی کے نیچے رقبہ متناہی ہے۔

تفاعل f کا $-\infty$ سے ∞ تک تکمل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مختلف ہو سکتا ہے، جو $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی عدم مرکوزیت کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے (سوال 8.436)۔

مثال 8.44:

مساوات 8.29 میں $a = 0$

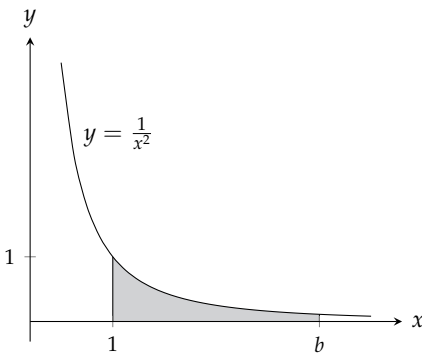
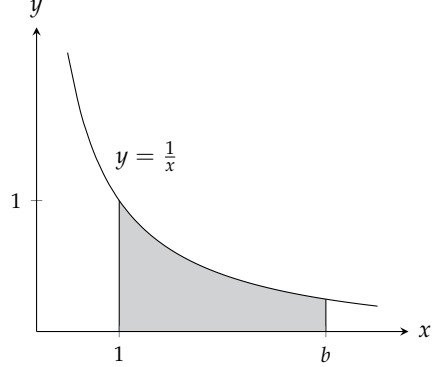
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \lim_{b\to-\infty}[\tan^{-1}x]_b^0 + \lim_{c\to\infty}[\tan^{-1}x]_0^c\\ &= \lim_{b\to-\infty}[\tan^{-1}0-\tan^{-1}b] + \lim_{c\to\infty}[\tan^{-1}c-\tan^{-1}0]\\ &= 0-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)+\frac{\pi}{2}-0 = \pi\end{aligned}$$

ہم محور x اور منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ کے نیچے لامتناہی خطے کے رقبہ کو تکمل کی قیمت مانتے ہیں (شکل 8.22)۔ □

تکمل $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

تکمل $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ کی مرکوزیت p پر منحصر ہے۔ اگلی مثال میں $p = 1$ اور $p = 2$ کے لئے اس حقیقت کو دیکھتے ہیں۔

مثال 8.45: درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \text{اور} \quad \int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

شکل 8.23: ایک منحنی کے نیچے رقبہ لا متناہی اور دوسرے کے نیچے متناہی ہے (مثال8.45)۔

حل: وقفہ $[1, \infty)$ پر دونوں تفاعل استمراری ہیں اور $x \to \infty$ کرنے سے دونوں کے ترسیم محور x کے قریب آتے ہیں (شکل 8.23) لہٰذا کیا ہم کہہ سکتے ہیں کہ دونوں منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہوں گے؟ پہلے تکمل کی صورت میں

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b \to \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

ہے لہٰذا تکمل منفرج ہو گا۔دوسری تکمل کی صورت میں

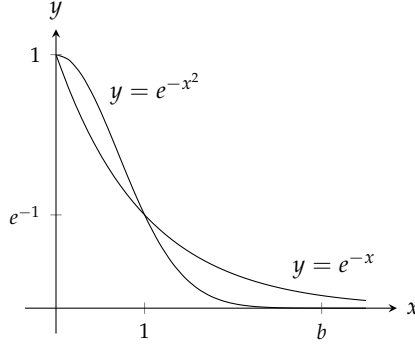
$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \Big(-\frac{1}{b} + 1 \Big) = 1$$

ہے لہٰذا تکمل مرتکز ہے اور اس کی قیمت 1 ہے۔

عمومی طور $p > 1$ کے لئے $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ مرکوز جبکہ $p \leq 1$ کے لئے منفرج ہو گا (سوال 8.428)۔ □

عموماً $p > 1$ کی صورت میں $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ مرتکز اور $p \leq 1$ کی صورت میں منفرج ہو گا۔

ارتکاز اور انفراج کے پرکھ

جب کسی غیر مناسب تکمل کی قیمت بلا واسطہ قابل حل نہ ہو (جیسا عموماً ہو گا) تب ہم دو اقدام طریقہ استعمال کرتے ہوئے پہلے ارتکاز ثابت کرتے ہیں اور اس کے بعد اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔ ارتکاز کے بنیادی پرکھ دو ہیں: بلا واسطہ تقابلی پرکھ اور تقابل حد پرکھ ہیں۔

شکل 8.24: وقفہ $x>1$ پر ترسیم e^{-x^2} ترسیم e^{-x} کے نیچے ہے۔

مثال 8.46: تکمل $\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے ارتکاز پر غور کریں۔

حل: تعریف کی رو سے

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

ہو گا۔ چونکہ یہ تکمل غیر بنیادی ہے لہٰذا اس کو ہم بلا واسطہ حل نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ ہم دکھا سکتے ہیں کہ $b\to\infty$ کرتے ہوئے اس کا حد متناہی ہے۔ہم جانتے ہیں کہ $\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ متغیر b کا بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا $b\to\infty$ کرنے سے یا یہ لامتناہی ہو گا اور یا $b\to\infty$ کرنے سے اس کا حد متناہی ہو گا۔ اب ہر $x\geq 1$ کے لئے $e^{-x^2}\leq e^{-x}$ ہے (شکل 8.24) لہٰذا

$$\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leq\int_1^b e^{-x}\,\mathrm{d}x=e^{-b}+e^{-1}<e^{-1}\approx 0.36788$$

ہو گا اور یوں تکمل لامتناہی نہیں ہے۔یوں

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

کسی مخصوص قیمت کو مرتکز ہو گا۔ ہم اس تکمل کی قیمت نہیں جانتے ہیں البتہ اتنا ضرور جانتے ہیں کہ تکمل کی قیمت 0.37 سے کم ہے۔ □

تفاعل e^-x^2 اور e^{-x} کا پرکھ مثال 8.46 میں کیا گیا جو درج ذیل کی ایک مخصوص صورت ہے۔

مسئلہ 8.1: **بلا واسطہ تقابلی پرکھ**
فرض کریں وقفہ $[a,\infty)$ پر f اور g استمراری ہیں اور تمام $x\geq a$ پر $0\leq f(x)\leq g(x)$ ہے۔تب درج ذیل ہوں گے۔

ا. اگر $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔

ب. اگر $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو تب $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو گا۔

مثال 8.47: (ا) چونکہ $[1,\infty)$ پر $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔
(ب) چونکہ $[1,\infty)$ پر $\frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \ge \frac{1}{x}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ منفرج ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-0.1}}$ منفرج ہو گا۔ □

مسئلہ 8.2: **تقابلی حد پرکھ**
اگر $[a,\infty)$ پر مثبت تفاعل f اور g استمراری ہوں اور اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad (0 < L < \infty)$$

ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں یا مرتکز ہوں گے اور یا دونوں منفرج ہوں گے۔

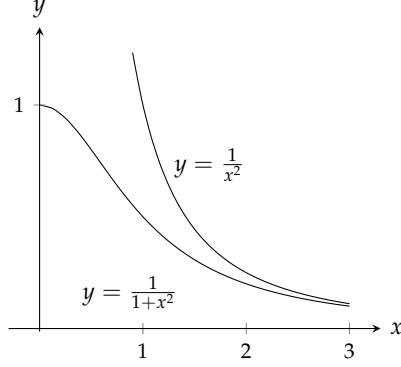
حصہ 7.7 کی زبان میں مسئلہ 8.2 کہتا ہے کہ اگر $x \to \infty$ پر دو تفاعل ایک ہی شرح سے بڑھتے ہوں تب a سے ∞ تک ان دونوں کے تکمل کا رویہ ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ ان دو تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

مثال 8.48: درج ذیل کا آپس میں تقابلی حد پرکھ کی مدد سے موازنہ کریں۔

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

حل: ہم $f(x) = \frac{1}{x^2}$ اور $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ لیتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2}{1/(1+x^2)}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0+1 = 1\end{aligned}$$

متناہی مثبت حد ہے (شکل 8.25)۔ اب چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ بھی مرتکز ہو گا۔

شکل 8.25: تفاعل برائے مثال 8.48

دونوں تکمل کی قیمتیں البتہ مختلف ہیں۔

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 \qquad \text{مثال 8.45}$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

مثال 8.49: چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$ مرتکز ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5}{3e^x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3e^x}\right) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

مثبت متناہی حد ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔ جہاں تک غیر متناسب تکمل کی ارتکاز کی بات ہے $\frac{3}{e^x+5}$ اور $\frac{1}{e^x}$ کا رویہ ایک دوسرے جیسا ہے۔
□

سوالات

غیر مناسب تکمل

سوال 8.362 تا سوال 8.395 کو جدول کلیات تکمل کی مدد کے بغیر حل کریں۔

سوال 8.362: $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 8.363: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

سوال 8.364: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
جواب: 2

سوال 8.365: $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

سوال 8.366: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$
جواب: 6

سوال 8.367: $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$

سوال 8.368: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 8.369: $\int_0^1 \frac{dr}{r^{0.999}}$

سوال 8.370: $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,dx}{x^2-1}$
جواب: $\ln 3$

سوال 8.371: $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,dx}{x^2+4}$

سوال 8.372: $\int_2^\infty \frac{2\,dv}{v^2-v}$
جواب: $\ln 4$

سوال 8.373: $\int_2^\infty \frac{2\,dt}{t^2-1}$

سوال 8.374: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$
جواب: 0

سوال 8.375: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^{3/2}}$

سوال 8.376: $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: $\sqrt{3}$

سوال 8.377: $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,\mathrm{d}s$

سوال 8.378: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$
جواب: π

سوال 8.379: $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

سوال 8.380: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v^2)(1+\tan^{-1} v)}$
جواب: $\ln(1+\pi/2)$

سوال 8.381: $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.382: $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,\mathrm{d}\theta$
جواب: -1

سوال 8.383: $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.384: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$
جواب: 1

سوال 8.385: $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.386: $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$
جواب: $-\frac{1}{4}$

سوال 8.387: $\int_0^1 (-\ln x)\,\mathrm{d}x$

سوال 8.388: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{4-s^2}}$
جواب: $\frac{\pi}{2}$

سوال 8.389: $\int_0^1 \frac{4r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}$

سوال 8.390: $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{s^2-1}}$
جواب: $\frac{\pi}{3}$

سوال 8.391: $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-4}}$

سوال 8.392: $\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}$
جواب: 6

سوال 8.393: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$

سوال 8.394: $\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^2+5\theta+6}$
جواب: $\ln 2$

سوال 8.395: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

پرکھ ارتکاز

سوال 8.396 تا سوال 8.425 میں تکمل، بلا واسطہ تقابلی پرکھ یا تقابل حد پرکھ کی مدد سے تکمل کو ارتکاز کے لئے پرکھیں۔ اگر ایک سے زیادہ طریقے قابل استعمال ہوں، وہاں اپنی مرضی سے کسی ایک طریقہ کو استعمال کریں۔

سوال 8.396: $\int_0^{\pi/2} \tan\theta\,\mathrm{d}\theta$
جواب: منفرج

سوال 8.397: $\int_0^{\pi/2} \cot\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال 8.398: $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$
جواب: مرتکز

سوال 8.399: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

سوال 8.400: $\int_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} \, \mathrm{d}x$
جواب: مرتکز

سوال 8.401: $\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

سوال 8.402: $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+\sin t}$
جواب: مرتکز

سوال 8.403: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t-\sin t}$ اشارہ: $t \geq 0$ کے لئے $t \geq \sin t$ ہو گا۔

سوال 8.404: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$
جواب: منفرج

سوال 8.405: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$

سوال 8.406: $\int_{-1}^1 \ln|x| \, \mathrm{d}x$
جواب: مرتکز

سوال 8.407: $\int_{-1}^1 -x \ln|x| \, \mathrm{d}x$

سوال 8.408: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$
جواب: مرتکز

سوال 8.409: $\int_4^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-1}$

سوال 8.410: $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v-1}}$
جواب: منفرج

سوال 8.411: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\theta}{1+e^\theta}$

سوال 8.412: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}$
جواب: مرتکز

سوال 8.413: $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$

سوال 8.414: $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}\,\mathrm{d}x$
جواب: مرتکز

سوال 8.415: $\int_2^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}}$

سوال 8.416: $\int_\pi^\infty \frac{2+\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: منفرج

سوال 8.417: $\int_\pi^\infty \frac{1+\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 8.418: $\int_4^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^{3/2}-1}$
جواب: مرتکز

سوال 8.419: $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

سوال 8.420: $\int_1^\infty \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: منفرج

سوال 8.421: $\int_{e^e}^\infty \ln(\ln x)\,\mathrm{d}x$

سوال 8.422: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-x}}$
جواب: مرتکز

سوال 8.423: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x-2^x}$

سوال 8.424: $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$
جواب: مرتکز

سوال 8.425: $\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 8.426: لامتناہی دائرہ کار کے غیر مناسب تکمل کی قیمت کا اندازہ
(ا) درج ذیل دکھائیں

$$\int_3^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000\,042$$

جس کی بنا $\int_3^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x < 0.000042$ ہو گا۔ آپ وجہ پیش کریں کہ کیوں $\int_3^\infty e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $\int_3^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ پر کرنے سے پیدا خلل $0.000\,042$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے۔
(ب) تکمل $\int_0^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت اعدادی تراکیب سے حاصل کریں۔
جواب: (ب) $\approx 0.886\,21$

سوال 8.427: لامتناہی بگل یا رنگ کا لامتناہی ڈبہ
ہم مثال 8.45 میں دیکھ چکے ہیں کہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ منفرج ہے۔ یوں منحنی $y = \frac{1}{x},\ 1 \le x$ کو محور x کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا سطح

$$\int_1^\infty 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x$$

منفرج ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متناہی قیمت $b > 1$ کے لئے

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x > 2\pi\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ہو گا جبکہ ٹھوس جسم کا حجم

$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$$

مرتکز ہے۔ (ا) اس حجم کی قیمت تلاش کریں۔ (ب) بعض اوقات اس جسم طواف کو وہ ڈبہ کہتے ہیں جس میں اتنا رنگ نہیں بھرا جا سکتا ہے جو اسی ڈبے کی اندرون کو رنگ کر سکے۔ اس پر ایک لمحہ کے لئے غور کریں۔ متناہی مقدار کا رنگ کسی صورت لامتناہی سطح کو رنگ نہیں کر سکتا ہے۔ البتہ اگر ہم اس ڈبے کو رنگ سے بھریں (جو متناہی مقدار ہو گی) تب ڈبے کی اندرونی سطح (جو لامتناہی ہے) کے ہر نقطہ کو رنگ مس کرتا ہے۔ اس ظاہری تضاد کی وجہ پیش کریں۔

سوال 8.428: (ا) دکھائیں کہ $p > 1$ کے لئے

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{p-1}$$

جبکہ $p < 1$ کے لئے تکمل لامتناہی ہے۔ ہے۔ مثال 8.45 میں $p = 1$ کے لئے تکمل کی قیمت دیکھی گئی۔
(ب) دکھائیں کہ $p < 1$ کے لئے

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$$

جبکہ $p \ge 1$ کے لئے تکمل منفرج ہے۔

سوال 8.429: درج ذیل ہر ایک تکمل کے لئے p کی وہ قیمت تلاش کریں جس کے لئے تکمل مرتکز ہو۔

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \quad \text{(الف)} \qquad \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \quad \text{(ب)}$$

سوال 8.430 تا سوال 8.433 ربع اول میں منحنی $y = e^{-x}$ اور محور x کے بیچ لامتناہی خطے کے بارے میں ہیں۔

سوال 8.430: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: 1

سوال 8.431: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 8.432: اس خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: 2π

سوال 8.433: اس خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کو حجم تلاش کریں۔

سوال 8.434: منحنی $y = \sec x$ اور $y = \tan x$ کے بیچ $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ خطے کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\ln 2$

سوال 8.435: منحنی $y = \sec x$ اور $y = \tan x$ کے بیچ $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دکھائیں کہ اس جسم کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رقبے لامتناہی ہیں۔

سوال 8.436: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ دکھائیں کہ

$$\int_0^\infty \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

منفرج ہے لہٰذا

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

بھی منفرج ہو گا۔ اس کے بعد درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 0$$

سوال 8.437: درج ذیل دلیل پر غور کریں جس کے تحت $\ln 3 = \infty - \infty$ ہو گا۔ اس دلیل میں غلطی تلاش کریں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\begin{aligned}
\ln 3 &= \ln 1 + \ln 3 = \ln 1 - \ln \frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} [\ln(x-2) - \ln x]_3^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_3^\infty \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int_3^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x-2)\Big]_3^b - \lim_{b\to\infty} \Big[\ln x\Big]_3^b \\
&= \infty - \infty
\end{aligned}$$

سوال 8.438: اگر حقیقی اعداد کے ہر وقفہ پر $f(x)$ قابل تکمل ہو اور a اور b حقیقی اعداد ہوں جہاں $a < b$ ہے تب درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہوں گے جب $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز ہوں۔

ب. اگر مستعمل تکمل مرتکز ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

سوال 8.439: (ا) دکھائیں کہ اگر f جفت ہو اور تکمل موجود ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ب) دکھائیں کہ اگر f طاق ہو اور تکمل موجود ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

سوال 8.440 تا سوال 8.447 میں بلا واسطہ حل، تقابلی پرکھ اور سوال 8.439 کے نتائج بروئے کار لاتے ہوئے تکمل کی مرکوزیت یا انفراج معلوم کریں۔ اگر ایک سے زائد طریقہ قابل استعمال ہوں تب اپنی پسند کا طریقہ استعمال کریں۔

سوال 8.440: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$
جواب: منفرج

سوال 8.441: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}$

سوال 8.442: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$
جواب: مرتکز

سوال 8.443: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

سوال 8.444: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$
جواب: مرتکز

سوال 8.445: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$

سوال 8.446: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x|+|\cos x|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x$ اشارہ: $|\sin\theta|+|\cos\theta| \geq \sin^2\theta+\cos^2\theta$
جواب: منفرج

سوال 8.447: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$

کمپیوٹر اور استعمال

سوال 8.448 تا سوال 8.451 میں کمپیوٹر استعمال کر کے p کی مختلف قیمتوں (بشمول غیر عدد صحیح) کے لئے تکمل پر غور کریں۔ p کی کن قیمتوں کے لئے تکمل مرتکز ہے؟ جب تکمل مرتکز ہو تب اس کی قیمت کتنی ہے؟ p کی مختلف قیمتوں کے لئے تکمل کو ترسیم کریں۔

سوال 8.448: $\int_0^e x^p \ln x\,\mathrm{d}x$

سوال 8.449: $\int_e^\infty x^p \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.450: $\int_0^\infty x^p \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال 8.451: $\int_{-\infty}^\infty x^p \ln|x| \, \mathrm{d}x$

سوال 8.452: درج ذیل جسے **سائن تکمل تفاعل**[11] کہتے ہیں بصریات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

ا. متکمل $\frac{\sin t}{t}$ کو $t > 0$ کے لئے ترسیم کریں۔ Si ہر نقطہ پر بڑھتا کہ گھٹتا تفاعل ہے؟ کیا $x > 0$ کے لئے آپ کے خیال میں $\operatorname{Si}(x) = 0$ ہو سکتا ہے؟ وقفہ $0 \le x \le 25$ پر $\operatorname{Si}(x)$ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

ب. درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

ارتکاز کی صورت میں اس کی قیمت تلاش کریں۔

جواب: (ب) $\frac{\pi}{2}$

سوال 8.453: درج ذیل کو **تفاعل خلل**[12] کہتے ہیں۔

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}t$$

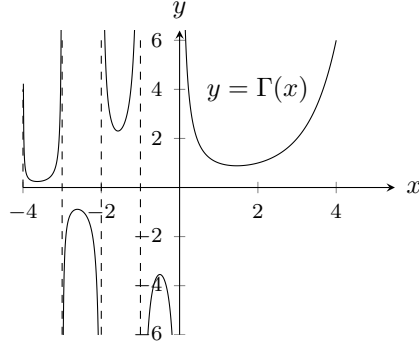
نظریہ احتمال اور شماریات میں یہ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

ا. وقفہ $0 \le x \le 25$ کے لئے تفاعل خلل کو ترسیم کریں۔

ب. درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}t$$

مرکوزیت کی صورت میں اس کی قیمت کیا نظر آتی ہے؟ آپ اپنی (اندازاً) قیمت کی تصدیق حصہ کے سوال 14.163 میں کر پائیں گے۔

[11] sine integral function
[12] error function

شکل 8.26: $\Gamma(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے جس کی قیمت ہر مثبت عدد صحیح $n+1$ پر $n!$ ہے۔ Γ کا تعریفی تکمل صرف $x > 0$ کے لئے درست ہے لیکن ہم $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ (سوال 8.454 دیکھیں) کی استعمال سے منفی x کے لئے Γ کو وسعت دے سکتے ہیں۔

گیما تفاعل اور کلیہ سٹرلنگ

یولر کا **گیما تفاعل**[13] $\Gamma(x)$ (جس کو x کا گیما کہتے ہیں) تکمل استعمال کرتے ہوئے عدد ضربیہ تفاعل[14] کو منفی اعداد اور غیر عدد صحیح اعداد تک وسعت دیتا ہے۔ گیما تفاعل کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-1}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$$

ہر مثبت عدد صحیح x کے لئے $t^{x-1}e^{-t}$ کا t کے لحاظ سے 0 تا ∞ تکمل عدد $\Gamma(x)$ ہو گا۔ شکل 8.26 میں مبدا کے قریب Γ کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔

سوال 8.454: غیر منفی عدد صحیح کے لئے $\Gamma(n+1) = n!$ ہو گا

ا. دکھائیں $\Gamma(1) = 1$

Gamma function[13]
factorial function[14]

ب. اس کے بعد تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ثابت کریں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2 \\
\Gamma(3) &= 3\Gamma(3) = 6 \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n!
\end{aligned}$$

ج. الکراجی ماخوذ استعمال کرتے ہوئے ہر غیر منفی عدد صحیح n کے لئے $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ کی تصدیق کریں۔

سوال 8.455: کلیہ سٹرلنگ
اسکاچی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770] نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$\lim_{x\to\infty} (\tfrac{e}{x})^x \sqrt{\tfrac{x}{2\pi}}\Gamma(x) = 1$$

لہٰذا x کی بڑی قیمتوں کے لئے

$$\Gamma(x) = (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}}(1+\epsilon(x)), \qquad \begin{aligned} x &\to \infty \\ \epsilon(x) &\to 0 \end{aligned} \tag{8.30}$$

ہو گا۔ اس میں $\epsilon(x)$ رد کرنے سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(x) \approx (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}} \qquad \text{کلیہ سٹرلنگ} \tag{8.31}$$

ا. مساوات 8.31 اور $n! = n\Gamma(n)$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$n! \approx (\tfrac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{تخمین سٹرلنگ} \tag{8.32}$$

جیسا آپ حصہ 9.2 کے سوال 9.136 میں دیکھیں گے مساوات 8.32 سے درج ذیل تخمین حاصل ہوتی ہے۔

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \tag{8.33}$$

ب. $n = 10, 20, 30, \cdots$ لیتے ہوئے $n!$ کے لئے تخمین سٹرلنگ کے نتائج کا کیلکولیٹر سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. مساوات 8.30 کی بہتر صورت

$$\Gamma(x) = (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}} e^{1/(12x)} (1 + \epsilon(x))$$

یا

$$\Gamma(x) = (\tfrac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi} e^{1/(12n)} \tag{8.34}$$

ہے۔ کیلکولیٹر، کلیہ سٹرلنگ اور مساوات 8.34 سے $10!$ کے نتائج کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کریں۔

باب 9

لامتناہی تسلسل

اس باب میں ہم ایک حیران کن کلیہ اخذ کرتے ہیں جس کی مدد سے بہت سارے تفاعل کو "لامتناہی کثیر رکنی" کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا اور ساتھ ہی کثیر رکنی کے ارکان حذف کر کے کثیر رکنی کو متناہی بنانے سے پیدا خلل بھی جان پائیں گے۔ ان تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ قابل تفرق تفاعل کو تخمینی طور پر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں مدد دینے کے علاوہ طاقتی تسلسل دیگر مواقع پر بھی کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔ غیر بنیادی تکمل کی قیمت کے حصول کے علاوہ حراری توانائی کی منتقلی، ارتعاش، کیمیائی نفوذ اور ترسیل اشارات کے تفرقی مساوات کے حل میں یہ موثر کردار ادا کرتے ہیں۔ آپ یہاں وہ ان تفاعل کے بارے میں سیکھ پائیں گے جو سائنس اور انجینئری میں بہت زیادہ استعمال ہوتے ہیں۔

9.1 اعداد کی ترتیب کی حد

غیر رسمی طور پر ترتیب سے مراد مرتب چیزوں کا سلسلہ ہے۔ اس باب میں ہمیں اعداد کی ترتیب سے غرض ہو گا۔ ترکیب نیوٹن سے حاصل اعداد کی ترتیب $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ یا (ہلکے ون کوچ کے) برفانی روئی کے کثیر الاضلاع کی ترتیب $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ ہم دیکھ چکے ہیں۔ ان ترتیبوں کی حد پائی جاتی ہے، البتہ بہت سارے اہم ترتیبوں کے حد نہیں پائے جاتے ہیں۔

تعریف اور علامتیت

ہم 3 کے ہر عدد صحیح مضرب کو ایک مقام مختص کر کے ایک فہرست بنا سکتے ہیں:

دائرہ کار	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
سعت	3	6	9		$3n$	

پہلا عدد 3، دوسرا 6، تیسرا 9، وغیرہ، وغیرہ ہیں۔ مختص کرنے کا عمل ایک تفاعل ہے جو n ویں مقام کو $3n$ مختص کرتا ہے۔ ترتیب کی بناوٹ کا بنیادی تصور یہی ہے۔ ایک تفاعل ہمیں بتاتا ہے کہ کس مقام پر کونسا عدد ہو گا۔

تعریف: ایک تفاعل جس کا دائرہ کار کسی عدد صحیح n_0 کے برابر یا اس سے بڑے عدد صحیح پر مشتمل اعداد کا سلسلہ ہو **لامتناہی ترتیب**[1] (یا **ترتیب**[2]) کہلاتا ہے۔

□

عموماً $n_0 = 1$ ہوتا ہے اور ترتیب کا دائرہ کار مثبت اعداد صحیح پر مشتمل ہو گا۔ البتہ بعض اوقات ہم تسلسل کو کسی دوسرے عدد صحیح سے شروع کرنا چاہتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن میں ہم $n_0 = 0$ لیتے ہیں۔ اگر ہم n اضلاع پر مشتمل کثیر الاضلاع کی ترتیب کی بات کریں تب ہم $n_0 = 3$ منتخب کرنا چاہیں گے۔

ترتیب کی تعریف کسی بھی تفاعل کی طرح کی جاتی ہے (مثال 9.1 اور شکل 9.1 تا شکل 9.6)، مثلاً:

$$a(n) = \sqrt{n}, \quad a(n) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

یہ ظاہر کرنے کی خاطر کہ دائرہ کار عدد صحیح ہے، ہم حرف n استعمال کرتے ہیں نا کہ دیگر غیر تابع متغیر کے لئے مستعمل حروف x ، y ، z ، t ، وغیرہ۔ مذکورہ بالا کی طرح تعریفی قاعدہ میں کلیات عموماً مثبت عدد صحیح سے زیادہ بڑے دائرہ کار کے لئے درست ہوتے ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے یہ بعض اوقات سود مند ثابت ہوتا ہے۔

عدد $a(n)$ ترتیب کا n **واں جزو** یا اشاریہ n والا جزو ہو گا۔ اگر $a(n) = \frac{n-1}{n}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

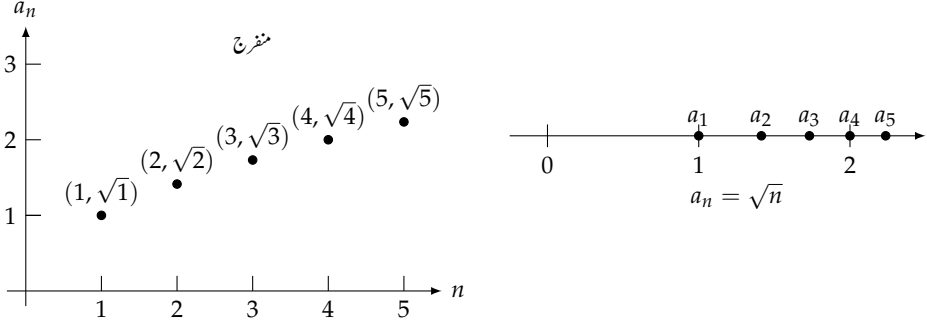
پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		n واں جزو
$a(1) = 0$	$a(2) = \frac{1}{2}$	$a(3) = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a(n) = \frac{n-1}{n}$

اشاریہ علامت استعمال کرتے ہوئے ہم $a(n)$ کو a_n لکھتے ہیں۔ اشاریہ علامتی روپ میں یہی ترتیب درج ذیل لکھی جائے گی۔

پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		n واں جزو
$a_1 = 0$	$a_2 = \frac{1}{2}$	$a_3 = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$

ترتیب پر تبصرہ کرتے ہوئے ہم عموماً n ویں جزو کے کلیہ کے ساتھ ساتھ چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں۔

---

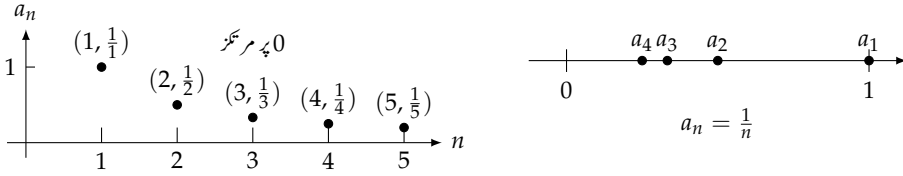
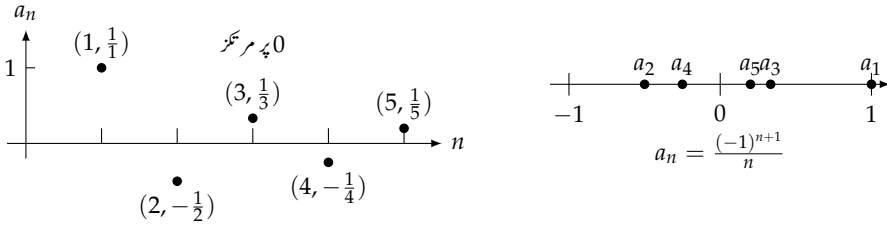
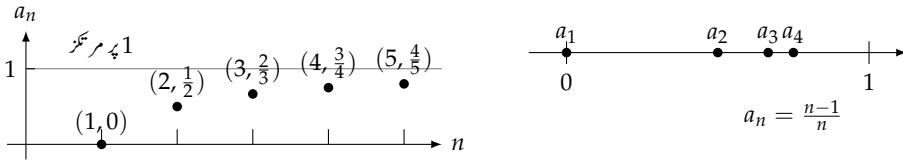
[1] infinite sequence
[2] sequence

شکل 9.1: جزو a_n آخر کار ہر عدد صحیح سے بڑھتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔

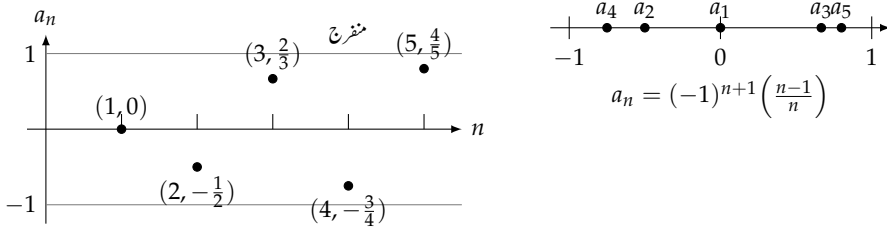
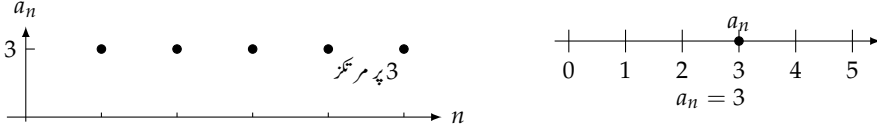
مثال 9.1:

جس ترتیب کا تعریفی کلیہ درج ذیل ہو	اس کے لئے ہم درج ذیل لکھتے ہیں
$a_n=\sqrt{n}$	$1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\cdots,\sqrt{n},\cdots$
$a_n=\frac{1}{n}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$
$a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots$
$a_n=\frac{n-1}{n}$	$0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots$
$a_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	$0,-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right),\cdots$
$a_n=3$	$3,3,3,\cdots,3,\cdots$

ان تمام ترتیبوں کو دو مختلف انداز میں شکل 9.1 تا شکل 9.6 میں دکھایا گیا ہے۔ □

علامتیت

جس ترتیب کا n واں جزو a_n ہو اس ترتیب کو ہم $\{a_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں جو ترتیب a اشاریہ n پڑھا جاتا ہے۔ مثال 9.1 میں دوسری ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ ہے جو ترتیب ایک بٹہ تین پڑھا جاتا ہے۔ آخری ترتیب $\{3\}$ ہے جو مستقل ترتیب 3 کہلائے گی۔

شکل 9.2: جزو $a_n = \frac{1}{n}$ بتدریج n بڑھنے سے گھٹتے ہوئے 0 کے قریب پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ صفر کو مرتکز ہے۔

شکل 9.3: جزو $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ کی علامت ہر مرتبہ تبدیل ہوتی ہے لیکن اس کی قیمت 0 پر مرتکز ہے۔

شکل 9.4: جیسے جیسے n بڑھتا ہے جزو $a_n = \frac{n-1}{n}$ بتدریج 1 تک پہنچتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز ہے 1 پر۔

3 -

شکل 9.5: جزو $a_n = (-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]$ کی علامت ہر قدم پر تبدیل ہوتی ہے۔ مثبت اجزاء 1 کو پہنچتے ہیں جبکہ منفی اجزاء -1 کو پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔

شکل 9.6: مستقل اجزاء $a_n = 3$ کی قیمت 3 ہی رہتی ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ کی قیمت 3 پر مرتکز ہے۔

ارتکاز اور انفراج

آپ نے شکل 9.1 تا شکل 9.6 میں دیکھا کہ مثال 9.1 میں دیے گئے ترتیبات ایک جیسا رویہ نہیں رکھتے ہیں۔ متغیر n کی قیمت بڑھانے سے ترتیبات $\{\frac{1}{n}\}$ ، $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$ اور $\{\frac{n-1}{n}\}$ میں ہر ایک کی قیمت کسی ایک منفرد تحدیدی قیمت تک پہنچتی ہے جبکہ ترتیب $\{3\}$ ابتدا سے تحدیدی قیمت پر ہے۔ اس کے برعکس $\{(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n}\}$ کے اجزاء دو مختلف قیمتوں، -1 اور 1 ، پر جمع ہوتے ہیں جبکہ $\{\sqrt{n}\}$ کے اجزاء بتدریج بڑھتے جاتے ہیں۔

ان ترتیبات میں امتیاز کرنے کی خاطر جو n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہیں اور جو کسی منفرد قیمت تک نہیں پہنچتی ہیں، ہم ان ترتیبات کو جو n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہو کو مرتکز کہتے ہیں۔ ارتکاز کی باضابطہ تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت عدد ϵ کے لئے ایسا مطابقتی عدد صحیح N پایا جاتا ہو کہ ہر n کے لئے

$$n > N, \quad \implies \quad |a_n - L| < \epsilon$$

ہو تب ترتیب $\{a_n\}$ عدد L پر **مرتکز**[3] ہو گی۔ اگر ایسا کوئی عدد L موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $\{a_n\}$ **منفرج**[4] ہے۔

اگر $\{a_n\}$ عدد L پر مرتکز ہو تب ہم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ یا مختصراً $a_n \to L$ لکھتے ہیں اور L کو اس ترتیب کا **حد**[5] کہتے ہیں (شکل 9.7)۔

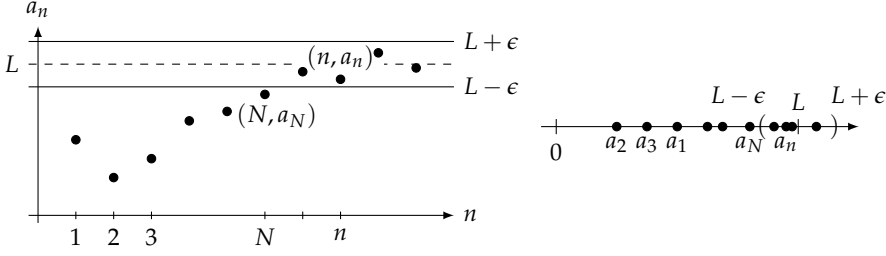
□

مثال 9.2: تعریف کی پرکھ
درج ذیل دکھائیں۔

$$\text{(الف)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{n\to\infty} k = k \qquad (\text{مستقل } k)$$

---

[3] convergent
[4] divergent
[5] limit

شکل 9.7: اگر نقاط (n,a_n) کی لکیر $y=L$ افقی متقارب ہو تب $a_n \to L$ ہو گا۔ اس شکل میں a_N کے بعد تمام a_n کا خط L سے فاصلہ ϵ سے کم ہے۔

حل: (الف) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہو گا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لئے

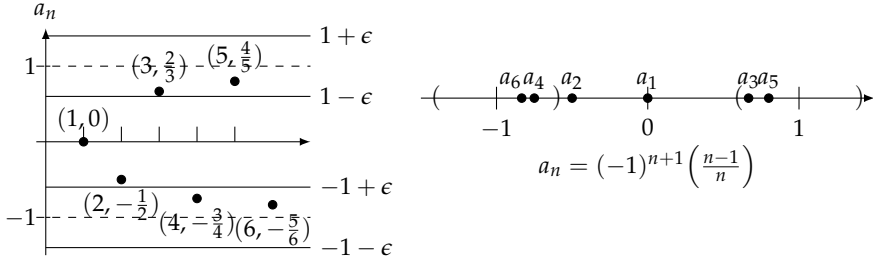
$$n > N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$$

ہو گا۔ یہ اس صورت ممکن ہو گا اگر $\frac{1}{n} < \epsilon$ یا $n > \frac{1}{\epsilon}$ ہو۔ اگر $\frac{1}{\epsilon}$ سے N کوئی بھی بڑا عدد صحیح ہو تب کسی بھی $n > N$ کے لئے درج بالا درست ہو گا۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ ہے۔
(ب) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہو گا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لئے

$$n > N \implies |k-k| < \epsilon$$

ہو گا۔ چونکہ $k-k=0$ ہوتا ہے لہٰذا درج بالا کسی بھی مثبت عدد صحیح N کے لئے درست ہو گا۔ یوں ثابت ہوا کہ کسی بھی مستقل k کے لئے $\lim_{n\to\infty} k = k$ ہو گا۔ □

مثال 9.3: دکھائیں کہ $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ ہے۔

حل: ہم مثبت عدد ϵ کو 1 سے کم چنتے ہیں تا کہ شکل 9.8 میں $y=-1$ اور $y=1$ پر پٹیاں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپیں۔ اگر کسی مخصوص N سے کسی بھی بڑے n کے لئے شکل 9.8 میں نقطے بالائی پٹی میں پائے جاتے ہوں تب یہ ترتیب 1 پر مرتکز ہو گی۔ حقیقت میں جیسا ہی کوئی پہلا نقطہ (n,a_n) بالائی پٹی کے اندر آتا ہے، اس کے بعد $(n+1,a_{n+1})$ سے شروع کرتے ہوئے ہر متبادل نقطہ نچلی پٹی میں پایا جاتا ہے۔ یوں ترتیب کسی صورت 1 پر مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ اسی طرح یہ ترتیب -1 پر بھی مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ ترتیب کے اجزاء -1 یا 1 کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں لہٰذا یہ کسی دوسرے نقطے کے قریب نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا یہ ترتیب منفرج ہے۔ □

شکل 9.8: تسلسل $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ منفرج ہے (مثال 9.3)

ترتیب $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ کا رویہ $\{\sqrt{n}\}$ کے رویے سے مختلف ہے۔ ترتیب $\{\sqrt{n}\}$ کے منفرج ہونے کی وجہ یہ ہے کہ یہ ہر حقیقی عدد L سے تجاوز کرتا ہے۔ اس رویے کو ہم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ لامتناہی حد سے یہاں ہمارا ہر گز یہ مطلب نہیں ہے کہ n بڑھانے سے a_n اور لامتناہی کے بیچ فرق کم ہوتا ہے۔ کہنے کا مطلب صرف اتنا ہے کہ n بڑھانے سے a_n بہت بڑا ہو جاتا ہے۔

تکراری تعریف

اب تک ہم n سے بلا واسطہ a_n تلاش کرتے آ رہے ہیں اگرچہ ترتیب کی عموماً تکراری تعریف پیش کی جاتی ہے جہاں

ا. ابتدائی جزو یا اجزاء کی قیمتیں دی جاتی ہیں اور

ب. **کلیہ توالی**[6] سے ہر جزو کو گزشتہ اجزاء کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔

کمپیوٹر پروگرام اور تفرقی مساوات کے اعدادی حل کے طریقوں میں توالی کلیات عموماً پائے جاتے ہیں۔

مثال 9.4: تواتر سے ترتیب کی بناوٹ

ا. $a_1 = 1$ اور $a_n = a_{n-1} + 1$ کا فقرہ مثبت اعداد کی ترتیب $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1 = 1$ لیتے ہوئے $a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ ، $a_3 = a_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ ، وغیرہ، ہو گا۔

ب. a_1 اور $a_n = n \cdot a_{n-1}$ کا فقرہ **اعداد ضربیہ**[7] کی ترتیب $1, 2, 6, 24, \cdots, n!, \cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1 = 1$ لیتے ہوئے $a_2 = 2 \cdot a_1 = 2$ ، $a_3 = 3 \cdot a_2 = 6$ ، $a_4 = 4 \cdot a_3 = 24$ وغیرہ، ہو گا۔

---

[6] recursion formula
[7] factorials

جدول 9.1: قوت نما سے فبونیکی اعداد زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔

$n!$	e^n	n
1	3	1
120	148	5
3 628 800	22 026	10
2.4×10^{18}	4.9×10^{8}	20

ج. $a_1 = 1$ ، $a_2 = 1$ اور $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ کا فقرہ **فبونیکی اعداد**[8] کی ترتیب $1, 1, 2, 3, 5, \cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1 = 1$ اور $a_2 = 1$ لیتے ہوئے $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ ، $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ ، $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ ، وغیرہ، ہو گا۔

د. جیسا ہم ترکیب نیوٹن کی اطلاق سے جانتے ہیں کہ $x_0 = 1$ اور $x_{n+1} = x_n - \left[\frac{\sin x_n - x_n^2}{\cos x_n - 2x_n}\right]$ کا فقرہ ایسی ترتیب کی تعریف پیش کرتا ہے جو مساوات $\sin x - x^2 = 0$ کے حل پر مرتکز ہوتی ہے۔

□

علامت $n!$ (جس کو n کا **ضربیہ عدد** کہتے ہیں) سے مراد 1 سے n تک اعداد صحیح کا حاصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ ہو گا لہٰذا

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$$

ہوں گے۔ہم $0!$ کی تعریف 1 لیتے ہیں۔

جیسا جدول 9.1 میں دکھایا گیا ہے قوت نما سے بھی زیادہ تیزی سے فبونیکی اعداد بڑھتے ہیں۔

ذیلی ترتیبات

اگر ایک ترتیب کے اجزاء اسی ترتیب سے دوسری ترتیب میں پائے جاتے ہوں تب ہم پہلی ترتیب کو دوسری ترتیب کی **ذیلی ترتیب**[9] کہتے ہیں۔

مثال 9.5: مثبت اعداد صحیح کی ترتیب کی ذیلی ترتیبات

---

[8] Fibonacci numbers
[9] subsequence

ا. جفت اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

ب. طاق اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $1, 3, 5, \cdots 2n-1, \cdots$

ج. اعداد مفرد کی ذیلی ترتیب $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$

□

ذیلی ترتیبات کی اہمیت کے دو وجوہات ہیں۔

ا. اگر تسلسل $\{a_n\}$ مستقل L کو مرتکز ہو تب اس کے تمام ذیلی ترتیبات بھی L پر مرکوز ہوں گی۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ ایک تسلسل مرتکز ہے تب اس کے کسی مخصوص ذیلی تسلسل سے حد کی تلاش یا اس کا تخمینہ لگانا زیادہ آسان ثابت ہو سکتا ہے۔

ب. اگر $\{a_n\}$ کا کوئی بھی ذیلی تسلسل منفرج ہو یا اس کے کسی دو ذیلی ترتیبات کے حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\{a_n\}$ منفرج ہو گا۔ مثال کے طور پر تسلسل $\{(-1)^n\}$ منفرج ہو گا چونکہ طاق اجزاء کی ذیلی تسلسل $-1, -1, -1, \cdots$ کی حد -1 ہے جبکہ جفت اجزاء کی ذیلی تسلسل $1, 1, 1, \cdots$ کی حد 1 ہے جو ایک مختلف حد ہے۔

ذیلی تسلسل کی مدد سے ارتکاز کو ایک نئی نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ کسی اشاریہ N سے آگے تمام اجزاء کو تسلسل کی **دم**[10] کہتے ہیں جو ایک ذیلی تسلسل ہو گی۔ یوں سلسلہ $\{a_n | n \geq N\}$ میں سے کسی ایک کو دم کہا جا سکتا ہے۔ یوں $a_n \to L$ کی جگہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ L کے ارد گرد ϵ وقفہ میں تسلسل کی دم پائی جائے گی۔

کسی بھی تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کا تسلسل کی ابتدا کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔ تسلسل کی ارتکاز یا انفراج صرف تسلسل کی دم پر منحصر ہو گی۔

محدود غیر گھٹتا تسلسل

تعریف: ایسا تسلسل جو تمام n کے لئے $a_n \leq a_{n+1}$ خاصیت رکھتا ہو **غیر گھٹتا تسلسل**[11] کہلاتا ہے۔

□

مثال 9.6: غیر گھٹتا تسلسل

---

[10] tail
[11] nondecreasing sequence

ا. قدرتی اعداد کا تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

ج. مستقل تسلسل $\{3\}$

□

غیر گھٹتا تسلسل کی دو قسمیں ہیں۔ پہلی قسم کے اجزاء آخر کار ہر متناہی حد بندی سے بڑھ جاتے ہیں جبکہ دوسری قسم کے اجزاء کسی مخصوص حد بندی سے تجاوز نہیں کرتے ہیں۔

تعریف: اگر ایک ایسا عدد M موجود ہو کہ تمام n کے لئے $a_n \leq M$ ہوں تب تسلسل $\{a_n\}$ کی **بالائی حد بندی**[12] M ہو گی۔ ہم کہتے ہیں کہ تسلسل $\{a_n\}$ **اوپر سے محدود**[13] ہے۔ اگر M سے کم کوئی بھی عدد، $\{a_n\}$ کی بالائی حد بندی نہ ہو، تب M کو $\{a_n\}$ کی **کم سے کم بالائی حد بندی**[14] کہتے ہیں۔

□

مثال 9.7:

ا. تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے۔

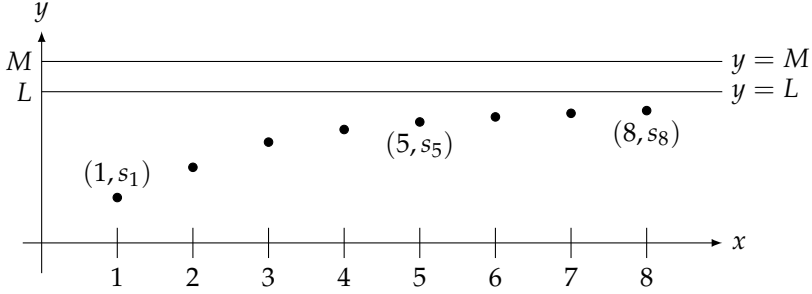
ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ اوپر سے محدود ہے اور اس کی بالائی حد بندی $M = 1$ ہے۔کوئی بھی عدد جو 1 سے چھوٹا ہو اس تسلسل کی بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا اس تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے (سوال 9.47)۔

□

ایسے غیر گھٹتا تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی ضرور پایا جائے گا جو اوپر سے محدود ہو۔ یہ حقیقت، جس کو ہم یہاں ثابت نہیں کریں گے، حقیقی اعداد کی مکملیت کی خاصیت کی بنا ہے۔ البتہ ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر L کم سے کم بالائی حد بندی ہو تب تسلسل L پر مرتکز ہو گا۔

فرض کریں ہم $(1, s_1), (2, s_2), \cdots, (n, s_n), \cdots$ نقطوں کو xy مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ اگر اس تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب یہ تمام نقطے لکیر $y = M$ کے نیچے پائے جائیں گے (شکل 9.9)۔ لکیر $y = L$ سب سے نچلی ایسی لکیر ہو گی۔ نقاط (n, s_n) میں سے کوئی بھی اس لکیر سے اوپر نہیں ہو گا اگرچہ اس سے نیچے لکیر $y = L - \epsilon$ سے چند نقطے ضرور اوپر ہوں گے، جہاں ϵ مثبت عدد ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل وجوہات کی بنا L پر مرتکز ہو گی:

---

[12] upper bound
[13] bounded from above
[14] least upper bound

شکل 9.9: اگر غیر گھٹتے تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب اس کے حد $L \leq M$ بھی ہوں گے۔

ا. تمام n کے لئے $s_n \leq L$ ہو گا اور

ب. کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے کم سے کم ایک ایسا عدد N موجود ہو گا جس کے لئے $s - N > L - \epsilon$ ہو گا۔

مزید $\{s_n\}$ غیر گھٹتا ہے لہٰذا

$$\text{تمام } n \geq N \text{ کے لئے} \qquad s_n \geq s_N > L - \epsilon$$

ہو گا۔ یوں N کے بعد تمام اعداد s_n کا L سے فاصلہ ϵ سے کم ہو گا۔ یہی وہ شرط ہے جس کی بنا تسلسل s_n کی حد L ہو گی۔

غیر گھٹتے ترتیبات کے حقائق کو درج ذیل مسئلہ یکجاء کرتا ہے۔ غیر بڑھتے ترتیبات کے لئے بھی اسی طرح کا نتیجہ کارآمد ہے (سوال 9.41)۔

مسئلہ 9.1: غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ
حقیقی اعداد کا ایک غیر گھٹتا تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب یہ تسلسل اوپر سے محدود ہو۔ اگر ایک غیر گھٹتا تسلسل مرتکز ہو، یہ اپنے کم سے کم بالائی حد بندی پر مرتکز ہو گا۔

سوالات

ترتیب کے اجزاء کی تلاش

سوال 9.1 تا سوال 9.6 میں ترتیب کی n ویں جزو کا کلیہ دیا گیا ہے۔ اس کے ابتدائی اجزاء a_1 ، a_2 ، a_3 اور a_4 تلاش کریں۔

سوال 9.1: $a_n = \frac{1-n}{n^2}$
جواب: $a_0 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = -\frac{2}{9},\ a_4 = -\frac{3}{16}$

سوال 9.2: $a_n = \frac{1}{n!}$

سوال 9.3: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
جواب: $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{5},\ a_4 = -\frac{1}{7}$

سوال 9.4: $a_n = 2 + (-1)^n$

سوال 9.5: $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$
جواب: $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{2}$

سوال 9.6: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

سوال 9.7 تا سوال 9.12 میں ابتدائی ایک یا دو اجزاء اور کلیہ توالی دی گئی ہے۔ ابتدائی دس اجزاء تلاش کریں۔

سوال 9.7: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$
جواب: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$

سوال 9.8: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

سوال 9.9: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{a_n}{2}$
جواب: $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

سوال 9.10: $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1}$

سوال 9.11: $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$
جواب: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

سوال 9.12: $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

ترتیب کے کلیہ کی تلاش

سوال 9.13 تا سوال 9.22 میں دیے گئے ترتیب کے n ویں جزو کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال 9.13: $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔
جواب: $a_n = (-1)^{n+1},\ n \geq 1$

سوال 9.14: $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 9.15: $1, -4, 9, -16, 25, \cdots$ مثبت عدد صحیح کا مربع جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔
جواب: $a_n = (-1)^{n+1}(n)^2,\ n \geq 1$

سوال 9.16: $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \cdots$ مثبت عدد صحیح کے مربع کا بالعکس متناسب جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔

سوال 9.17: $0, 3, 8, 15, 24, \cdots$ مثبت عدد صحیح کے مربع سے 1 کم۔
جواب: $a_n = n^2 - 1,\ n \geq 1$

سوال 9.18: $-3, -2, -1, 0, 1, \cdots$ عدد صحیح -3 سے شروع کرتے ہوئے۔

سوال 9.19: $1, 5, 9, 13, 17, \cdots$ ہر دوسرا طاق مثبت عدد صحیح۔
جواب: $a_n = 4n - 3,\ n \geq 1$

سوال 9.20: $2, 6, 10, 14, 18, \cdots$ ہر دوسرا جفت مثبت عدد صحیح۔

سوال 9.21: $1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ باری باری 1 اور 0
جواب: $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ n \geq 1$

سوال 9.22: $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \cdots$ ہر مثبت عدد صحیح دو بار۔

کیلکولیٹر کی مدد سے حد کی تلاش

سوال 9.23 تا سوال 9.26 میں کیلکولیٹر کے ساتھ تجربات کرتے ہوئے N کی وہ قیمت تلاش کریں جو دی گئی عدم مساوات کو تمام $n > N$ کے لئے مطمئن کرتا ہو۔ دی گئی عدم مساوات، تسلسل کی حد کی باضابطہ تعریف کے تحت ہے۔ تسلسل کی تفصیل پیش کریں اور اس کی حد تلاش کریں۔

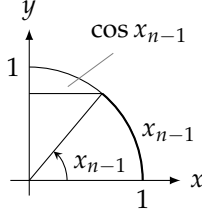
سوال 9.23: $\left|\sqrt[n]{0.5} - 1\right| < 10^{-3}$
جواب: $N = 692,\ a_n = \sqrt[n]{0.5},\ L = 1$

سوال 9.24: $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < 10^{-3}$

سوال 9.25: $(0.9)^n < 10^{-3}$
جواب: $N = 65,\ a_n = (0.9)^n,\ L = 0$

سوال 9.26: $\frac{2^n}{n!} < 10^{-7}$

سوال 9.27: ترکیب نیوٹن سے حاصل ترتیبات
ترکیب نیوٹن کی قابل تفرق تفاعل $f(x)$ پر اطلاق سے ابتدائی قیمت x_0 اور اس کے بعد اعداد کی ترتیب $\{x_n\}$ حاصل ہوتی ہے جو موزوں صورت میں f کے صفر پر مرتکز ہو گی۔ اس ترتیب کا کلیہ توالی درج ذیل ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

شکل 9.10: اکائی دائرہ برائے سوال 9.10

ا. دکھائیں کہ $f(x) = x^2 - a^2,\ a > 0$ کا کلیہ توالی $x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}$ ہے۔

ب. ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ اور $a = 3$ لیتے ہوئے وہاں تک یک بعد دیگرے اجزاء تلاش کریں جب اجزاء دہرانے شروع ہو جاتے ہیں۔ کون سے عدد کی تخمین حاصل ہوتی ہے؟ وجہ پیش کریں۔

جواب: (ب) $\sqrt{3}$

سوال 9.28: گزشتہ سوال (سوال 9.27) میں $a = 3$ کی بجائے $a = 2$ لیتے ہوئے جزو-ب دوبارہ حل کریں۔

سوال 9.29: $\frac{\pi}{2}$ کی تعریف توالی
اگر آپ $x_1 = 1$ سے شروع کر کے $\{x_n\}$ کے باقی اجزاء کو قاعدہ $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ سے حاصل کریں تب ایک ایسی ترتیب حاصل ہو گی جو بہت تیزی سے $\frac{\pi}{2}$ پر مرتکز ہو گی۔ (ا) ایسا کر کے دیکھیں۔ (ب) اتنی تیز ارتکاز کی وجہ شکل 9.10 کی مدد سے پیش کریں۔

سوال 9.30: گاڑیاں بنانے والا ایک کارخانہ دھاتی چادر کو دبا کر ایک گاڑی کا ڈھانچہ اوسطاً 7.25 گھنٹوں میں تیار کرتا ہے۔ اگر ڈھانچہ تیار کرنے کے لئے درکار وقت میں سالانہ 6 % کمی رونما ہو تب n سالوں بعد

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

وقت درکار ہو گا۔ کتنے سالوں بعد تقریباً 3.5 گھنٹے درکار ہوں گے؟ جواب کو دو مختلف طریقوں سے تلاش کریں:

ا. تسلسل S_n کا وہ پہلا جزو تلاش کریں جو 3.5 کے برابر یا اس سے کم ہو۔

ب. تفاعل $f(x) = 7.25(0.94)^x$ ترسیم کر کے دیکھیں یہ کہاں لکیر $y = 3.5$ کو مس کرتی ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.31 تا سوال 9.34 میں معلوم کریں کہ آیا تسلسل غیر گھٹتی ہے اور کیا یہ اوپر سے محدود ہے۔

سوال 9.31: $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

جواب: غیر گھٹتا، محدود

سوال 9.32: $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

سوال 9.33: $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$

جواب: غیر گھٹتا نہیں ہے، محدود

سوال 9.34: $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

سوال 9.35 تا سوال 9.40 میں کون سی ترتیب مرتکز ہے اور کون سی منفرج؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.35: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

جواب: مرتکز، غیر گھٹتا، غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ

سوال 9.36: $a_n = n - \frac{1}{n}$

سوال 9.37: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

جواب: مرتکز، غیر گھٹتا، غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ

سوال 9.38: $a_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$

سوال 9.39: $a_n = [(-1)^n + 1]\left(\frac{n+1}{n}\right)$

جواب: منفرج، انفراج کی تعریف

سوال 9.40: ایک ترتیب کا پہلا جزو $x_1 = \cos(1)$ ، اگلا جزو $x_2 = x_1$ یا $\cos(2)$ میں سے جو بھی بڑا ہے، اس سے اگلا جزو $x_3 = x_2$ یا $\cos(3)$ میں سے جو بھی بڑا (دائیں جانب زیادہ دور) ہے۔ یوں عمومی جزو درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = \text{زیادہ بڑا}\{x_n, \cos(n+1)\}$$

سوال 9.41: غیر بڑھتے ترتیبات

ایک ترتیب جس میں تمام n کے لئے $a_n > a_{n+1}$ ہو **غیر بڑھتا ترتیب**[15] کہلاتا ہے۔ اگر ہر n کے لئے $M \leq a_n$ ہو

nonincreasing sequence[15]

جہاں M کوئی عدد ہو تب M کو ترتیب $\{a_n\}$ کی **زیریں حد بندی**[16] کہتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ یہ ترتیب **نیچے سے محدود**[17] ہے۔ مسئلہ 9.1 سے اخذ کریں کہ ایسا غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود ہو مرتکز ہو گا جبکہ غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود نہ ہو منفرج ہو گا۔

سوال 9.42 تا سوال 9.46 میں سوال 9.41 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ کونسی ترتیب مرتکز اور کونسی سی منفرج ہے۔

سوال 9.42: $a_n = \frac{n+1}{n}$

سوال 9.43: $a_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$
جواب: مرتکز

سوال 9.44: $a_n = \frac{1-4^n}{2^n}$

سوال 9.45: $a_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$
جواب: مرتکز

سوال 9.46: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

سوال 9.47: ترتیب $\{\frac{n}{n+1}\}$ کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے۔ دکھائیں کہ اگر عدد M ایک سے کم ہو تب $\{\frac{n}{n+1}\}$ کے اجزاء آخر کار M سے تجاوز کر جائیں گے۔ یعنی $M < 1$ کی صورت میں ایسا عدد صحیح N موجود ہو گا کہ جب $n > N$ ہو تب $\frac{n}{n+1} > M$ ہو گا۔ چونکہ ہر n کے لئے $\frac{n}{n+1} < 1$ ہے لہٰذا یوں ثابت ہوتا ہے کہ $\{\frac{n}{n+1}\}$ کی بالائی حد بندی 1 ہو گی۔

سوال 9.48: کم سے کم بالائی حد بندی کی یکتائی
دکھائیں کہ اگر M_1 اور M_2 ترتیب $\{a_n\}$ کے کم سے کم بالائی حد بندی ہوں تب $M_1 = M_2$ ہو گا، یعنی، کسی بھی ترتیب کے دو مختلف کم سے کم بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہیں۔

سوال 9.49: کیا ضروری ہے کہ اوپر سے محدود، مثبت اعداد کی ترتیب $\{a_n\}$ لازماً مرتکز ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.50: اگر $\{a_n\}$ مرتکز ترتیب ہو تب دکھائیں کہ ہر مثبت عدد ϵ کے لئے ایسا مطابقتی عدد صحیح N ہو گا کہ تمام m اور n کے لئے درج ذیل ہو۔

$$m > N \quad \text{اور} \quad n > N \quad \implies \quad |a_m - a_n| < \epsilon$$

---

[16] lower bound
[17] bounded from below

سوال 9.51: حد کی یکتائی
ثابت کریں کہ ہر ترتیب کا حد یکتا ہو گا، یعنی، دکھائیں کہ اگر L_1 اور L_2 ایسے اعداد ہوں کہ $a_n \to L_1$ اور $a_m \to L_2$ ہوں تب $L_1 = L_2$ ہو گا۔

سوال 9.52: ترتیبات اور حد
دکھائیں کہ اگر ترتیب $\{a_n\}$ کے دو ذیلی ترتیبات کے حد مختلف ہوں، $L_1 \neq L_2$ تب $\{a_n\}$ منفرج ترتیب ہو گی۔

سوال 9.53: ترتیب $\{a_n\}$ کے جفت اشاریہ کے اجزاء کو a_{2k} اور طاق اشاریہ کے اجزاء کو a_{2k+1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ثابت کریں کہ $a_{2k} \to L$ اور $a_{2k+1} \to L$ کی صورت میں $a_n \to L$ ہو گا۔

سوال 9.54: دکھائیں کہ ترتیب $\{a_n\}$ اس صورت 0 کو مرتکز ہو گا جب مطلق قیمتیں $\{|a_n|\}$ صفر کو مرتکز ہوں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 9.55 تا سوال 9.66 میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. ابتدائی 25 اجزاء کا حساب لگا کر انہیں ترسیم کریں۔ کیا ترتیب اوپر یا نیچے سے محدود نظر آتی ہے؟ کیا یہ منفرج یا مرتکز نظر آتی ہے؟ ارتکاز کی صورت میں حد L کتنا ہے؟

ب. اگر تسلسل مرتکز ہو تب ایسا عدد صحیح N تلاش کریں کہ $n \geq N$ کے لئے $|a_n - L| \leq 0.01$ ہو۔ ترتیب میں کتنا آگے جا کر L اور اجزاء کے بیچ فاصلہ 0.0001 سے کم ہو گا؟

سوال 9.55: $a_n = \sqrt[n]{n}$

سوال 9.56: $a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$

سوال 9.57: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

سوال 9.58: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

سوال 9.59: $a_n = \sin n$

سوال 9.60: $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

سوال 9.61: $a_n = \frac{\sin n}{n}$

سوال 9.62: $a_n = \frac{\ln n}{n}$

سوال 9.63: $a_n = (0.9999)^n$

سوال 9.64: $a_n = 123456^{1/n}$

سوال 9.65: $a_n = \frac{8^n}{n!}$

سوال 9.66: $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$

سوال 9.67: سود در سود
آپ ایک بینک میں مستقل رقم A_0 جمع کرتے ہیں جو سالانہ r فی صد سود کا ایک سال میں m مرتبہ حساب لگا کر آپ کے رقم میں جمع کرتی ہے۔ مزید آپ ہر سال b رقم بھی بینک میں جمع کرتے ہیں یا $b < 0$ کی صورت میں بینک سے نکالتے ہیں۔ یوں $n+1$ سال بعد کل رقم درج ذیل ہو گی۔

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) A_n + b \tag{9.1}$$

ا. اگر $A_0 = 1000$ ، $r = 0.02015$ ، $m = 12$ اور $b = 50$ ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں (n, A_n) کو ترسیم کریں۔ پانچ سال کے آخر میں آپ کی رقم کتنی ہو گی؟ کیا $\{A_n\}$ مرتکز ہے؟ کیا $\{A_n\}$ محدود ہے۔

ب. اگر $A_0 = 5000$ ، $r = 00589$ ، $m = 12$ اور $b = -50$ ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں (n, A_n) کو ترسیم کریں۔

ج. اگر آپ بینک میں 5000 رقم مستقل طور پر جمع کریں جس پر سالانہ $4.5\,\%$ سود ہو جس کا ایک سال میں چار مرتبہ حساب کیا جاتا ہو تب کتنے سالوں بعد آپ کی رقم 20000 ہو گی۔ اگر سود $6.25\,\%$ ہو؟

د. سود در سود کا تعلق مساوات 9.1 میں پیش کیا گیا ہے جو $k \geq 0$ کے لئے درج ذیل تعلق کو مطمئن کرتی ہے

$$A_k = (1 + r/m)^k (A_0 + mb/r) - \frac{mb}{r} \tag{9.2}$$

جس کی تصدیق کی خاطر مساوات 9.1 اور مساوات 9.2 کی ابتدائی 50 اجزاء کا آپس میں موازنہ کریں۔ اس کے بعد مساوات 9.2 سے مساوات 9.1 اخذ کریں۔

سوال 9.68: اگر ابتدائی قیمت a_0 دیا گیا ہو تب کلیہ توالی $a_{n+1} = r a_n (1 - a_n)$ ترتیب $\{a_n\}$ دیتا ہے۔ ہم $0 < a_0 < 1$ لیں گے۔

ا. $a_0 = \frac{3}{4}$ منتخب کریں۔ ترتیب کے ابتدائی 100 نقطے (n, a_n) ترسیم کریں۔ کیا ترتیب مرتکز معلوم ہوتا ہے؟ آپ کے خیال میں ترتیب کا حد کیا ہے؟ کیا حد کی قیمت a_0 کے انتخاب پر منحصر ہے؟

ب. وقفہ $3 < r < 1$ میں r کی کئی قیمتیں منتخب کر کے جزو-الف دہرائیں۔ اس وقفہ کے سروں کے قریب ضرور نقطے منتخب کریں۔ ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

ج. اب وقفہ $3 < r < 3.45$ کے آخری سروں کے قریب ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ عبوری نقطہ $r = 3$ کو **دولختی قیمت**[18] کہتے ہیں۔ نئے وقفہ میں ترتیب کے رویہ کو 2 **چکر کششی** کہتے ہیں۔ آپ سمجھائیں کہ یہ فقرہ کیوں ترتیب کے رویہ کو درست بیان کرتا ہے۔

د. وقفہ $3.45 < r < 3.54$ اور وقفہ $3.54 < r < 3.55$ کے آخری سروں کے قریب r کی قیمتوں کے لئے ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ ترتیب کی ابتدائی 200 قیمتیں ترسیم کریں۔ ہر ایک وقفہ میں ترتیب کے رویوں پر تبصرہ کریں۔ ہر ایک وقفہ میں کتنی قیمتوں کے بیچ ترتیب ارتعاش کرتی ہے؟ چونکہ $r = 3.45$ اور $r = 3.54$ کو عبور کرنے سے ترتیب کا رویہ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا ان نقطوں کو بھی دولختی قیمتیں کہتے ہیں۔

ہ. حقیقت میں دولختی قیمتوں کی ترتیب $3 < 3.45 < 3.54 < \cdots < c_n < c_{n+1} \cdots$ پائی جاتی ہے جس میں $c_n < r < c_{n+1}$ ہو گا۔ یوں یہ ترتیب 2^n قیمتوں، جنہیں 2^n **چکر کششی** کہتے ہیں، کے بیچ برقرار ارتعاش کرتی ہے۔ مزید دو لختی ترتیب $\{c_n\}$ اوپر سے 3.57 تک محدود ہے لہٰذا یہ مرتکز ہو گی۔ اگر آپ $r < 3.57$ منتخب کریں، آپ کو 2^n چکر کی کوئی قسم نظر آئے گی۔ آپ $r = 3.5695$ منتخب کر کے ابتدائی 300 نقطے ترسیم کریں۔

و. آئیں $r > 3.57$ کر کے ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ یوں $r = 3.65$ منتخب کر کے $\{a_n\}$ کے ابتدائی 300 نقطے ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ترتیب کے اجزاء میں کوئی ترتیب نہیں پائی جائے گی۔ آپ a_n کی قیمت سے a_{n+1} کی قیمت کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں۔

ز. $r = 3.65$ لے کر a_0 کی دو قریبی ابتدائی قیمتیں، مثلاً $a_0 = 0.3$ اور $a_0 = 0.301$، منتخب کریں۔ ان ابتدائی قیمتوں سے حاصل دونوں ترتیب کی ابتدائی 300 قیمتیں ترسیم کریں۔ دونوں کے رویہ پر غور کریں۔ کتنے اجزاء بعد دونوں ترتیبوں کے اجزاء میں فرق بڑھتا ہوا نظر آتا ہے؟ آپ $r = 3.75$ کے لئے یہی کچھ کریں۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a_0 کی انتخاب سے ترسیم کتنے مختلف نظر آتے ہیں؟ ہم کہتے ہیں کہ یہ ترتیب ابتدائی قیمت کو **حساس**[19] ہے۔

---

[18] bifurcation value
[19] sensitive

9.2 ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے

حد پر غور کرتے وقت ہر مرتبہ ارتکاز کو تعریف سے ثابت کرنا مشکل کام ہے۔ خوش قسمتی سے تین مسائل اس عمل سے، کم و بیش ہر زیادہ تر، چھٹکارا دیتے ہیں۔ پہلا مسئلہ درج ذیل ہے جو حصہ 2.2 میں مسئلہ 2.1 کی ایک قسم ہے۔

مسئلہ 9.2: فرض کریں $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ حقیقی اعداد کے ترتیب ہیں اور A اور B حقیقی اعداد ہیں۔ اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ اور $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ہوں تب درج ذیل قواعد درست ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

قاعدہ فرق: $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

قاعدہ ضرب: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (جہاں k عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ اگر $B \neq 0$ ہو۔

مثال 9.8: ہم مسئلہ 9.2 کے ساتھ گزشتہ حصے کی مثال 9.2 ملا کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4-7n^6}{n^6+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^6}-7}{1+\frac{3}{n^6}} = \frac{0-7}{1+0} = -7$$

□

مسئلہ 9.2 کے تحت منفرج ترتیب $\{a_n\}$ کو ہر غیر صفر عدد سے ضرب دینے سے منفرج ترتیب ہی حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر اس کے برعکس کسی عدد $c \neq 0$ کے لئے $\{ca_n\}$ مرتکز ہو تب مسئلہ 9.2 میں قاعدہ ضرب مستقل میں $k = \frac{1}{c}$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں درج ذیل ترتیب مرتکز ہو گی۔

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

یوں $\{ca_n\}$ صرف اس صورت مرتکز ہو گی جب a_n مرتکز ہو۔ اگر $\{a_n\}$ مرتکز نہ ہو تب $\{ca_n\}$ مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔
اگلا مسئلہ حصہ 2.2 میں مسئلہ بیچ (مسئلہ 2.4) کی ترتیب پر قابل لاگو قسم ہے۔

مسئلہ 9.3: **ترتیب کے لئے مسئلہ بیچ**
فرض کریں $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ اور $\{c_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیبات ہیں۔ اگر کسی اشاریہ N کے بعد تمام n کے لئے

$$a_n \le b_n \le c_n$$

ہو اور اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ہو تب $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ہو گا۔

اگر $|b_n| \le c_n$ ہو اور $c_n \to 0$ ہو تب چونکہ $-c_n \le b_n \le c_n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ 9.3 کے تحت $b_n \to 0$ ہو گا۔ اس حقیقت کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔

مثال 9.9: چونکہ $\frac{1}{n} \to 0$ ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\cos n}{n} \to 0 \qquad \left(\left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \le \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \qquad \left(\frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(ب)}$$

$$(-1)^n\frac{1}{n} \to 0 \qquad \left(\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(ج)}$$

□

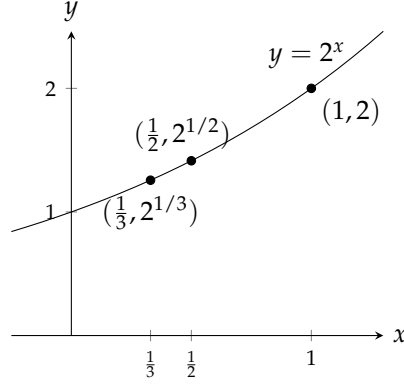
ایک مسئلہ جو کہتا ہے کہ استمراری تفاعل کی مرتکز ترتیب پر اطلاق سے مرتکز ترتیب ملتی ہے مسئلہ 9.2 اور مسئلہ 9.3 کو وسعت دیتا ہے۔ ہم اس مسئلے کو بغیر ثبوت کے پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.4: **استمراری تفاعل مسئلہ برائے ترتیبات**
فرض کریں $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیب ہے۔ اگر $a_n \to L$ ہو اور f ایسا تفاعل ہو جو L پر استمراری اور تمام a_n پر معین ہو تب $f(a_n) \to f(L)$ ہو گا۔

مثال 9.10: دکھائیں کہ $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ ہو گا۔

حل: ہم جانتے ہیں کہ $\frac{n+1}{n} \to 1$ ہے۔ مسئلہ 9.4 میں $f(x) = \sqrt{x}$ اور $L = 1$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

□

شکل 9.11: جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{1}{n} \to 0$ اور $2^{1/n} \to 2^0$ ہوتے ہیں۔

فنیات

ترتیب $\{2^{1/n}\}$: کیلکولیٹر میں 2 لکھ کر بار بار جذر لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جوابات ایسی ترتیب دیتے ہیں جو 1 کو مرتکز ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل ہے۔ کیلکولیٹر استعمال کر کے اس ترتیب کو خود حاصل کریں۔

n	$2^{1/n}$
2	1.414 213 562
4	1.189 207 115
8	1.090 507 733
64	1.010 889 286
256	1.002 711 275
1024	1.000 677 131
16384	1.000 042 307

درج بالا جدول میں کیا ہو رہا ہے؟ ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ عدد 0 کو مرتکز ہے۔ مسئلہ 9.4 میں $a_n = \frac{1}{n}$ ، $f(x) = 2^x$ اور $L = 0$ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $2^{1/n} = f(\frac{1}{n}) \to f(L) = 2^0 = 1$ ہو گا۔ چونکہ 2 کے یک بعد دیگرے جذر، ترتیب $\{2^{1/n}\}$ کی ذیلی ترتیب $2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}, \dots$ دیتے ہیں لہٰذا یہ جذر بھی 1 کو مرتکز ہو گا (شکل 9.11)۔

قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال

اگلا مسئلہ ہمیں قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے چند ترتیبات کے حد تلاش کرنے کے قابل بناتا ہے۔

مسئلہ 9.5: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ تمام $x \geq n_0$ کے لئے معین ہے اور $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ایک ایسی ترتیب ہے کہ

تمام $n \geq n_0$ کے لئے $a_n = f(n)$ ہے۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\lim x \to \infty f(x) = L$ ہے۔ تب ہر مثبت عدد ϵ کے لئے ایسا عدد M پاتا ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$x > M \quad \implies \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

فرض کریں عدد صحیح N عدد M سے بڑا جبکہ n_0 کے برابر یا اس سے بڑا ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$n > N \quad \implies \quad a_n = f(n)$$
$$|a_n - L| = \left|f(n) - L\right| < \epsilon$$

□

مثال 9.11: دکھائیں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

حل: تفاعل $\frac{\ln x}{x}$ تمام $x \geq 1$ کے لئے معین ہے اور مثبت عدد صحیح کے لئے اس ترتیب سے اتفاق کرتا ہے۔ یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ مسئلہ 9.5 کے تحت $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (اگر موجود ہو) کے ساتھ اتفاق کرے گا۔ قاعدہ لھوپیٹال کی ایک استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ہو گا۔ □

قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ترتیب کا حد تلاش کرتے ہوئے ہم n کو استمراری حقیقی متغیر تصور کر کے اس کو n کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں $\{a_n\}$ کا کلیہ دوبارہ لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے، جیسا ہمیں مثال 9.11 میں کرنا پڑا۔

مثال 9.12: حد $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$ تلاش کریں۔

حل: قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty$$

□

جدول 9.2: عموماً پائے جانے والے حد

شمار	حد
1	$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3	$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (\lvert x\rvert < 1)$
5	$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$
6	$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

عموماً پائے جانے والے حد

جدول 9.2 میں عموماً پائے جانے والے حد دیے گئے ہیں جہاں کلیہ 3 تا 6 میں $n \to \infty$ کرتے ہوئے x مستقل رہتا ہے۔ پہلا حد مثال 9.11 سے ہے۔ اگلے دو حد تلاش کرنے کے لئے لوگارتھم لے کر مسئلہ 9.4 استعمال کریں (سوال 9.139 اور سوال 9.140)۔ باقی ثبوت ضمیمہ و میں دیے گئے ہیں۔

مثال 9.13: ایک ترتیب کا n واں جزو $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ہے۔ کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر ترتیب مرتکز ہو تب اس کا حد تلاش کریں۔

حل: حد کی تلاش نا قابل معلوم قیمت 1^∞ دیتی ہے۔ ہم a_n کا قدرتی لوگارتھم لے کر $\infty \cdot 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\ln a_n &= \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\
&= n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)
\end{aligned}$$

یوں

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \infty\cdot 0\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{قاعدہ لھوپیٹال}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2
\end{aligned}
$$

ہو گا۔ چونکہ $\ln a_n \to 2$ ہے اور $f(x) = e^x$ استمراری ہے لہٰذا مسئلہ 9.4 کے تحت $a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$ ہو گا۔ ترتیب $\{a_n\}$ عدد e^2 پر مرتکز ہے۔ □

جذر تلاش کرنے کی ترکیب پکاغ

درج ذیل مساوات

$$f(x) = 0 \tag{9.3}$$

سے مراد

$$g(x) = f(x) + x = x \tag{9.4}$$

کا حل لیا جا سکتا ہے جہاں دونوں اطراف x جمع کیا گیا ہے۔ اس معمولی تبدیلی کی بنا اس مساوات کو کمپیوٹر پر **ترکیب پکاغ**[20] سے حل[21] کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔

اگر g کے دائرہ کار میں g کا سعت بھی شامل ہو تب ہم دائرہ کار میں نقطہ x_0 سے شروع کر کے g سے یک بعد دیگرے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \quad \cdots \tag{9.5}$$

سادہ پابندیاں، جنہیں جلد پیش کیا جائے گا، لاگو کرتے ہوئے کلیہ توالی $x_{n+1} = g(x_n)$ سے حاصل ترتیب ایک ایسے نقطہ x پر مرتکز ہو گی جس پر $g(x) = x$ ہو گا۔ چونکہ اس نقطہ پر

$$f(x) = g(x) - x = x - x = 0 \tag{9.6}$$

---

[20] Picard's method

[21] فرانسیسی ریاضی دان شاغل مل پکاغ [1856-1941]

جدول 9.3: ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $g(x) = (1/4)x + 3$ کے یک بعد دیگرے نتائج۔

$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n}{4} + 3$	x_n
$x_1 = g(x_0) = (1/4)(1) + 3 = 3.25$	$x_0 = 1$
$x_2 = g(x_1) = (1/4)(3.25) + 3 = 3.8125$	$x_1 = 3.25$
$x_3 = g(x_2) = (1/4)(3.8125) + 3 = 3.953\,125$	$x_2 = 3.8125$
$x_4 = 3.988\,281\,25$	$x_3 = 3.953125$
$x_5 = 3.997\,070\,313$	$\vdots$
$x_6 = 3.999\,267\,578$	
$x_7 = 3.999\,816\,895$	
$x_8 = 3.999\,954\,224$	
$x_9 = 3.999\,988\,556$	
$x_{10} = 3.999\,997\,139$	
$\vdots$	

ہو گا لہٰذا یہ نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہو گا۔

وہ نقطہ جس پر $x = g(x)$ ہو g کا **مقررہ نقطہ**[22] کہلاتا ہے۔ہم مساوات 9.6 سے دیکھتے ہیں کہ g کے مقررہ نقطے f کے جذر ہیں۔

مثال 9.14: **ترکیب کی پرکھ** درج ذیل مساوات حل کریں۔

$$\frac{x}{4} + 3 = x$$

حل: الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ اس مساوات کا حل $x = 4$ ہے۔ ترکیب پکاغ استعمال کرتے ہوئے ہم

$$g(x) = \frac{x}{4} + 3$$

لے کر ابتدائی نقطہ، مثلاً $x_0 = 1$ منتخب کر کے ترتیب $x_{n+1} = g(x_n)$ کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ نتائج جدول 9.3 میں دیے گئے ہیں۔ دس قدموں میں حاصل جواب میں خلل 3×10^{-6} سے کم ہے۔

شکل 9.12ا میں ترکیب کی جیومیٹری دکھائی گئی ہے۔ ہم ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ سے شروع کر کے پہلی قیمت $g(x_0)$ حاصل کرتے ہیں جو x کی دوسری قیمت x_1 ہو گی۔ y کی دوسری قیمت $g(x_1)$ کو x کی تیسری قیمت x_2 لیں گے، وغیرہ، وغیرہ۔ شکل 9.12ا میں اس عمل کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے جس کو **راہ توالی**[23] کہتے ہیں۔ راہ توالی ابتدائی نقطہ x_0 سے شروع ہو کر انتصابی رخ

[22] fixed point
[23] iteration path

(ا) ترکیب پکاغ سے مساوات $g(x) = \frac{1}{4}x + 3 = x$ کا حل (مثال 9.14)۔

(ب) ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لے کر ترکیب پکاغ سے $\cos x = x$ کا حل (مثال 9.15)۔

$(x_0, g(x_0)) = (x_0, x_1)$ پہنچ کر افقی رخ (x_1, x_1) اور یہاں سے دوبارہ انتصابی رخ $(x_1, g(x_1))$ جاتی ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ یہ راہ اس نقطہ پر مرتکز ہو گی جس پر لکیر $y = x$ اور $g(x)$ ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔ یہ وہ نقطہ ہے جہاں $g(x) = x$ ہو گا۔ □

مثال 9.15: $\cos x = x$ کو حل کریں۔

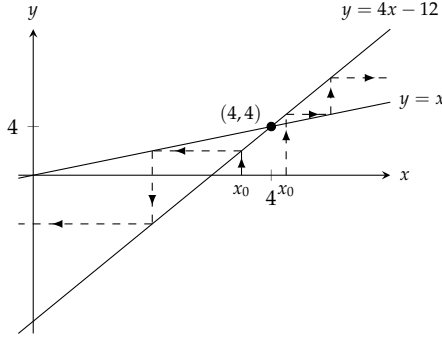
حل: ہم $g(x) = \cos x$ لے کر ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ منتخب کر کے کلیہ توالی $x_{n+1} = g(x_n)$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \cos(1), \quad x_2 = \cos(x_1), \quad \cdots$$

ہم کیلکولیٹر کو ریڈیئن طرز کارکردگی میں رکھ کر ابتدائی 50 اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ کیلکولیٹر میں 1 داخل کر کے بار بار کوسائن لینے سے یہ اجزاء حاصل ہوں گے۔ کیلکولیٹر پر دکھایا گیا عدد اس وقت تک تبدیل ہو گا جب تک $\cos x = x$ نہ ہو۔

یہ عمل خود کر کے دیکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یک بعد دیگرے جوابات مستقل نقطہ $x = 0.739085133\cdots$ سے اوپر اور نیچے پائے جائیں گے۔

شکل 9.12ب میں اس ارتعاش کی وجہ نظر آتی ہے جہاں راہ توالی درکار نقطہ کے گرد گھومتی ہے۔ □

مثال 9.16: ترکیب پکاغ سے $g(x) = 4x - 12 = x$ حل نہیں ہو گا۔

شکل 9.13: ترکیب پکاغ سے $g(x) = 4x - 12$ حل نہیں ہو گا ماسوائے جب ابتدائی نقطہ 4 منتخب کیا جائے (مثال 9.16)۔

جیسا شکل 9.13 میں دکھایا گیا ہے، ماسوائے $x_0 = 4$ کے کسی بھی ابتدائی x_0 کی انتخاب منفرج ترتیب دیتی ہے جو کبھی بھی $g(x)$ کے مقررہ نقطہ پر نہیں پہنچ پاتی ہے۔ مساوات $g(x) = 4x - 12$ کا مقررہ نقطہ $x = 4$ ہے۔ □

مثال 9.16 میں ترکیب پکاغ کی ناکامی لکیر $y = 4x - 12$ کی ڈھلوان کی بنا ہے جو لکیر $y = x$ کی ڈھلوان 1 سے زیادہ ہے۔ مثال 9.14 میں لکیر $y = \frac{1}{4}x + 3$ کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے جو 1 سے کم ہے لہٰذا ترکیب پکاغ کار آمد ثابت ہوتی ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر بند وقفہ I پر مساوات $g(x) = x$ کا حل پایا جاتا ہو اور اس وقفہ پر $g'(x)$ استمراری اور $\left|g'(x)\right| < 1$ ہو، تب I کی اندرون پر کسی بھی نقطہ x_0 سے شروع کرتے ہوئے ترکیب پکاغ مساوات کا حل دے گی۔ (سوال 9.151 اور سوال 9.152 سے پہلے دیکھیں جہاں $\left|g'(x)\right| > 1$ کی صورت میں درکار اقدام بتائے گئے ہیں۔)

سوالات

حد کی تلاش

سوال 9.69 تا سوال 9.130 میں کون سی ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز اور کون سی منفرج ہے؟ ہر مرتکز ترتیب کا حد تلاش کریں۔

سوال 9.69: $a_n = 2 + (0.1)^n$
جواب: مرتکز، 2

سوال 9.70: $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

سوال 9.71: $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$
جواب: مرتکز، -1

سوال 9.72: $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

سوال 9.73: $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$
جواب: مرتکز، -5

سوال 9.74: $a_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

سوال 9.75: $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$
جواب: منفرج

سوال 9.76: $a_n = \frac{1-n^3}{70-4n^2}$

سوال 9.77: $a_n = 1 + (-1)^n$
جواب: منفرج

سوال 9.78: $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$

سوال 9.79: $a_n = (\frac{n+1}{2n})(1 - \frac{1}{n})$
جواب: مرتکز، $\frac{1}{2}$

سوال 9.80: $a_n = (2 - \frac{1}{2^n})(3 + \frac{1}{2^n})$

سوال 9.81: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.82: $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

سوال 9.83: $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$
جواب: مرتکز، $\sqrt{2}$

سوال 9.84: $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$

سوال 9.85: $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})$
جواب: مرتکز، 1

سوال 9.86: $a_n = n\pi\cos(n\pi)$

سوال 9.87: $a_n = \frac{\sin n}{n}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.88: $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$

سوال 9.89: $a_n = \frac{n}{2^n}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.90: $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

سوال 9.91: $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.92: $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$

سوال 9.93: $a_n = 8^{1/n}$
جواب: مرتکز، 1

سوال 9.94: $a_n = (0.03)^{1/n}$

سوال 9.95: $a_n = (1 + \frac{7}{n})^n$
جواب: مرتکز، e^7

سوال 9.96: $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$

سوال 9.97: $a_n = \sqrt[n]{10n}$
جواب: مرتکز، 1

سوال 9.98: $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

سوال 9.99: $a_n = (\frac{3}{n})^{1/n}$
جواب: مرتکز، 1

سوال 9.100: $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

سوال 9.101: $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$
جواب: منفرج

سوال 9.102: $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

سوال 9.103: $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$
جواب: مرتکز، 4

سوال 9.104: $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

سوال 9.105: $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (اشارہ: $\frac{1}{n}$ کے ساتھ موازنہ کریں)
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.106: $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

سوال 9.107: $a_n = \frac{n!}{10^{6n}}$
جواب: منفرج

سوال 9.108: $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

سوال 9.109: $a_n = (\frac{1}{n})^{1/(\ln n)}$
جواب: مرتکز، e^{-1}

سوال 9.110: $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})^n$

سوال 9.111: $a_n = (\frac{3n+1}{3n-1})^n$
جواب: مرتکز، $e^{2/3}$

سوال 9.112: $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$

سوال 9.113: $a_n = (\frac{x^n}{2n+1})^{1/n}, \quad x > 0$
جواب: مرتکز، x ، $(x > 0)$

سوال 9.114: $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$

سوال 9.115: $a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.116: $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

سوال 9.117: $a_n = \tanh n$
جواب: مرتکز، 1

سوال 9.118: $a_n = \sinh(\ln n)$

سوال 9.119: $a_n = \frac{n^2}{2n-1} \sin \frac{1}{n}$
جواب: مرتکز، $\frac{1}{2}$

سوال 9.120: $a_n = n(1 - \cos \frac{1}{n})$

سوال 9.121: $a_n = \tan^{-1} n$
جواب: مرتکز، $\frac{\pi}{2}$

سوال 9.122: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

سوال 9.123: $a_n = (\frac{1}{3})^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.124: $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

سوال 9.125: $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.126: $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

سوال 9.127: $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$
جواب: مرتکز، $\frac{1}{2}$

سوال 9.128: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}}$

سوال 9.129: $a_n = \frac{1}{n} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}$
جواب: مرتکز، 0

سوال 9.130: $a_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad p > 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.131: ایک ترتیب کا پہلا جزو $x_1 = 1$ ہے۔ ہر اگلا جزو گزشتہ تمام اجزاء کا مجموعہ ہے:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

ابتدائی چند اجزاء لکھ کر عمومی جزو x_n کا کلیہ $n \geq 2$ کے لئے تلاش کریں۔
جواب: $x_n = 2^{n-2}$

سوال 9.132: ناطق اعداد کی درج ذیل ترتیب میں نسب نما ایک ترتیب، شمار کنندہ دوسری ترتیب اور ان کی نسبت تیسری ترتیب ہے۔

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \dots$$

x_n اور y_n کو بالترتیب n ویں نسبت $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ کا نسب نما اور شمار کنندہ تصور کریں۔

ا. $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$ اور $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ کی تصدیق کریں۔ ساتھ ہی $a^2 - 2b^2 = \mp 1$ کی صورت میں $(a+2b)^2 - 2(a+b)^2 = \pm 1$ کی تصدیق کریں۔

ب. n بڑھانے سے کسر $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد کیا ہے؟ (اشارہ: جزو-ا استعمال کرتے ہوئے $r_n^2 - 2 = \pm(\frac{1}{y_n})^2$ دکھائیں اور دکھائیں کہ $y_n \geq n$ ہے۔)

سوال 9.133: **ترکیب نیوٹن**
ترکیب نیوٹن درج ذیل کلیہ توالی دیتا ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر مرتکز ہے تب کس حد کو مرتکز ہے؟ تفاعل f پہچانیں جو درج ذیل ترتیب دیتا ہے۔

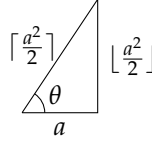
(الف) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$

(ب) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$

(ج) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1$

جواب: (الف) $1.414213562 \approx \sqrt{2}$, $f(x) = x^2 - 2$ ، (ب) $0.7853981635 \approx \frac{\pi}{4}$, $f(x) = \tan(x) - 1$ ، (ج) $f(x) = e^x$ ، منفرج

سوال 9.134: (الف) فرض کریں وقفہ $[0,1]$ میں تمام x پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور $f(0) = 0$ ہے۔ ترتیب $\{a_n\}$ کی تعریف $a_n = nf(\frac{1}{n})$ ہے۔ دکھائیں کہ $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$ ہو گا۔

جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جزو-ب تا جزو-د میں دیے ترتیبات کے حد تلاش کریں۔ (ب) $a_n = n \tan^{-1} \frac{1}{n}$ ، (ج) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$ ، (د) $a_n = n \ln(1 + \frac{2}{n})$

شکل 9.14: فیثاغوری تین کی جوڑی (سوال 9.135)

سوال 9.135: تین کی فیثاغوری جوڑی
اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ہو تب a ، b اور c کو تین کی فیثاغوری جوڑی کہتے ہیں۔ فرض کریں a ایک طاق مثبت عدد صحیح جبکہ

$$b = \lfloor \frac{a^2}{2} \rfloor^2 \quad \text{اور} \quad c = \lceil \frac{a^2}{2} \rceil$$

بالترتیب $\frac{a^2}{2}$ کے عدد صحیح زمین اور عدد صحیح چھت تفاعل ہیں۔

ا. دکھائیں $a^2 + b^2 = c^2$ (اشارہ: $a = 2n+1$ لے کر b اور c کو n کی صورت میں لکھیں۔)

ب. بلا واسطہ حساب سے یا شکل 9.14 کی مدد سے $\lim_{a\to\infty} \frac{\lfloor a^2/2 \rfloor}{\lceil a^2/2 \rceil}$ تلاش کریں۔

جواب: (ب) 1

سوال 9.136: $n!$ کا n واں جذر

ا. دکھائیں کہ $\lim_{a\to\infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ ہے اور تخمین سٹرلنگ (مساوات 8.32) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ n کی بڑی قیمتوں کے لئے $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$ ہو گا۔

ب. جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر نتائج دے سکتا ہے وہاں تک $n = 40, 50, 60, \cdots$ کے لئے کیلکولیٹر سے حاصل $\sqrt[n]{n!}$ کے نتائج کا جزو-الف کے کلیہ سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 9.137: (ا) فرض کریں کسی بھی مثبت مستقل c کے لئے $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^c}) = 0$ ہے۔ دکھائیں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$ ہو گا۔ (ب) کسی بھی مثبت مستقل c کے لئے ثابت کریں کہ $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^c}) = 0$ ہو گا۔ (اشارہ: اگر $\epsilon = 0.001$ اور $c = 0.04$ ہوں تب $n > N$ کی صورت میں $\left| \frac{1}{n^c} - 0 \right| < \epsilon$ کے لئے N کتنا بڑا ہونا چاہیے؟)

سوال 9.138: اگر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ دونوں L پر مرتکز ہوں تب دکھائیں کہ ترتیب $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ بھی L پر مرتکز ہو گی۔

سوال 9.139: ثابت کریں $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

سوال 9.140: ثابت کریں $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ جہاں $x > 0$ ہے۔

سوال 9.141: ثابت کریں مسئلہ 9.3

سوال 9.142: ثابت کریں مسئلہ 9.4

ترکیب پکاغ

سوال 9.143 تا سوال 9.148 میں دیے گئے مساوات کو ترکیب پکاغ سے حل کریں۔

سوال 9.143: $\sqrt{x} = x$
جواب: 1

سوال 9.144: $x^2 = x$

سوال 9.145: $\cos x + x = 0$
جواب: -0.73908456

سوال 9.146: $\cos x = x + 1$

سوال 9.147: $x - \sin x = 0.1$
جواب: 0.853748068

سوال 9.148: $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{1+x}$ (اشارہ: پہلے دونوں اطراف کا مربع لیں۔)

سوال 9.149: ترکیب پکاغ سے $x = \sqrt{x}$ کا حل $x = 1$ تلاش کریں جبکہ اس کے حل $x = 0$ اس ترکیب سے تلاش مت کریں۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = \sqrt{x}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

سوال 9.150: ترکیب پکاغ میں $|x_0| \neq 1$ لے کر $x^2 = x$ کا حل $x = 0$ تلاش کیا جا سکتا ہے جبکہ اس کے حل $x = 1$ اس ترکیب سے تلاش نہیں کیا جا سکتا ہے۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = x^2$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

اکائی سے زیادہ ڈھلوان

ہم نے مثال 9.16 میں دیکھا کہ $g(x) = 4x - 12$ کے مقررہ نقطہ کو ترکیب پکاغ سے حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے جبکہ $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 3$ کا مقررہ نقطہ ترکیب پکاغ سے حاصل کیا جا سکتا ہے چونکہ کسی بھی وقفہ پر g^{-1} کے تفرق کی مطلق مقدار $\frac{1}{4}$ ہے جو 1 سے کم ہے۔ مثال 9.14 میں ہم نے دیکھا کہ g^{-1} کا مقررہ نقطہ $x = 4$ ہے جو $g(4) = 4(4) - 12 = 4$ کی بنا g کا بھی مقررہ نقطہ ہے۔ یوں g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کرتے ہوئے ہم نے g کا مقررہ نقطہ بھی تلاش کیا۔

ایک تفاعل اور اس کے الٹ کے مقررہ نقطے ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔ ایک تفاعل اور اس کے الٹ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہوتے ہیں لہٰذا اس لکیر کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہیں۔

ہم اب دیکھتے ہیں کہ ترکیب پکاغ کا استعمال وسیع ہے۔ اب فرض کریں g ایک ایک ہے اور اس کا پہلا تفرق استمراری ہے جس کی قیمت کسی ایسے بند وقفہ I پر 1 سے زیادہ ہے جس پر g کا مقررہ نقطہ پایا جاتا ہے۔ یوں g^{-1} کا تفرق جو g' کا بالعکس متناسب ہو گا، کی مقدار I پر 1 سے کم ہو گی۔ ترکیب پکاغ سے I پر g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کیا جا سکتا ہے جو g کا بھی مقررہ نقطہ ہو گا۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر ترکیب پکاغ سے سوال 9.151 اور سوال 9.152 میں مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال 9.151: $g(x) = 2x + 3$
جواب: -3

سوال 9.152: $g(x) = 1 - 4x$

9.3 لامتناہی تسلسل

سائنس اور ریاضیات میں تفاعل کو عموماً درج ذیل صورت کی لامتناہی کثیر رکنی کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

x کی کسی بھی جائز قیمت کے لئے ہم لامتناہی تعداد کے مستقلوں کا مجموعہ، جس کو لامتناہی تسلسل کہا جاتا ہے، لے کر کثیر رکنی کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ اس حصہ اور اگلے چار حصوں میں ہم لامتناہی تسلسل سے واقف ہونے کی کوشش کرتے ہیں۔

تسلسل اور جزوی مجموعے

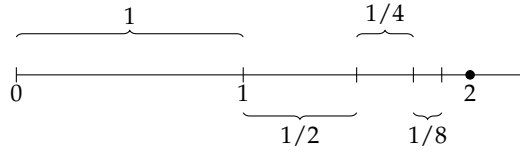
ہم پوچھتے ہیں کہ درج ذیل فقرے کا کیا مطلب ہے؟

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

چونکہ ہم لامتناہی مستقلوں کو کبھی بھی جمع نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا ہم پہلی جزو سے شروع کر کے بتدریج ایک ایک جزو ساتھ جمع کر کے جزوی مجموعہ میں کسی نقش کو پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔انہیں جدول 9.4 میں دکھایا گیا ہے جن میں یقیناً ایک نقش پایا جاتا ہے۔ جزوی مجموعوں کی ترتیب کا n واں جزو درج ذیل ہے۔

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

جدول 9.4: تفاعل کے جزوی مجموعے۔

جزوی مجموعہ		قیمت
پہلا:	$s_1 = 1$	$2-1$
دوسرا:	$s_2 = 1+\frac{1}{2}$	$2-\frac{1}{2}$
تیسرا:	$s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$2-\frac{1}{4}$
$\vdots$		
n واں:	$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$	$2-\frac{1}{2^{n-1}}$

شکل 9.15: جیسے جیسے لمبائیاں 1 ، $1/2$ ، $1/4$ ، $1/8$ ، $\cdots$ جمع کی جائیں، مجموعہ 2 کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔

چونکہ $\lim_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$ ہے لہٰذا اس ترتیب کا حد 2 ہے۔یوں درج ذیل لامتناہی تسلسل کا مجموعہ 2 ہو گا۔

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

کیا اس تسلسل کے کسی بھی متناہی تعداد کے اجزاء کا مجموعہ 2 ہو گا؟ نہیں۔ کیا ہم لامتناہی تعداد کے مستقل کو ایک ایک کر کے جمع کر سکتے ہیں؟ نہیں۔ اس کے باوجود ہم تسلسل کے حد کی تعریف کو $n\to\infty$ پر تسلسل کے جزوی مجموعے کا حد لے سکتے ہیں جو مذکورہ بالا تسلسل کے لئے 2 ہو گا (شکل 9.15)۔ ترتیب اور تسلسل کا علم ہمیں متناہی مجموعوں کی قید سے آزاد کرتا ہے۔

تعریف: دیے گئے اعداد کی ترتیب $\{a_n\}$ کی صورت میں درج ذیل صورت کا فقرہ **لامتناہی تسلسل**[24] کہلاتا ہے۔

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

[24] infinite series

عدد a_n کو اس تسلسل کا n **واں جزو**[25] کہتے ہیں۔ ترتیب $\{s_n\}$ جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

کو اس تسلسل کے **جزوی مجموعوں کی ترتیب** کہتے ہیں اور s_n کو n واں جزوی مجموعہ کہتے ہیں۔ اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب L پر مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ تسلسل **مرتکز** ہے اور اس کا مجموعہ L ہے۔ایسی صورت میں ہم درج ذیل بھی لکھتے ہیں۔

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_n = L$$

اگر تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل **منفرج** ہے۔

□

تسلسل $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ پر غور کرنے سے پہلے ضروری نہیں کہ ہمیں معلوم ہو کہ آیا یہ تسلسل مرتکز یا منفرج ہے۔ بہر حال اس تسلسل کو درج ذیل صورت میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum a_n \ (\text{مجموعہ } 1 \text{ تا } \infty \text{ ہو گا})$$

ہندسی تسلسل

درج ذیل صورت کے تسلسل کو **ہندسی تسلسل**[26] کہتے ہیں جہاں a اور r مقررہ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \tag{9.7}$$

---

[25] nth term
[26] geometric series

درج ذیل میں نسبت r مثبت ہے

$$a+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\cdots$$

جبکہ درج ذیل میں r منفی ہے۔

$$a-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\cdots+\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-1}+\cdots$$

اگر $r=1$ ہو تب مساوات 9.7 کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n=a+a(1)+a(1)^2+\cdots+a(1)^{n-1}=na$$

ہو گا جو $\lim_{n\to\infty} s_n=\mp\infty$ کی بنا منفرج ہے جہاں علامت، a کی علامت پر منحصر ہو گی۔ اگر $r=-1$ ہو تب تسلسل کے جزوی مجموعے یک بعد دیگرے a اور 0 ہوں گے لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا۔ اگر $|r|\neq 1$ تب تسلسل کا ارتکاز یا انفراج درج ذیل طریقہ سے جاننا ممکن ہو گا۔

$$\begin{aligned}
s_n&=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}\\
rs_n&=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n && s_n \text{ کو } r \text{ سے ضرب دیں}\\
s_n-rs_n&=a-ar^n && s_n \text{ سے } rs_n \text{ منفی کریں}\\
s_n(1-r)&=a(1-r^n) && \text{تجزی}\\
s_n&=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad (r\neq 1) && r\neq 1 \text{ کی صورت میں } s_n \text{ کا حل}
\end{aligned}$$

اگر $|r|<1$ ہو تب $n\to\infty$ سے $r^n\to 0$ (حصہ 9.2) لہٰذا $s_n=\frac{a}{1-r}$ ہوں گے۔ اس کے برعکس $|r|>1$ کی صورت میں $|r^n|\to\infty$ کی بنا تسلسل منفرج ہو گا۔

یوں $|r|<1$ کی صورت میں ہندسی تسلسل $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$ عدد $\frac{a}{1-r}$ پر مرتکز ہو گا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r},\quad |r|<1 \tag{9.8}$$

$|r|>1$ کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔ مساوات 9.8 صرف اس صورت درست ہو گا جب مجموعہ $n=1$ سے شروع ہو۔

مثال 9.17: درج ذیل ہندسی تسلسل میں $a=\frac{1}{9}$ اور $r=\frac{1}{3}$ ہیں۔

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}=\frac{1/9}{1-(1/3)}=\frac{1}{6}$$

□

مثال 9.18: درج ذیل ہندسی تسلسل میں $a = -\frac{5}{4}$ اور $r = -\frac{1}{4}$ ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots$$

یہ ہندسی تسلسل -1 پر مرتکز ہے۔

$$\frac{a}{1-r} = \frac{-5/4}{1+(1/4)} = -1$$

□

مثال 9.19: آپ ایک گیند کو افقی سطح پر a میٹر بلندی سے گراتے ہیں۔ یہ گیند h بلندی سے گر کر rh بلندی تک اچھلتا ہے جہاں r مثبت اور 1 سے کم ہے۔ یہ گیند اوپر اور نیچے سفر کرتے ہوئے کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

حل: کل فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\,\frac{1+r}{1-r}$$

یوں $a = 6\,\text{m}$ اور $r = \frac{2}{3}$ کی صورت میں طے شدہ فاصل درج ذیل ہو گا۔

$$s = 6\,\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\Big(\frac{5/3}{1/3}\Big) = 30\,\text{m}$$

□

مثال 9.20: دہراتے اعشاری
دہراتے اعشاری $5.23\,23\,23\cdots$ کو دو عدد صحیح کا نسبت لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned}
5.23\,23\,23\cdots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\
&= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a = 1,\ r = \tfrac{1}{100} \\
&= 5 + \frac{23}{100}\Big(\frac{1}{0.99}\Big) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}
\end{aligned}$$

□

دوربینی تسلسل

مرتکز ہندسی تسلسل کے مجموعہ کے کلیہ کی طرح تسلسل کے مجموعوں کے کلیات بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں تسلسل کے مجموعہ کی اندازاً قیمت پر گزارا کرنا ہو گا۔البتہ اگلی مثال میں بھی ایسا تسلسل دیا گیا ہے جس کا بالکل ٹھیک مجموعہ تلاش کیا جا سکتا ہے۔

مثال 9.21: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔

حل: جزوی مجموعوں کی ترتیب میں ایسا نقش دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں جس سے s_n کا کلیہ اخذ کیا جا سکتا ہو۔ہم جزوی کسر

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{9.9}$$

استعمال کر کے جزوی مجموعہ

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

کو

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \tag{9.10}$$

لکھتے ہیں۔قوسین کھول کر یکساں اجزاء کاٹ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$s_n = 1 - \frac{1}{k+1} \tag{9.11}$$

اب $k \to \infty$ سے $s_k \to 1$ حاصل ہو گا۔ یہ تسلسل منفرج ہے اور اس کا مجموعہ 1 ہے (شکل 9.16)۔

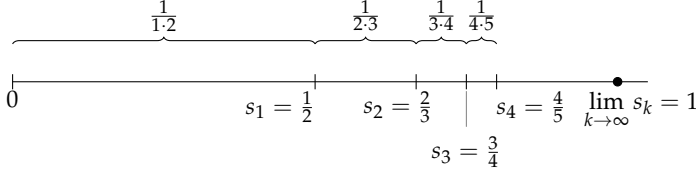
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

□

منفرج تسلسل

وہ ہندسی تسلسل جن میں $|r| \geq 1$ ہو کے علاوہ دیگر منفرج تسلسل بھی پائے جاتے ہیں۔

مثال 9.22: درج ذیل تسلسل اس لئے منفرج ہے کہ اس کے جزوی مجموعے کسی بھی عدد L سے بڑھ جاتے ہیں۔ جزوی مجموعہ $s_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ کی قیمت $n = 1$ کے بعد n^2 سے بڑی ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

شکل 9.16: جزوی مجموعے (مثال 9.21)

□

مثال 9.23: درج ذیل تسلسل کے جزوی مجموعے آخر کار ہر منتخب عدد سے بڑھ جاتے ہیں لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہے۔چونکہ ہر جزو 1 سے بڑا ہے لہٰذا n اجزاء کا مجموعہ n سے بڑا ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{1} + \cdots$$

□

انفراج کا n واں جزو پرکھ

تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ صرف اس صورت مرتکز ہو سکتا ہے جب $\lim_{n\to\infty} a_n$ صفر کے برابر ہو۔اس حقیقت کو سمجھنے کی خاطر فرض کریں تسلسل کا مجموعہ S ہے اور اس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔جب n بڑا ہو تب s_n اور s_{n-1} دونوں S کے بہت قریب ہوں گے لہٰذا ان کا فرق a_n بھی صفر کے قریب ہو گا۔ باضابطہ طور اس کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \to \quad S - S = 0 \qquad \text{قاعدہ فرق برائے ترتیبات}$$

مسئلہ 9.6: اگر $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب $a_n \to 0$ ہو گا۔

دھیان رہے کہ مسئلہ 9.6 یہ نہیں کہتا ہے کہ $a_n \to 0$ کی صورت میں $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ہو گا۔ عین ممکن ہے کہ $n \to 0$ ہو اور تسلسل تب بھی منفرج ہو۔

n واں جزو پرکھ انفراج

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n$ غیر موجود ہو یا صفر سے ہٹ کر ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ منفرج ہو گا۔

□

مثال 9.24: n ویں جزو کا پرکھ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

ا. $n^2 \to \infty$ کی بنا $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ منفرج ہو گا۔

ب. $\frac{n+1}{n} \to 1$ کی بنا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ منفرج ہو گا۔

ج. چونکہ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ غیر موجود ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ منفرج ہو گا۔

د. چونکہ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$ (صفر نہیں ہے) لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ منفرج ہو گا۔

□

مثال 9.25: اگرچہ $a_n \to 0$ ہے لیکن درج ذیل تسلسل منفرج ہے۔ اس تسلسل کے اجزاء ایسی ترتیب دیتے ہیں جو 0 پر منفرج ہے لیکن تسلسل منفرج ہے۔

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{اجزاء } 2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{اجزاء } 4} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{اجزاء } 2^n} + \cdots$$

□

تسلسل کا ملاپ

ہم دو منفرج تسلسل کو جزو در جزو جمع کر کے یا جزو در جزو ایک دوسرے سے منفی کر کے یا انہیں مستقل سے ضرب کرتے ہوئے نئے منفرج تسلسل حاصل کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 9.7: اگر $\sum a_n = A$ اور $\sum b_n = B$ منفرج تسلسل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

قاعدہ فرق: $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum k a_n = k \sum a_n = kA$ (کوئی بھی عدد k)

ثبوت: یہ تین قواعد حصہ 9.2 میں مسئلہ 9.2 میں دیے گئے ترتیبات کے مماثل قواعد سے حاصل ہوتے ہیں۔ تسلسل کے لئے قاعدہ مجموعہ ثابت کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

اب $\sum(a_n + b_n)$ کے جزوی مجموعے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

چونکہ $A_n \to A$ اور $B_n \to B$ ہیں لہٰذا قاعدہ مجموعہ برائے ترتیبات کے تحت $S_n \to A + B$ ہو گا۔ قاعدہ فرق کا ثبوت بھی اسی طرح کا ہے۔

تسلسل کے لئے قاعدہ ضرب مستقل ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ $\sum k a_n$ کے جزوی مجموعے درج ذیل ترتیب دیتے ہیں

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n$$

جو قاعدہ مستقل مضرب برائے ترتیبات کے تحت kA کو مرتکز ہو گا۔

□

مسئلہ 9.7 کے دو ضمنی نتائج درج ذیل ہیں۔

ا. منفرج تسلسل کو کسی بھی غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے منفرج تسلسل حاصل ہو گا۔

ب. اگر $\sum a_n$ مرتکز اور $\sum b_n$ منفرج ہوں تب $\sum(a_n + b_n)$ اور $\sum(a_n - b_n)$ دونوں منفرج ہوں گے۔

ہم ان کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

مثال 9.26:

(الف)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^{n-1}} && \text{قاعدہ فرق} \\
&= \frac{1}{1-(1/2)} - \frac{1}{1-(1/6)} && \text{ہندسی تسلسل میں } a=1 \text{ اور } r=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6} \text{ ہیں} \\
&= 2 - \frac{6}{5} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^{n-1}} &= 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} && \text{قاعدہ ضرب مستقل} \\
&= 4\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) && \text{ہندسی تسلسل میں } a=1 \text{ اور } r=\tfrac{1}{2} \text{ ہیں} \\
&= 8
\end{aligned}$$

□

اجزاء کی شمولیت یا کٹوتی

تسلسل میں متناہی تعداد کے اجزاء شامل کرنے سے یا تسلسل سے متناہی تعداد کے اجزاء کی کٹوتی کرنے سے تسلسل کی ارتکاز یا انفراج پر کوئی اثر نہیں ہوتا ہے البتہ منفرج تسلسل کی قیمت عموماً تبدیل ہو گی۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب کسی بھی $k > 1$ کے لئے $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ مزید درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \tag{9.12}$$

سی طرح اگر کسی بھی k کے لئے $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} \tag{9.13}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}\right) - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125} \tag{9.14}$$

اشاریہ کی ترتیب نو

جب تک کسی تسلسل کے اجزاء کا نظم تبدیل نہ کیا جائے ہم ارتکاز تبدیل کیے بغیر تسلسل کے اشاریہ کی ترتیب نو کر سکتے ہیں۔ اشاریہ کی ابتدائی قیمت کو h اکائیاں بلند کرنے کے لئے ہم a_n میں n کی جگہ $n-h$ لکھیں گے:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

اشاریہ کی ابتدائی قیمت کو h اکائیاں نیچے کرنے کے لئے ہم a_n میں n کی جگہ $n+h$ لکھیں گے:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

یہ افقی منتقل کے مترادف ہے۔

مثال 9.27: ہم ہندسی تسلسل

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

تسلسل کی قیمت پر اشاریہ کے انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ □

ہم اس اشاریہ کو ترجیح دیتے ہیں جو سادہ فقرے دیتا ہو۔

سوالات

n ویں جزوی مجموعہ کی تلاش

سوال 9.153 تا سوال 9.158 میں دیے تسلسل کے n ویں جزوی مجموعہ کا کلیہ تلاش کریں۔اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے تسلسل (اگر مرتکز ہو) کا مجموعہ حاصل کریں۔

سوال 9.153: $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

جواب: $3, \quad s_n = \frac{2(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}$

سوال 9.154: $\frac{9}{100}+\frac{9}{100^2}+\frac{9}{100^3}+\cdots+\frac{9}{100^n}+\cdots$

سوال 9.155: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$
جواب: $\frac{2}{3},\quad s_n=\frac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)}$

سوال 9.156: $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

سوال 9.157: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$
جواب: $\frac{1}{2},\quad s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

سوال 9.158: $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$

ہندسی اجزاء والے تسلسل

سوال 9.159 تا سوال 9.166 میں تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء لکھنے کے بعد تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال 9.159: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$
جواب: $\frac{4}{5},\quad 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots$

سوال 9.160: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

سوال 9.161: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$
جواب: $\frac{7}{3},\quad \frac{7}{4}+\frac{7}{16}+\frac{7}{64}+\cdots$

سوال 9.162: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

سوال 9.163: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$
جواب: $\frac{23}{2},\quad (5+1)+(\frac{5}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{5}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{5}{8}+\frac{1}{27})+\cdots$

سوال 9.164: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

سوال 9.165: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

جواب: $(1+1)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{25})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{125})+\cdots \quad \frac{17}{6},$

سوال 9.166: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

دوربینی تسلسل

سوال 9.167 تا سوال 9.174 میں جزوی کسر استعمال کرتے ہوئے تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال 9.167: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

جواب: 1

سوال 9.168: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

سوال 9.169: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

جواب: 5

سوال 9.170: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

سوال 9.171: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

جواب: مرتکز، 1

سوال 9.172: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{1/n}}-\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

سوال 9.173: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln(n+2)}-\frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

جواب: مرتکز، $-\frac{1}{\ln 2}$

سوال 9.174: $\sum_{n=1}^{\infty}(\tan^{-1}(n)-\tan^{-1}(n+1))$

ارتکاز اور انفراج

سوال 9.175 تا سوال 9.192 میں سے کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ مرتکز تسلسل کے مجموعے تلاش کریں۔

سوال 9.175: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

جواب: مرتکز، $2+\sqrt{2}$

سوال 9.176: $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n$

سوال 9.177: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

جواب: مرتکز، 1

سوال 9.178: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$

سوال 9.179: $\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\pi$

جواب: منفرج

سوال 9.180: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{5^n}$

سوال 9.181: $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2n}$

جواب: مرتکز، $\frac{e^2}{e^2-1}$

سوال 9.182: $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1}{n}$

سوال 9.183: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{10^n}$

جواب: مرتکز، $\frac{2}{9}$

سوال 9.184: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x^n},\quad |x|>1$

سوال 9.185: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

جواب: مرتکز، $\frac{3}{2}$

سوال 9.186: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

سوال 9.187: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

جواب: منفرج

سوال 9.188: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

سوال 9.189: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

جواب: منفرج

سوال 9.190: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

سوال 9.191: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

جواب: مرتکز، $\frac{\pi}{\pi-e}$

سوال 9.192: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

ہندسی تسلسل

سوال 9.193 تا سوال 9.196 میں ہندسی تسلسل دیے گئے ہیں۔ تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھ کر a اور r تلاش کر کے تسلسل کو مجموعہ معلوم کریں۔ اس کے بعد عدم مساوات $|r| < 1$ کو x کی صورت میں لکھ کر x کی وہ قیمت دریافت کریں جو عدم مساوات کو مطمئن کرتی ہو اور جس کے لئے تسلسل مرتکز ہو۔

سوال 9.193: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

جواب: $a=1,\ r=-x$ $\quad |x|<1$ کے لئے $\frac{1}{1+x}$ پر مرتکز۔

سوال 9.194: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

سوال 9.195: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

جواب: $a=3,\ r=\frac{x-1}{2}$ $(-1,3)$ میں x کے لئے $\frac{6}{3-x}$ پر مرتکز۔

سوال 9.196: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

سوال 9.197 تا سوال 9.202 میں x کی وہ قیمتیں معلوم کریں جن کے لئے دیا گیا ہندسی تسلسل مرتکز ہو۔ x کی ان قیمتوں کے لئے تسلسل کے مجموعہ کو x کی صورت میں لکھیں۔

سوال 9.197: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

جواب: $|x|<\frac{1}{2},\ \frac{1}{1-2x}$

سوال 9.198: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

سوال 9.199: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

جواب: $-2<x<0,\ \frac{1}{2+x}$

سوال 9.200: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

سوال 9.201: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

جواب: $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ جہاں k عدد صحیح ہے؛ $\frac{1}{1-\sin x}$

سوال 9.202: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

سوال 9.203 تا سوال 9.210 میں دیے عدد کو دو عدد صحیح کا نسبت لکھیں۔

سوال 9.203: $0.\overline{23}=0.23\ 23\ 23\ \cdots$

جواب: $\frac{23}{99}$

سوال 9.204: $0.\overline{234}=0.234\ 234\ 234\ \cdots$

سوال 9.205: $0.\overline{7} = 0.7777\cdots$
جواب: $\frac{7}{9}$

سوال 9.206: $0.\overline{d} = 0.dddd\cdots$ جہاں d ایک ہندسہ ہے۔

سوال 9.207: $0.0\overline{6} = 0.06666\cdots$
جواب: $\frac{1}{15}$

سوال 9.208: $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ \cdots$

سوال 9.209: $1.24\overline{123}\ 123\ 123\ \cdots$
جواب: $\frac{41251}{33300}$

سوال 9.210: $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\ 142857\ \cdots$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.211: ہم سوال 9.157 کے تسلسل کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{اور} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

اس تسلسل کو یوں لکھیں کہ اس کا پہلا جزو (الف) $n = -2$، (ب) $n = 0$، (ج) $n = 5$ سے شروع ہوتا ہو۔
جواب: (الف) $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$، (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$، (ج) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

سوال 9.212: ہم سوال 9.158 کے تسلسل کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}$$

اس تسلسل کو یوں لکھیں کہ اس کا پہلا جزو (الف) $n = -1$، (ب) $n = 3$، (ج) $n = 20$ سے شروع ہوتا ہو۔

سوال 9.213: غیر صفر اجزاء کا ایسا لامتناہی تسلسل لکھیں جس کے مجموعہ (الف) 1، (ب) -3، (ج) 0 ہو۔ کیا آپ غیر صفر اجزاء پر مبنی کسی بھی عدد پر مرتکز تسلسل لکھ سکتے ہیں؟ تفصیل پیش کریں۔
جواب: (الف) جواب مختلف ہو سکتے ہیں، (ب) جواب مختلف ہو سکتے ہیں، (ج) جواب مختلف ہو سکتے ہیں۔

سوال 9.214: دو ایسے لامتناہی منفرج تسلسل بنائیں جن کا جزو در جزو مجموعہ مرتکز ہو۔

سوال 9.215: ایسی مثال پیش کریں جہاں $\sum \frac{a_n}{b_n}$ منفرج ہو اگرچہ $\sum a_n$ اور $\sum b_n$ دونوں مرتکز ہوں جہاں کوئی b_n بھی صفر نہیں ہے۔

سوال 9.216: ایسے ہندسی تسلسل $A = \sum a_n$ اور $B = \sum b_n$ تلاش کریں کہ $\sum a_n b_n$ منفرج ہو لیکن AB کے برابر نہ ہو۔

سوال 9.217: ایسی مثال دیں جہاں $\sum \frac{a_n}{b_n}$ کسی عدد، جو $\frac{A}{B}$ نہیں ہو، پر مرتکز ہو اگرچہ $A = \sum a_n$ ، $B = \sum b_n \neq 0$ ہوں اور کوئی b_n بھی 0 نہ ہو۔

سوال 9.218: اگر $\sum a_n$ مرتکز ہو اور تمام n کے لئے $a_n > 0$ ہو تب کیا $\sum \frac{1}{a_n}$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.219: ایک منفرج تسلسل کے ساتھ متناہی تعداد کے اجزاء شامل کرنے یا کٹوتی کرنے سے کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.220: اگر $\sum a_n$ مرتکز اور $\sum b_n$ منفرج ہو تب ان کے جزو در جزو مجموعہ $\sum(a_n + b_n)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.221: ایسا ہندسی تسلسل $\sum ar^{n-1}$ بنائیں جو 5 پر مرتکز ہو اور جہاں (الف) $a = 2$ ، (ب) $a = \frac{13}{2}$ ہو۔
جواب: (الف) $r = \frac{3}{5}$ ، (ب) $r = -\frac{3}{10}$

سوال 9.222: b کی وہ قیمت دریافت کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہو۔

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9$$

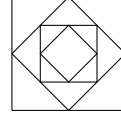
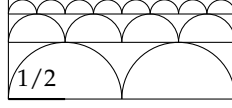
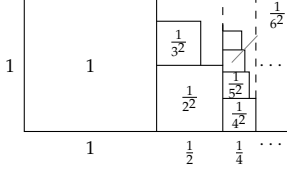
سوال 9.223: r کی کس قیمت کے لئے درج ذیل لامتناہی تسلسل مرتکز ہے؟ مرتکز تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots$$

جواب: $|r| < 1,\ \frac{1+2r}{1-r^2}$

سوال 9.224: دکھائیں کہ ایک مرتکز ہندسی تسلسل کی جگہ اس کا جزوی مجموعہ s_n استعمال کرنے سے پیدا خلل $L - s_n$ کی قیمت $\frac{ar^n}{1-r}$ ہو گی۔

سوال 9.225: ایک گیند کو $4\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرایا جاتا ہے۔ ہر بار h کی بلندی سے گر کر یہ گیند اچھل کر $0.75h$ بلند تک واپس پہنچتا ہے۔ یہ گیند کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟
جواب: $28\,\mathrm{m}$

شکل 9.19: رقبوں کا مجموعہ 2 سے کم ہے (سوال 9.230)

شکل 9.18: نصف دائروں کی قطاریں (سوال 9.228)

شکل 9.17: چکور کے اندر چکور (سوال 9.227)

سوال 9.226: ایک گیند کو $4\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرایا جاتا ہے (سوال 9.225)۔ یہ گیند کتنی دیر کے لئے حرکت میں رہتا ہے۔ (اشارہ: کلیہ $s = 4.9t^2$ سے $t = \sqrt{\frac{s}{4.9}}$ حاصل ہوتا ہے۔)

سوال 9.227: ایک چکور جس کا رقبہ $4\,\mathrm{m}^2$ ہے کے اندر تین چکور شکل 9.227 میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر چکور کے اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملا کر اس کے اندر چکور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طرح یک بعد دیگرے ہر چکور کے اندر دوسرا چکور بناتے ہوئے لامتناہی چکور حاصل کئے جاتے ہیں۔ ان تمام چکوروں کے رقبوں کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: $8\,\mathrm{m}^2$

سوال 9.228: نصف دائروں کی صفوں کو شکل 9.18 میں دکھایا گیا ہے جہاں نچلی صف میں رداس $\frac{1}{2}$ ہے۔ n ویں صف میں نصف دائروں کی تعداد 2^n اور رداس $1/2^n$ ہو گا۔ تمام نصف دائروں کے رقبوں کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال 9.229: متناہی رقبہ گھیرنے والی ہلگے ون کوچ برفانی روئی (صفحہ 296) کی لمبائی لامتناہی ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو سمجھنے کی خاطر فرض کریں ہم ضلع 1 کی مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں۔

ا. n ویں منحنی C_n کی لمبائی L_n تلاش کر کے دکھائیں کہ $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$ ہو گا۔

ب. C_n کا رقبہ S_n تلاش کر کے $\lim_{n\to\infty} S_n$ معلوم کریں۔

جواب: (الف) $3(\frac{4}{3})^{n-1}$، (ب) $A_n = A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})A + \cdots + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}A$، $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

سوال 9.230: ہم اس حقیقت کی غیر رسمی ثبوت کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کی قیمت 2 سے کم ہے شکل 9.19 کی مدد سے پیش کرتے ہیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟

9.4 غیر منفی اجزاءوالے تسلسل کا تکملی پرکھ

ہم تسلسل $\sum a_n$ کے بارے میں دو سوالات کرتے ہیں:

ا. کیا یہ تسلسل مرتکز ہے؟

ب. اگر تسلسل مرتکز ہو تب اس کا مجموعہ کیا ہے؟

اس باب کا باقی بیشتر حصہ پہلے سوال کا جواب دے گا۔ حقیقتاً دوسرا سوال بھی اتنا ہی اہم ہے اور ہم اس پر بعد میں غور کریں گے۔

اس حصہ میں اور اگلے دو حصوں میں ایسے تسلسل پر غور کیا جائے گا جن میں منفی اجزاء نہیں پائے جاتے ہوں۔ اس شرط کی بنا ان تسلسل کے جزوی مجموعے غیر گھٹتے ترتیبات دیتے ہیں اور وہ غیر گھٹتے ترتیبات جو اوپر سے محدود ہوں ہر صورت مرتکز ہوتے ہیں (مسئلہ 9.1)۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ ایک غیر منفی اجزاء والا تسلسل مرتکز ہے، ہمیں صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ اس تسلسل کے جزوی مجموعے اوپر سے محدود ہیں۔

ابتدا میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسے اس ترکیب سے ارتکاز کی تصدیق کرنے کے باوجود تسلسل کا مجموعہ نہ جاننا ایک عیب ہے۔ کیا بہتر ہوتا کہ ہم جزوی مجموعوں کے کلیات سے تسلسل کا مجموعہ بلا واسطہ تلاش کرتے۔ حقیقت میں ہمیں عموماً جزوی مجموعوں کے کلیات معلوم نہیں ہوں گے اور اسی بنا ہمیں دو قدمی طریقہ کار استعمال کرنا ہو گا جہاں پہلے قدم میں تسلسل کا ارتکاز جانا جاتا ہے اور دوسرے قدم میں مجموعے کی تخمینی قیمت تلاش کی جاتی ہے۔

غیر گھٹتے جزوی مجموعے

فرض کریں کہ تمام n کے لئے $a_n \geq 0$ ہو اور $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لامتناہی تسلسل ہو۔ تب چونکہ $s_{n+1} = s_n + a_n$ ہے لہٰذا ہر جزوی مجموعہ گزشتہ جزوی مجموعے سے بڑا یا اس کے برابر ہو گا:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

اب جزوی مجموعے غیر گھٹتا ترتیب بناتے ہیں اور مسئلہ 9.1 کے تحت یہ تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

ضمنی نتیجہ 9.1: برائے مسئلہ 9.1 غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

مثال 9.28: ہارمونی تسلسل

درج ذیل تسلسل کو **ہارمونی تسلسل**[27] کہتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

اس کے جزوی مجموعوں کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے لہٰذا یہ مرتکز تسلسل ہے۔ اس حقیقت کو جاننے کی خاطر ہم اجزاء کے گروہ بناتے ہیں۔

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\cdots$$

پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 1.5 ہے۔ اگلے دو اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ ہے جو $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اگلے چار اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ ہے جو $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اگلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$ ہے جو $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہے۔ اسی طرح اگلے سولہ اجزاء کا مجموعہ بھی $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں جزو $\frac{1}{2^{n+1}}$ پر اختتام پذیر 2^n اجزاء کا مجموعہ $\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا۔ جزوی مجموعات کی ترتیب اوپر سے محدود نہیں ہے: اگر $n=2^k$ ہو تب جزوی مجموعہ s_n کی قیمت $\frac{k}{2}$ سے بڑی ہو گی۔ ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ □

دھیان رہے کہ ہارمونی تسلسل کا n واں جزو $\frac{1}{n}$ ہے جو 0 پر مرتکز ہے لیکن ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ یوں ہارمونی تسلسل کے انفراج کو دریافت کرنے میں انفراج کا n ویں جزو پرکھ ناکام ہوتا ہے۔

تکملی پرکھ

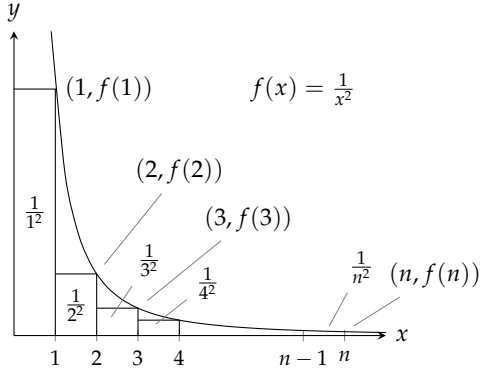
ہم ہارمونی تسلسل سے تعلق رکھنے والے ایک تسلسل، جس کا n واں جزو $\frac{1}{n^2}$ ہے، کو استعمال کرتے ہوئے تکملی پرکھ کو متعارف کرتے ہیں۔

مثال 9.29: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

حل: ہم $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کی ارتکاز دریافت کرتے ہیں۔ موازنہ کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے اجزاء کو تفاعل $f(x)=\frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں تصور کرتے ہیں اور ان قیمتوں کو منحنی $y=\frac{1}{x^2}$ کے نیچے مستطیل رقبے تصور کرتے ہیں۔

---

[27] harmonic series

شکل 9.20: رقبہ کا موازنہ (مثال 9.29)

جیسا شکل 9.20 میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + 1 = 2 && \text{(مثال 8.45)}
\end{aligned}
$$

یوں $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے جزوی مجموعات اوپر سے (2 تک) محدود ہیں لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس تسلسل کا مجموعہ درحقیقت $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$ ہے۔ □

تکملی پرکھ

فرض کریں $\{a_n\}$ مثبت اجزاء کی ترتیب ہے۔ مزید فرض کریں کہ $a_n = f(n)$ ہے جہاں تمام $x \geq N$ کے لئے (N مثبت عدد صحیح ہے) متغیر x کا f استمراری، مثبت اور گھٹتا تفاعل ہے۔ تب تسلسل $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ اور تکمل $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

□

ثبوت پرکھ: ہم $N = 1$ کے لئے پہلے اس پرکھ کو ثابت کرتے ہیں۔ عمومی N کے لئے ثبوت اسی طرح کا ہے۔

ہم اس مفروضہ سے شروع کرتے ہیں کہ تمام n کے لئے f گھٹتا تفاعل اور $f(n) = a_n$ ہیں۔ یوں شکل 9.21-الف میں وہ مستطیل جن کے رقبے $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ہیں کا مجموعی رقبہ، $x = 1$ تا $x = n + 1$ ترسیم $y = f(x)$ کے نیچے رقبہ سے زیادہ ہے یعنی:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

شکل 9.21-ب میں مستطیلوں کو ہر نقطہ کے بائیں جانب بنایا گیا ہے۔ اگر ہم وقتی طور پر پہلی مستطیل، جس کا رقبہ a_1 ہے، کو نظر انداز کریں تب درج ذیل ہو گا۔

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر ہم a_1 کو بھی شامل کریں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

ان نتائج سے

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \tag{9.15}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ متناہی ہو تب دائیں عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ متناہی ہو گا۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ لا متناہی ہو تب بائیں عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ لا متناہی ہو گا۔

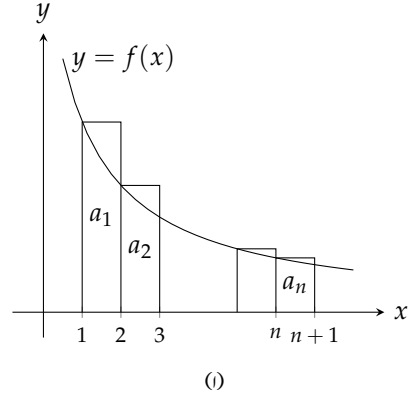
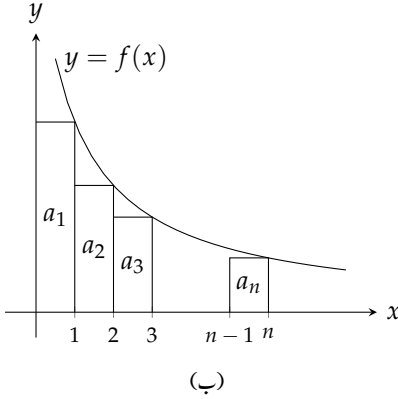
یوں تسلسل اور تکمل دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

□

دھیان رہے کہ ارتکاز کی صورت میں تکمل اور تسلسل کی قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں جیسا مثال 9.29 میں دیکھا گیا جہاں $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ اور $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ تھے۔

مثال 9.30: دکھائیں کہ p تسلسل

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{9.16}$$

جہاں p حقیقی مستقل ہے، $p > 1$ کی صورت میں مرتکز جبکہ $p \le 1$ کی صورت میں منفرج ہو گا۔

شکل 9.21: تکملی پرکھ کے تحت تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور تکمل $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

حل: اگر $p > 1$ ہو تب $f(x) = \frac{1}{x^p}$ متغیر x کا مثبت گھٹتا تفاعل ہو گا۔ اب چونکہ

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\Big[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b \\ &= \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\Big) \\ &= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

ہے لہٰذا تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

اگر $p < 1$ ہو تب $1 - p > 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}(b^{1-p} - 1) = \infty$$

تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

اگر $p = 1$ ہو تب درج ذیل منفرج (ہارمونی) تسلسل پایا جائے گا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

یوں $p > 1$ لے ارتکاز لیکن $p < 1$ اور $p = 0$ کے لئے انفراج پایا جاتا ہے۔ □

سوالات

ارتکاز اور انفراج کی معلومات

سوال 9.231 تا سوال 9.260 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کان سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔(جوابات دیکھتے ہوئے یاد رہے کہ تسلسل کی ارتکاز یا انفراج جاننے کے کئی طریقے ہو سکتے ہیں)

سوال 9.231: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

جواب: مرتکز؛ ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{10} < 1$

سوال 9.232: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

سوال 9.233: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

جواب: منفرج؛ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

سوال 9.234: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

سوال 9.235: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

جواب: منفرج؛ p تسلسل، $p < 1$

سوال 9.236: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

سوال 9.237: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

جواب: مرتکز؛ ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{8} < 1$

سوال 9.238: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{n}$

سوال 9.239: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

جواب: منفرج؛ تکملی پرکھ

سوال 9.240: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

سوال 9.241: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

جواب: مرتکز؛ ہندسی تسلسل، $r = \frac{2}{3} < 1$

سوال 9.242: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+3}$

سوال 9.243: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

جواب: منفرج؛ تکملی پرکھ

سوال 9.244: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

سوال 9.245: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

جواب: منفرج؛ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$

سوال 9.246: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

سوال 9.247: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

جواب: منفرج؛ $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}) \neq 0$

سوال 9.248: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

سوال 9.249: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

جواب: منفرج؛ ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{\ln 2} > 1$

سوال 9.250: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

سوال 9.251: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n-1}}$

جواب: مرتکز؛ تکملی پرکھ

سوال 9.252: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

سوال 9.253: $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

جواب: منفرج؛ n واں جزو پرکھ

سوال 9.254: $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

سوال 9.255: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

جواب: مرتکز؛ تکملی پرکھ

سوال 9.256: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

سوال 9.257: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\tan^{-1} n}{1+n^2}$

جواب: مرتکز؛ تکملی پرکھ

سوال 9.258: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

سوال 9.259: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

جواب: مرتکز؛ تکملی پرکھ

سوال 9.260: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.261 اور سوال 9.262 میں اگر کسی a کے لئے تسلسل مرتکز ہو تب a تلاش کریں۔

سوال 9.261: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$
جواب: (الف) $a=1$

سوال 9.262: $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{2a}{n+1}\right)$

سوال 9.263:

ا. شکل 9.20 اور شکل 9.21 کی طرز کے اشکال بنا کر دکھائیں کہ ہارمونی تسلسل کے جزوی مجموعات درج ذیل عدم مساواتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$\le 1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1+\ln n$$

ب. ہارمونی تسلسل کی انفراج تجرباتی طور نظر نہیں آتی ہے اگرچہ ہم جانتے ہیں کہ یہ تسلسل منفرج ہے۔ بس اس کے جزوی مجموعات بہت آہستہ بڑھتے ہیں۔ یہ دیکھنے کی خاطر فرض کریں ہم $s_1=1$ سے شروع کر کے ہر سیکنڈ ہارمونی تسلسل میں ایک جزو شامل کرتے ہیں۔ کائنات کی ابتدا سے شروع کرتے ہوئے اب تک (تقریباً 13 ارب سال بعد) شامل اجزاء کا جزوی مجموعہ کیا ہو گا؟ (ایک سال میں 365 دن لیں۔)

جواب: (ب) تقریباً 41.55

سوال 9.264: کیا x کی کسی قیمت کے لئے $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx}$ مرتکز ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.265: کیا یہ درست ہے کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ مثبت اعداد کا منفرج تسلسل ہو تب تمام n کے لئے $b_n<a_n$ کی صورت میں مثبت اعداد کا ایک تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ بھی منفرج ہو گا؟ کیا مثبت اعداد کا "چھوٹے سے چھوٹا" منفرج تسلسل پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: درست ہے۔

سوال 9.266: کیا مثبت اعداد کا "بڑے سے بڑا" منفرج تسلسل پایا جاتا ہے (سوال 9.265)؟

سوال 9.267: کوشی پرکھ جمود
کوشی پرکھ جمود کہتا ہے: فرض کریں $\{a_n\}$ مثبت اجزاء کی غیر گھٹتی ترتیب ہے (تمام n کے لئے $a_n\ge a_{n+1}$) جو 0 پر مرتکز ہے۔ تب $\sum a_n$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب $\sum 2^n a_{2^n}$ مرتکز ہو۔ مثال کے طور پر $\sum\frac{1}{n}$ اس لئے منفرج ہے کہ $\sum 2^n\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right)=\sum 1$ منفرج ہے۔ دکھائیں کہ یہ پرکھ کیوں کام کرتا ہے۔

سوال 9.268: کوشی پرکھ جمود (سوال 9.267) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ

ا. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ منفرج ہے۔

ب. $p > 1$ کے لئے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ مرتکز اور $p \le 1$ کے لئے منفرج ہے۔

سوال 9.269: لوگارتھمی p تسلسل

ا. دکھائیں کہ صرف اور صرف $p > 1$ کے لئے $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ مرتکز ہو گا۔

ب. تسلسل $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ کی ارتکاز پر جزو-الف کا کیا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.270: درج ذیل میں کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں۔ سوال 9.269 کے نتائج بروئے کار لائیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ ب. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$ ج. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n^3)}$ د. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

سوال 9.271: یولر مستقل
ہم شکل 9.21 کی طرح اشکال کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ n بڑھانے سے مجموعہ

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

اور تکمل

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

کے فرق میں کمی کم ہوتی ہے۔اس خیال پر غور کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. عدم مساوات 9.15 میں $f(x) = \frac{1}{x}$ لے کر

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$$

یا

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1$$

دکھائیں۔یوں درج ذیل ترتیب اوپر سے اور نیچے سے محدود ہو گی۔

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

ب. درج ذیل دکھا کر دکھائیں کہ جز-الف میں ترتیب $\{a_n\}$ گھٹتی ترتیب ہے۔

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln n$$

چونکہ اوپر اور نیچے سے محدود گھٹتی ترتیب مرتکز ہوتی ہے (سوال 9.41) لہٰذا جزو-الف میں اعداد a_n بھی مرتکز ہوں گے:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma$$

عدد γ جس کو **یولر مستقل**[28] کہتے ہیں کی قیمت $0.5772\cdots$ ہے۔ دیگر مخصوص اعداد مثلاً π اور e کے برعکس γ کو ظاہر کرنے کا کوئی دوسرا سادہ کلیہ اب تک دریافت نہیں کیا گیا ہے۔

سوال 9.272: تکملی پرکھ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ مرتکز ہے۔

9.5 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ

گزشتہ حصہ کے ضمنی نتیجہ 9.1 کی استعمال میں اصل سوال یہ معلوم کرنا ہے کہ s_n اوپر سے محدود ہے۔ بعض اوقات ہم دکھا پاتے ہیں کہ چونکہ دیے گئے تسلسل کا ہر جزوی مجموعہ s_n کسی مرتکز تسلسل کے مطابقتی جزوی مجموعہ سے کم ہے لہٰذا دیا گیا تسلسل مرتکز ہے۔

مثال 9.31: درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

اس لئے مرتکز ہے کہ اس کے تمام اجزاء مثبت اور درج ذیل تسلسل کے مطابقتی اجزاء سے کم ہیں۔

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ تعلق $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کو کیسے اوپر سے محدود بناتا ہے۔ درج ذیل فرض کر کے

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

---

[28] Euler's constant

ہم دیکھتے ہیں کہ ہر n کے لئے

$$s_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - (1/2)} = 3$$

ہو گا۔ یوں $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے تمام جزوی مجموعات 3 سے کم ہیں لہٰذا $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ مرتکز ہو گا۔

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کی بالائی حد بندی 3 ہونے کا یہ مطلب نہیں کہ یہ تسلسل 3 پر مرتکز ہو گا۔ ہم حصہ 9.10 میں دیکھیں گے کہ یہ تسلسل e پر مرتکز ہے۔ □

بلا واسطہ تقابلی پرکھ

ہم نے مثال 9.31 میں ارتکاز کو تقابلی پرکھ سے ثابت کیا۔ ہم نے دیے گئے تسلسل کے اجزاء کا ایک مرتکز تسلسل کے مطابقتی اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے ایسا کیا۔ اس طریقہ کار سے کئی تراکیب حاصل کئے جا سکتے ہیں جنہیں **تقابلی پرکھ**[29] کہتے ہیں۔

غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا بلا واسطہ تقابلی پرکھ

فرض کریں $\sum a_n$ ایک ایسا تسلسل ہے جس میں کوئی منفی جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

ا. اگر ایسا مرتکز تسلسل $\sum c_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے $a_n \le c_n$ ہو تب تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔

ب. اگر غیر منفی اجزاء کا ایسا منفرج تسلسل $\sum d_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لئے $a_n \ge d_n$ ہو تب تسلسل $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: جزو-الف میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا ہے

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

لہٰذا یہ غیر گھٹتا ترتیب دیتے ہیں جس کا حد $L \le M$ ہے۔

---

[29] comparison tests

جزو-ب میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ اوپر سے محدود نہیں ہیں۔ اگر یہ اوپر سے محدود ہوتے تب جزوی مجموعہ $\sum d_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا

$$M' = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

اور $\sum d_n$ کو انفراج کی بجائے مرتکز ہونا ہوتا۔

□

بلا واسطہ تقابلی پرکھ کو تسلسل پر لاگو کرنے کے لئے ہمیں تسلسل کے ابتدائی اجزاء شامل کرنے ہوں گے۔ ہم کسی بھی اشاریہ N سے پرکھ شروع کر سکتے ہیں جب تک ہم اس کے بعد کے تمام اجزاء شامل کریں۔

مثال 9.32: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

حل: ہم ابتدائی چار اجزاء نظر انداز کر کے باقی اجزاء کا مرتکز ہندسی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ کے اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل دیکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

یوں دیا گیا تسلسل بلا واسطہ تقابلی پرکھ کے تحت مرتکز ہو گا۔ □

بلا واسطہ تقابلی پرکھ استعمال کرنے کی خاطر ہمارے پاس مرتکز اور منفرج تسلسل کی فہرست ہونی چاہیے۔ اب تک ہم درج ذیل جانتے ہیں:

مرتکز تسلسل	منفرج تسلسل
ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert < 1$ ہو	ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert \geq 1$ ہو
دوربینی تسلسل مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	ہارمونی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	کوئی بھی تسلسل $\sum a_n$ جس کے لئے $\lim_{n\to\infty} a_n$ غیر موجود ہو یا $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ہو
p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p > 1$ ہو	p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p \leq 1$ ہو

پرکھ تقابل حد

ہم اب ایسے تقابلی پرکھ پر غور کرتے ہیں جس کا استعمال ان تسلسل میں بالخصوص آسان ثابت ہوتا ہے جن میں a_n اشاریہ n کا ناطق تفاعل ہو۔

فرض کریں ہم درج ذیل تسلسل کے ارتکاز پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$\text{(الف)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-n+1} \qquad \text{(ب)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

ارتکاز یا انفراج جاننے میں صرف دم کارآمد ہوتی ہے۔ جب n بہت بڑا ہو تب نسب نما اور شمار کنندہ میں n کی بلند ترین طاقت سب سے زیادہ اہم ہوں گے۔ یوں (الف) میں بڑے n کے لئے

$$a_n = \frac{2n}{n^2-n+1}$$

کا رویہ $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{1}{n}$ منفرج ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\sum a_n$ بھی منفرج ہو گا۔

اسی طرح (ب) میں بڑے n کے لئے

$$\frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

کا رویہ $\frac{8n^3}{2n^6} = \frac{4}{n^3}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{4}{n^3}$ مرتکز ہے (یہ مرتکز p تسلسل کا چار گنا ہے) لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تسلسل $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

درج ذیل پرکھ کے تحت ہماری $\sum a_n$ کے بارے میں توقعات دونوں صورتوں میں درست ہیں۔

تقابل حد پرکھ

فرض کریں تمام $n \ge N$ کے لئے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔

ا. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ہو تب $\sum a_n$ اور $\sum b_n$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

ب. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ہو اور $\sum b_n$ مرتکز ہو تب $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

ج. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum b_n$ منفرج ہو تب $\sum a_n$ بھی منفرج ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: ہم جزو-الف ثابت کریں گے جبکہ جزو-ب اور جزو-ج آپ کو ثابت کرنے ہوں گے (سوال 9.309)۔

چونکہ $\frac{c}{2} > 0$ ہے لہٰذا ایک ایسا عدد صحیح N پایا جائے گا کہ تمام n کے لئے درج مطمئن ہو گا۔

$$n > N \implies \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$$

حد کی تعریف جہاں $\epsilon = \frac{c}{2}$، $L = c$ اور a_n کی جگہ $\frac{a_n}{b_n}$ ہیں۔

یوں $n > N$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$
$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$
$$\left(\frac{c}{2}\right)b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right)b_n$$

اگر $\sum b_n$ مرتکز ہو، تب $\sum(3c/2)b_n$ مرتکز ہو گا اور بلا واسطہ تقابل کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔ اگر $\sum b_n$ منفرج ہو، تب $\sum(3c/2)b_n$ منفرج ہو گا اور بلا واسطہ تقابل کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

□

مثال 9.33: درج ذیل تسلسل میں کون سے مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟

(الف) $$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

(ب) $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

(ج) $$\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$$

حل:

ا. ہم $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ لیتے ہیں۔ بڑے n کے لئے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $b_n = \frac{1}{n}$ لیتے ہیں (ہم $b_n = \frac{2}{n}$ بھی لے سکتے تھے لیکن $\frac{1}{n}$ زیادہ سادہ ہے)۔ چونکہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

منفرج ہے اور

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2$$

ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ا کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

ب. $a_n=\frac{1}{2^n-1}$ لیں۔ بڑے n کے لئے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{1}{2^n}$ کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $b_n=\frac{1}{2^n}$ لیتے ہیں۔ چونکہ

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

مرتکز ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2^n)}\\&=1\end{aligned}$$

ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ا کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔

ج. $a_n=\frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ لیں۔ بڑے n کے لئے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{n\ln n}{n^2}=\frac{\ln n}{n}$ کی طرح ہو گا جو $n\geq 3$ کے لئے $\frac{1}{n}$ سے بڑا ہے لہٰذا ہم $b_n=\frac{1}{n}$ لیتے ہیں۔ چونکہ

$$\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

منفرج ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}\\&=\infty\end{aligned}$$

ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ج کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

□

مثال 9.34: کیا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ مرتکز ہے؟

حل: چونکہ کسی بھی مثبت مستقل c کے لئے $\ln n$ سے n^c کی بڑھنے کی شرح زیادہ ہو گی (سوال 9.137) لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ کافی بڑے n کے لئے

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

ہو گا۔ یقیناً $a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ اور $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$ لے کر

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ (p تسلسل جہاں $p > 1$ ہے) مرتکز ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ب کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔ □

سوالات

ارتکاز اور انفراج کی دریافت

سوال 9.273 تا سوال 9.308 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.273: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.274: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

سوال 9.275: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{2^n}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.276: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

سوال 9.277: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

جواب: منفرج، n واں جزو پرکھ

سوال 9.278: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

سوال 9.279: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

جواب: مرتکز، $(\frac{n}{3n+1})^n < (\frac{n}{3n})^n = (\frac{1}{3})^n$

سوال 9.280: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

سوال 9.281: $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ بلا واسطہ تقابل

سوال 9.282: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

سوال 9.283: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.284: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

سوال 9.285: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.286: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

سوال 9.287: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.288: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$

سوال 9.289: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

جواب: منفرج، تکملی پرکھ

سوال 9.290: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n}$

سوال 9.291: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.292: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

سوال 9.293: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$

جواب: مرتکز، $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

سوال 9.294: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$

سوال 9.295: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$

جواب: مرتکز، $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$

سوال 9.296: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$

سوال 9.297: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.298: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$

سوال 9.299: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.300: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

سوال 9.301: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$

جواب: مرتکز، $\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \frac{\pi/2}{n^{1.1}}$

سوال 9.302: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$

سوال 9.303: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^2}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.304: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

سوال 9.305: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

جواب: منفرج، چونکہ $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{3n} \impliedby 3n > n\sqrt[n]{n}$ سے مراد $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ کا انفراج ہے۔

سوال 9.306: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$

سوال 9.307: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل حد

سوال 9.308: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.309: تقابل حد پرکھ کا جزو-ب اور جزو-ج ثابت کریں۔

سوال 9.310: اگر غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 9.311: فرض کریں $n \geq N$ کے لئے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔ اگر $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum b_n$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال 9.312: ثابت کریں کہ اگر غیر مثبت اجزاء کا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہو تب $\sum a_n^2$ بھی مرتکز ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 9.313: ہم نہیں جانتے ہیں کہ آیا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ مرتکز کہ منفرج ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے اس تسلسل کا رویہ درج ذیل اقدام سے دیکھیں۔

ا. جزوی مجموعات $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ کی ترتیب لیں۔ اس ترتیب کا حد کا رویہ $k \to \infty$ کیسا ہے۔ کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس ترتیب کے حد کا کلیہ تلاش کر سکتا ہے؟

ب. جزوی مجموعات کے ابتدائی 100 نقطے $(k, s-k)$ ترسیم کریں۔ کیا یہ مرتکز نظر آتے ہیں؟ آپ اس کے حد کی اندازاً کتنی قیمت لگائیں گے؟

ج. اب ابتدائی 200 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔اس کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

د. ابتدائی 400 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ $k = 355$ پر کیا ہوتا ہے؟ عدد $\frac{355}{113}$ کا حساب لگائیں۔ اس حساب کی رو سے $k = 355$ پر جزوی مجموعہ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ آپ k کی کن قیمتوں پر اسی رویہ کی توقع کرتے ہیں۔

9.6 غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ

وہ پرکھ ارتکاز جو دوسرے تسلسل یا تکمل کے ساتھ موازنہ پر منحصر ہو **بیرونی پرکھ**[30] کہلاتا ہے۔ ایسے پرکھ کار آمد ہوتے ہیں لیکن چند وجوہات کی بنا ہمیں ایسے پرکھ درکار ہیں جو کسی موازنہ پر منحصر نہ ہوں۔ حقیقت میں عین ممکن ہے کہ ہمیں ایسا کوئی تسلسل یا تکمل معلوم نہ ہو جس کے ساتھ موازنہ کرنا ممکن ہو۔ اس کے علاوہ کسی بھی تسلسل کی تمام معلومات اسی کے اجزاء میں پائی جانی چاہیے۔ اسی لئے ہم اپنی توجہ **اندرونی پرکھ**[31] کی طرف کرتے ہیں۔اندرونی پرکھ صرف دیے گئے تسلسل پر منحصر ہوتا ہے۔

---

[30] extrinsic test
[31] intrinsic test

تناسبی پرکھ

تناسبی پرکھ ہمارا پہلا اندرونی پرکھ ہے جو تسلسل کے بڑھنے (یا گھٹنے) کی شرح کو نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ سے حاصل کرتا ہے۔ ہندسی تسلسل $\sum ar^n$ کے لئے یہ شرح مستقل ($\frac{ar^{n+1}}{ar^n} = r$) ہے اور تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے نسبت کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو۔ اگر نسبت مستقل نہ ہو تب بھی (اگلی مثال کی طرح) ایسا ہندسی تسلسل معلوم کیا جا سکتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کیا جا سکے۔

مثال 9.35: $a_1 = 1$ اور تمام n کے لئے $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1}a_n$ لیں۔ کیا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہے؟

حل: ہم تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{5}a_2 = \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}, \quad a_4 = \frac{3}{7}a_3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}$$

چونکہ $\frac{n}{2n+1}$ کی قیمت $\frac{1}{2}$ سے کم ہے لہٰذا ہر جزو گزشتہ جزو کے $\frac{1}{2}$ سے بھی کم ہو گا۔ یوں اس تسلسل کے اجزاء درج ذیل ہندسی تسلسل کے اجزاء سے کم یا برابر ہوں گے

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

اور یہ ہندسی تسلسل 2 پر مرتکز ہے۔ یوں ہمارا تسلسل بھی مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ 2 سے کم ہو گا۔ درج ذیل جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تسلسل اپنے حد $\frac{\pi}{2}$ تک کتنا جلدی پہنچتا ہے۔

n	s_n
5	1.549 206 349
10	1.570 289 085
15	1.570 783 080
20	1.570 795 964
25	1.570 796 317
30	1.570 796 327
35	1.570 796 327

□

تناسبی پرکھ

فرض کریں $\sum a_n$ مثبت اجزاء کا تسلسل ہے اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \rho$$

تب درج ذیل ہو گا۔

ا. $\rho < 1$ کی صورت میں تسلسل مرتکز ہو گا۔

ب. $\rho > 1$ یا لامتناہی کے برابر ہونے کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ : تناسبی پرکھ کی ثبوت میں (مثال 9.35 کی طرح) موزوں ہندسی تسلسل کے ساتھ موازنہ کیا جائے گا۔ البتہ تناسبی پرکھ استعمال کرتے ہوئے ایسے کسی موازنہ کی ضرورت نہیں ہو گی۔

ا. $[\rho < 1]$ فرض کریں ρ اور 1 کے بیچ r ایک عدد ہے۔ یوں $\epsilon = r - \rho$ مثبت ہو گا۔ چونکہ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$$

ہے لہٰذا بڑے n، مثلاً $n \geq N$، کی صورت میں ρ اور $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ کے بیچ فرق ϵ یا اس سے کم ہو گا۔ بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r \qquad n \geq N \text{ جب}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< ra_N, \\
a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\
a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_n
\end{aligned}$$

ان عدم مساوات سے ظاہر ہے کہ N جزو کے بعد ہمارے تسلسل کے اجزاء صفر تک اس ہندسی تسلسل سے زیادہ تیزی سے پہنچتے ہیں جس میں $r < 1$ ہو۔ بلکہ تسلسل $\sum c_n$ پر غور کریں جہاں $n = 1, 2, \cdots, N$ کے لئے $c_n = a_n$ اور

$$c_{N+1} = ra_N,\ c_{N+2} = r^2 a_N, \cdots, c_{N+m} = r^m a_N, \cdots$$

ہوں۔ اب تمام n کے لئے $a_n \leq c_n$ اور

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

ہے۔ چونکہ $|r| < 1$ ہے لہٰذا ہندسی تسلسل $1 + r + r^2 + \cdots$ مرتکز ہو گا لہٰذا $\sum c_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ چونکہ $a_n \leq c_n$ ہے لہٰذا $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی اشاریہ M سے آگے

$$a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots \quad \text{اور} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

ہو گا۔ تسلسل کے اجزاء n لامتناہی کرنے سے صفر تک نہیں پہنچتے ہیں لہٰذا n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $[\rho = 1]$ درج ذیل دو تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

دکھاتے ہیں کہ $\rho =$ کی صورت میں کسی دوسرے پرکھ کی ضرورت پیش آئے گی۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ کے لئے } \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ کے لئے } \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

باوجود اس کے کہ دونوں صورتوں میں $\rho = 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج اور دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

تناسبی پرکھ عموماً اس صورت موثر ہوتا ہے جب اجزاء میں n پر مبنی فقروں کے عدد ضربیہ یا n طاقت کے فقرے پائے جاتے ہوں۔

مثال 9.36: درج ذیل تسلسل کی ارتکاز پر غور کریں۔

ا. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$

حل:

ا. تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

چونکہ $p = \frac{2}{3}$ ہے جو 1 سے کم ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس کا یہ مطلب نہیں کہ تسلسل کا مجموعہ $\frac{2}{3}$ ہے۔ در حقیقت اس کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1-(2/3)} + \frac{5}{1-(1/3)} = \frac{21}{2}$$

ب. اگر $a_n=\frac{(2n)!}{n!n!}$ ہو تب $a_{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ اور

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!}\\&=\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}=\frac{4n+2}{n+1}\to 4\end{aligned}$$

ہوں گے۔ چونکہ $p=4$ ہے جو 1 سے بڑا ہے لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. اگر $a_n=\frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ ہو تب

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{4^n n!n!}\\&=\frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{2(n+1)}{2n+1}\to 1\end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ حد $p=1$ ہے تناسبی پرکھ ہمیں تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کر سکتا ہے۔ البتہ چونکہ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}$ ہر صورت 1 سے بڑا ہو گا لہٰذا a_{n+1} ہر صورت a_n سے بڑا ہو گا۔ یوں تمام اجزاء $a_1=2$ سے بڑے یا اس کے برابر ہوں گے اور $n\to\infty$ کرنے سے n جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔ یوں یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

□

n واں جذر پرکھ

اب تک $\sum a_n$ کے لئے جن پرکھ پر غور کیا گیا ان کی بہترین کارکردگی سادہ کلیات کے a_n میں نظر آتی ہے۔ اب درج ذیل پر غور کریں۔

مثال 9.37: اگر $a_n=\begin{cases}n/2^n & \text{طاق } n\\ 1/2^n & \text{جفت } n\end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہو گا؟

حل: ہم اس تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{7}{2^7}+\cdots\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{16}+\frac{5}{32}+\frac{1}{64}+\frac{7}{128}+\cdots\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ہندسی تسلسل نہیں ہے۔ $n \to \infty$ کرنے سے n واں جزو 0 تک پہنچتا ہے لہٰذا ہم نہیں جانتے کہ یہ تسلسل منفرج ہو گا۔ یہاں تکملی پرکھ ہماری مدد نہیں کر پاتا۔ تناسبی پرکھ درج ذیل دیتا ہے۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{طاق } n \\ \frac{n+1}{2} & \text{جفت } n \end{cases}$$

$n \to \infty$ کرنے سے نسبت کم اور زیادہ ہوتی ہے اور کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

یہاں ہمیں n واں جذر پرکھ کی ضرورت ہے۔ □

n واں جذر پرکھ

فرض کریں تسلسل $\sum a_n$ میں تمام $n \geq N$ کے لئے $a_n \geq 0$ ہیں۔مزید درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

تب

ا. $\rho < 1$ کی صورت میں یہ تسلسل مرتکز ہو گا،

ب. $\rho > 1$ اور لامتناہی ρ کی صورت میں یہ تسلسل منفرج ہو گا،

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ:

ا. $[\rho < 1]$ ہم ϵ اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ $\rho + \epsilon < 1$ ہو۔ چونکہ $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$ ہے لہٰذا آخرکار ρ اور اجزاء $\sqrt[n]{a_n}$ کے بیچ فاصلہ ϵ سے کم ہو گا۔دوسرے لفظوں میں ایک ایسا اشاریہ $M \geq N$ پایا جاتا ہے جس کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon \qquad (n \geq M)$$

تب درج ذیل بھی درست ہو گا۔

$$a_n < (\rho + \epsilon)^n \qquad (n \geq M)$$

اب ہندسی تسلسل $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ جس کی نسبت $(\rho + \epsilon) < 1$ ہو مرتکز ہوتا ہے۔ یوں موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔یوں درج ذیل مرتکز ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی عدد صحیح M سے آگے تمام اشاریہ کے لئے $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ہو گا لہٰذا تمام $n > M$ کے لئے $a_n > 1$ ہو گا۔ اس تسلسل کے اجزاء صفر پر مرکوز نہیں ہیں۔ یوں n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ج. $[\rho = 1]$ تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ اور $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سے ظاہر ہے کہ $\rho = 1$ کے لئے یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہے۔ اگرچہ ان دونوں تسلسل میں $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج جبکہ دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

مثال 9.38: **(مثال 37-9 جاری)**

اگر $a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{طاق}\; n \\ 1/2^n & \text{جفت}\; n \end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہو گا؟

حل: ہم n واں جذر پرکھ زیر استعمال لاتے ہیں جو

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & \text{طاق}\; n \\ \frac{1}{2} & \text{جفت}\; n \end{cases}$$

دیتا ہے لہٰذا

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

ہو گا۔ چونکہ $\sqrt[n]{n} \to 1$ ہے (جدول 9.2) لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ یہ حد 1 سے کم ہے لہٰذا n ویں جذر پرکھ کے تحت دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مثال 9.39: درج ذیل میں کونسا تسلسل مرتکز اور کونسا منفرج ہے؟

ا. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

حل:

ا. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

ہے لہذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ مرتکز ہو گا۔

ب. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \frac{2}{1} > 1$$

ہے لہذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ منفرج ہو گا۔

□

سوالات

ارتکاز اور انفراج معلوم کرنا

سوال 9.314 تا سوال 9.339 میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (جواب حاصل کرنے کے ایک سے زیادہ طریقے ہو سکتے ہیں۔)

سوال 9.314: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.315: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

سوال 9.316: $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

جواب: منفرج، تناسبی پرکھ

سوال 9.317: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

سوال 9.318: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.319: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

سوال 9.320: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{3}{1.25^n}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.321: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

سوال 9.322: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

جواب: منفرج، $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n})^n = e^{-3} \neq 0$

سوال 9.323: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

سوال 9.324: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.325: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

سوال 9.326: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{2n}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.327: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

سوال 9.328: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

جواب: منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.329: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

سوال 9.330: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.331: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

سوال 9.332: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.333: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

سوال 9.334: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.335: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

سوال 9.336: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.337: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

سوال 9.338: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\ln n}{n(n+2)!}$
جواب: مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

سوال 9.339: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

سوال 9.340 تا سوال 9.351 میں کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.340: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.341: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

سوال 9.342: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$
جواب: منفرج، تناسبی پرکھ

سوال 9.343: $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

سوال 9.344: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.345: $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

سوال 9.346: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.347: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

سوال 9.348: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$
جواب: منفرج، $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \to 1$

سوال 9.349: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

سوال 9.350: $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$
جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.351: $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

سوال 9.352 تا سوال 9.357 میں مرتکز اور منفرج تسلسل کی نشاندہی کریں۔ وجہ بھی پیش کریں۔

سوال 9.352: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$
جواب: منفرج، تناسبی پرکھ

سوال 9.353: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

سوال 9.354: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

جواب: مرتکز، تناسبی پرکھ

سوال 9.355: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

سوال 9.356: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4^n 2^n n!}$

جواب: مرتکز تناسبی پرکھ

سوال 9.357: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{[2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)](3^n+1)}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.358: p تسلسل کے ساتھ یا تناسبی پرکھ اور نا ہی n واں جذر پرکھ کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ انہیں درج ذیل پر لاگو کر کے دکھائیں کہ دونوں پرکھ اس کی ارتکاز یا انفراج دریافت کرنے سے قاصر ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

سوال 9.359: دکھائیں کہ تناسبی پرکھ اور n واں جذر پرکھ درج ذیل کی ارتکاز یا انفراج معلوم نہیں کر سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad p \text{ مستقل}$$

سوال 9.360: فرض کریں $a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{عدد مفرد } n \\ 1/2^n & \text{دیگر صورت} \end{cases}$ ہے۔ کیا $\sum a_n$ مرتکز ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: جی ہاں

9.7 بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز

جس تسلسل کے اجزاء یک بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں کو **بدلتا تسلسل**[32] کہتے ہیں جس کی تین مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots \tag{9.17}$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n}4}{2^n}+\cdots \tag{9.18}$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots \tag{9.19}$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ مساوات 9.17 میں دیا گیا تسلسل، جس کو **بدلتا ہارمونی تسلسل**[33] کہتے ہیں، مرتکز ہے۔ مساوات 9.18 میں نسبت $r=-\frac{1}{2}$ کا ہندسی تسلسل دیا گیا ہے جو $-\frac{-2}{1+(1/2)}=-\frac{4}{3}$ پر مرکوز ہے۔ مساوات 9.19 کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ہم بدلتا ہارمونی تسلسل کا ارتکاز ثابت کرنے کے لئے بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.8: **بدلتا تسلسل پرکھ (مسئلہ لیبنٹز)**
اگر تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

درج ذیل تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ا. تمام u_n مثبت ہوں،

ب. تمام $n\geq N$ کے لئے $u_n\geq u_{n+1}$ ہو، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے،

ج. $u_n\to 0$

---

[32] alternating series
[33] alternating harmonic series

ثبوت : جفت n ، مثلاً $n = 2m$ ، کی صورت میں ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \end{aligned}$$

پہلی مساوات میں قوسین میں بند قیمتیں مثبت یا صفر ہیں لہٰذا s_{2m} درحقیقت m غیر منفی اجزاء کا مجموعہ ہو گا۔ یوں $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ ہو گا اور تسلسل $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا ہو گا۔ دوسری مساوات کے تحت $s_{2m} \leq u_1$ ہو گا۔ چونکہ $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا اور اوپر سے محدود تسلسل ہے لہٰذا اس کا حد

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m} = L \tag{9.20}$$

موجود ہو گا۔

اگر n طاق ہو، مثلاً $n = 2m+1$ ، تب ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$ ہو گا۔ چونکہ $u_n \to 0$ ہے لہٰذا

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

ہو گا اور $m \to \infty$ کرتے ہوئے

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L \tag{9.21}$$

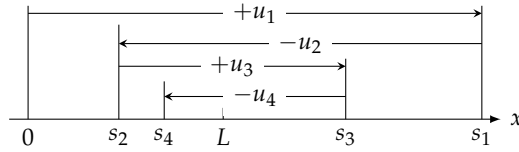
ہو گا۔ مساوات 9.20 اور مساوات 9.21 ملا کر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ دیتے ہیں (سوال 9.53)۔

□

مثال 9.40: بدلتا ہارمونی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

مسئلہ 9.8 کے تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مسئلہ 9.8 کے تینوں شرائط کو $N = 1$ کے لئے مطمئن کرتے ہوئے بدلتے ہارمونی تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترسیم (شکل 9.22) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ اپنی حد L تک کیسے پہنچتا ہے۔ (سوال 9.423 میں آپ کو $N > 1$ کی صورت میں شکل بنانے کو کہا گیا ہے۔) محور x کے مبدا سے شروع کرتے ہوئے ہم $s_1 = u_1$ فاصلہ طے کرتے ہیں۔ $s_2 = u_1 - u_2$ تک پہنچنے کی خاطر ہم یہاں سے الٹ رخ u_2 چلتے ہیں۔ چونکہ $u_2 \leq u_1$ ہے لہٰذا ہم مبدا کی دوسری جانب نہیں جائیں گے۔ ہم اسی طرح آگے پیچھے چلتے رہتے ہیں۔ ہر $n \geq N$ قدم پر $u_{n+1} < u_n$ کی بنا ہمارا قدم گزشتہ قدم سے چھوٹا یا اس کے برابر ہو گا۔ چونکہ n بڑھانے سے n واں جزو

شکل 9.22: اس بدلتے تسلسل کے جزوی مجموعات جو $N = 1$ کے لئے مسئلہ 9.8 کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

صفر تک پہنچتا ہے لہٰذا ہر اگلا قدم چھوٹا ہوتا جائے گا اور ہم حد L کی ایک جانب اور دوسری جانب قدم رکھتے ہوئے L کے نزدیک تر ہوتے جائیں گے۔ یک بعد دیگرے ہر دو مجموعوں s_n اور s_{n+1} کے بیچ حد L پایا جائے گا لہٰذا حد اور s_n میں فرق u_{n+1} سے کم ہو گا۔

درج ذیل کی بنا ہم مرتکز بدلتے تسلسل کے مجموعات کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

$$|L - s_n| < u_{n+1} \qquad n \geq N$$

مسئلہ 9.9: **مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ**
اگر بدلتا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ مسئلہ 9.8 کے تین شرائط مطمئن کرتا ہو تب $n \geq N$ کے لئے تسلسل کا مجموعہ L تخمیناً

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

ہو گا جس میں مطلق خلل کی قیمت u_{n+1} سے کم ہو گی جو پہلے غیر مستعمل جزو کی عددی قیمت ہے۔ مزید باقی $L - s_n$ کی علامت وہی ہو گی جو پہلی غیر مستعمل جزو کی علامت ہو۔

مثال 9.41: ہم مسئلہ 9.9 درج ذیل تسلسل پر لاگو کرتے ہیں جس کا مجموعہ ہم جانتے ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}\bigg| + \frac{1}{256} - \cdots$$

یہ مسئلہ کہتا ہے کہ تسلسل کے آٹھ اجزاء لینے سے ہم مثبت مقدار رد کرتے ہیں جس کی قیمت $\frac{1}{256}$ سے کم ہو گی۔ ابتدائی آٹھ اجزاء کا مجموعہ $0.664\,062\,5$ ہے۔ اس تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

مجموعہ اور تخمینی قیمت میں فرق $\frac{2}{3} - 0.664\,062\,5 = 0.002\,604\,166\,6$ ہے جو مثبت اور $\frac{1}{256} = 0.003\,906\,25$ سے کم ہے۔ □

مطلق ارتکاز

تعریف: تسلسل $\sum a_n$ اس صورت **مطلق مرتکز**[34] ہو گا جب مطلق قیمتوں کا مطابقتی تسلسل $\sum |a_n|$ مرتکز ہو۔

□

ہندسی تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

مطلق مرتکز ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

بدلتا ہارمونی تسلسل مطلق مرتکز نہیں ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا تسلسل (منفرج) ہارمونی تسلسل ہے۔

تعریف: جو تسلسل مرتکز ہو مگر مطلق مرتکز نہ ہو **مشروط مرتکز**[35] کہلاتا ہے۔

□

بدلتا ہارمونی تسلسل مشروط مرتکز ہے۔

مطلق ارتکاز دو وجوہات کی بنا اہم ہے۔ پہلی وجہ یہ ہے کہ ہمارے پاس مثبت اجزاء کے تسلسل کی ارتکاز کا اچھے پرکھ ہیں۔ دوسری وجہ یہ کہ کہ مطلق مرتکز تسلسل ہر صورت مرتکز ہو گا۔ یہی اگلے مسئلہ کا موضوع ہے۔

مسئلہ 9.10: **مطلق ارتکاز پرکھ**
اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو گا۔

ثبوت: ہر n کے لئے

$$-|a_n| \le a_n \le |a_n| \quad \implies \quad 0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$$

---

[34] absolutely convergent
[35] conditional convergent

ہو گا۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ مرتکز ہو گا اور بلا واسطہ تقابلی پرکھ کے تحت غیر منفی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

بھی مرتکز ہو گا۔ ہم مساوات $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ کی مدد سے $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کو دو مرتکز تسلسل کا فرق

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو گا۔

□

ہم مسئلہ 9.10 کو یوں بھی پڑھ سکتے ہیں کہ ہر مطلق مرتکز تسلسل مرتکز ہو گا البتہ ضروری نہیں ہے کہ مرتکز تسلسل مطلق مرتکز ہو۔

مثال 9.42: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

ہے جو مرتکز ہے۔یوں اصل تسلسل اس لئے مرتکز ہے کہ یہ مطلق مرتکز ہے۔ □

مثال 9.43: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \frac{|\sin 3|}{9} + \cdots$$

جس کا ارتکاز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ موازنہ کرنے سے دیکھا جا سکتا ہے جہاں ہر n کے لئے $|\sin n| \leq 1$ ہو گا۔ چونکہ اصل تسلسل مطلق مرتکز ہے، لہذا یہ مرتکز ہو گا۔ □

مثال 9.44: **بدلتا p تسلسل**

مثبت مستقل p کی صورت میں ترتیب $\{\frac{1}{n^p}\}$ گھٹتا ترتیب ہے جس کا حد صفر ہے۔ یوں بدلتا p تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \quad p > 0$$

مرتکز ہو گا۔

اگر $p > 1$ ہو تب یہ مطلق مرتکز تسلسل ہو گا۔ اگر $p \leq 1$ ہو تب یہ مشروط مرتکز تسلسل ہو گا۔

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \qquad \text{مشروط مرتکز}$$
$$1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots \qquad \text{مطلق مرتکز}$$

□

تسلسل کی ترتیب نو

مسئلہ 9.11: **مطلق مرتکز تسلسل کا مسئلہ ترتیب نو**
اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو اور ترتیب $\{a_n\}$ کے اجزاء کی ترتیب نو کر کے انہیں $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ لکھا جائے تب $\sum b_n$ مطلق مرتکز ہو گا اور درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(اس مسئلہ کی ثبوت کے خاکہ کے لئے سوال 9.420 دیکھیں۔)

مثال 9.45: ہم نے مثال 9.42 میں دیکھا کہ تسلسل

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

مطلق مرتکز ہے۔ اس کی ترتیب نو کرتے ہوئے ابتدائی جزو مثبت اور اس کے بعد دو منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں۔اس کے بعد تین مثبت اور چار منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایک ہی علامت کے k اجزاء کے بعد الٹ علامت کے $k+1$ اجزاء ہوں گے۔ ایسے تسلسل کے ابتدائی دس اجزاء درج ذیل ہوں گے۔

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} - \frac{1}{36} - \frac{1}{64} - \frac{1}{100} - \frac{1}{144} + \cdots$$

مسئلہ ترتیب نو کے تحت دونوں تسلسل ایک ہی عدد پر مرتکز ہوں گے۔ اس مثال میں (اگر ہم جانتے کہ ایسا ممکن ہے) ہم خوشی سے دوسرے تسلسل کی جگہ پہلا تسلسل استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس سے بھی بہتر ہوتا اگر ہم جانتے کہ ان دونوں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

(سوال 9.421 دیکھیں۔) □

مثال 9.46: بدلتے ہارمونی تسلسل کی ترتیب نو
بدلتا ہارمونی تسلسل

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\cdots$$

کی ترتیب نو سے منفرج یا مخصوص قیمت کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ کی ترتیب نو سے انفراج: اجزاء $\sum 1/(2n-1)$ کا مجموعہ $+\infty$ کو منفرج جبکہ $\sum(-1/2n)$ کا مجموعہ $-\infty$ کو منفرج ہے۔ ہم جتنے زیادہ طاق اجزاء کے بعد مجموعہ کیوں نہ لیں، آخر کار یہ تواتر سے پائے جانے والے اجزاء کا مجموعہ کسی بھی مقررہ قیمت سے بڑا ہو گا۔ اسی طرح ہم جتنے زیادہ منفی اجزاء کے بعد مجموعہ کیوں نہ لیں، آخر کار تواتر سے پائے جانے والے جفت اجزاء کا یہ مجموعہ کسی بھی مقررہ منفی قیمت سے زیادہ منفی ہو گا۔ اگر ہم چاہیں، ہم پہلے اتنے طاق اجزاء جمع کر سکتے ہیں کہ ان کا مجموعہ مثلاً $+3$ ہو اور اس کے بعد صرف جفت اجزاء جمع کرتے ہوئے مجموعے کو -4 تک پہنچائیں۔ اس کے بعد ہم غیر استعمال شدہ منفی اجزاء شامل کرتے ہوئے کل $+5$ حاصل کر کے اس کے ساتھ اتنے منفی اجزاء شامل کریں کہ -6 حاصل ہو، وغیرہ، وغیرہ۔ اس طرح ہم دونوں اطراف جھولا اختیاری زیادہ کر سکتے ہیں۔

ب. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ کی ترتیب سے 1 پر ارتکاز: ہم ترتیب نو سے کسی بھی مخصوص قیمت پر بدلتے ہارمونی تسلسل کو مرتکز کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ہم 1 پر مرتکز تسلسل حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم پہلے جزو $\frac{1}{1}$ سے شروع کر کے $\frac{1}{2}$ منفی کرتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{5}$ جمع کرتے ہوئے مجموعہ کو واپس 1 یا اس سے اوپر تک لاتے ہیں۔ اس کے بعد ہم متواتر منفی اجزاء جمع کرتے ہوئے مجموعہ 1 سے نیچے لے جاتے ہیں۔ ہم اسی طرح اجزاء جمع اور منفی کیے جاتے ہیں۔ جب مجموعہ 1 سے تجاوز کرے، ہم منفی اجزاء جمع کرتے ہیں حتٰی کہ مجموعہ 1 یا اس سے کم ہو جائے۔ اس کے بعد ہم مثبت اجزاء جمع کرتے ہیں جب تک مجموعہ 1 یا اس سے زیادہ نہ ہو۔ اس طریقہ کار کو غیر معینہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ $n\to\infty$ کرنے سے اصل تسلسل کے جفت اور طاق اجزاء کی قیمتیں 0 تک پہنچتی ہیں لہٰذا نئے تسلسل کا جزوی مجموعہ 1 کے قریب تر ہوتا جائے گا لہٰذا نئے تسلسل کا مجموعہ 1 پر مرتکز ہو گا۔ نیا تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{10} +\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\cdots$$

□

آپ نے دیکھا کہ مشروط مرتکز تسلسل کی ترتیب نو کر کے لامتناہی تعداد کے اجزاء جمع کرتے ہوئے اصل تسلسل سے بہت مختلف مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں ضروری ہے کہ مشروط مرتکز تسلسل کے اجزاء اسی ترتیب سے جمع کیے جائیں جس ترتیب سے یہ تسلسل میں پائے جاتے ہیں۔

سوالات

ارتکاز اور انفراج معلوم کرنا

سوال 9.361 تا سوال 9.370 میں کونسا بدلتا تسلسل مرتکز اور کونسا منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.361: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

جواب: مسئلہ 9.8 کے تحت ارتکاز

سوال 9.362: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

سوال 9.363: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^{n}$

جواب: انفراج؛ $a_n \not\to 0$

سوال 9.364: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n^{10}}$

سوال 9.365: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

جواب: مسئلہ 9.8 کے تحت ارتکاز

سوال 9.366: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

سوال 9.367: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\ln n^2}$

جواب: انفراج؛ $a_n \to \frac{1}{2}$

سوال 9.368: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

سوال 9.369: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}\right)$

جواب: مسئلہ 9.8 کے تحت ارتکاز

سوال 9.370: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

مطلق ارتکاز

سوال 9.371 تا سوال 9.404 میں کون سے تسلسل مطلق مرتکز، مرتکز اور منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.371: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$

جواب: مطلق مرتکز۔ مطلق قیمتوں کا تسلسل مرتکز ہندسی تسلسل ہے۔

سوال 9.372: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$

سوال 9.373: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

جواب: مشروط ارتکاز۔ $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ لیکن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ منفرج ہے۔

سوال 9.374: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

سوال 9.375: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

جواب: مطلق مرتکز۔ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 9.376: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

سوال 9.377: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+3}$

جواب: مشروط مرتکز۔ $\frac{1}{n+3}\to 0$ ہے لیکن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ منفرج ہے۔($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔)

سوال 9.378: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n^2}$

سوال 9.379: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

جواب: انفراج: $\frac{3+n}{5+n}\to 1$

سوال 9.380: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n^3)}$

سوال 9.381: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1+n}{n^2}$

جواب: مشروط مرتکز۔ $(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}) \to 0$ لیکن $\frac{1}{n} < \frac{1+n}{n^2}$ ہے۔

سوال 9.382: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

سوال 9.383: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (2/3)^n$

جواب: مطلق ارتکاز؛ جذری پرکھ

سوال 9.384: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[n]{10})$

سوال 9.385: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tan^{-1} n}{n^2+1}$

جواب: مطلق ارتکاز۔ تکملی پرکھ

سوال 9.386: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \ln n}$

سوال 9.387: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

جواب: منفرج؛ $a_n \not\to 0$

سوال 9.388: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$

سوال 9.389: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

جواب: مطلق مرتکز۔ تناسبی پرکھ

سوال 9.390: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-5)^{-n}$

سوال 9.391: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

جواب: مطلق مرتکز: $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n^2+2n+1}$

سوال 9.392: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

سوال 9.393: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

جواب: مطلق ارتکاز (مرتکز p تسلسل): $\left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right|=\frac{1}{n^{3/2}}$

سوال 9.394: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

سوال 9.395: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

جواب: مطلق مرتکز۔ جذری پرکھ

سوال 9.396: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

سوال 9.397: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n! n}$

جواب: منفرج: $a_n\to\infty$

سوال 9.398: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

سوال 9.399: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

جواب: مشروط مرتکز: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\to 0$ لیکن مطلق قیمتوں کا تسلسل منفرج ہوتا ہے۔ ($\sum\frac{1}{n}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔)

سوال 9.400: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+n}-n)$

سوال 9.401: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

جواب: منفرج: $a_n\to\frac{1}{2}\neq 0$

سوال 9.402: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

سوال 9.403: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sech} n$

جواب: مطلق مرتکز: $\operatorname{sech} n=\frac{2}{e^n+e^{-n}}=\frac{2e^n}{e^{2n}+1}<\frac{2e^n}{e^{2n}}=\frac{2}{e^n}$ اور $\frac{2}{e^n}$ مرتکز ہندسی تسلسل کا ایک جزو ہے۔

سوال 9.404: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{csch} n$

خلل کا اندازہ

سوال 9.405 تا سوال 9.408 میں ابتدائی چار اجزاء سے تخمینی مجموعہ حاصل کرنے سے پیدا خلل کا اندازہ لگائیں۔

سوال 9.405: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ اس تسلسل کا مجموعہ $\ln 2$ ہے۔

جواب: $\left|\text{خلل}\right|<0.2$

سوال 9.406: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n}$

سوال 9.407: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.01)^n}{n}$ جیسا آپ حصہ 9.10 میں دیکھیں گے اس تسلسل کا مجموعہ $\ln(1.01)$ ہے۔

جواب: $\left|\text{خلل}\right|<2\times10^{-11}$

سوال 9.408: $\frac{1}{1+t}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n t^n, \quad 0<t<1$

کیلکولیٹر کا استعمال

سوال 9.409 اور سوال 9.410 میں مجموعہ کی تخمینی قیمت تلاش کریں جس میں خلل کی مقدار 5×10^{-6} سے کم ہو۔

سوال 9.409: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ جیسا آپ حصہ 9.10 میں دیکھیں گے اس کا مجموعہ $\cos 1$ ہے جہاں 1 ریڈیئن میں ہے۔

جواب: 0.54030

سوال 9.410: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ جیسا آپ حصہ 9.10 میں دیکھیں گے اس کا مجموعہ e^{-1} ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.411: (الف) تسلسل $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{4}+\frac{1}{27}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{2^n}+\cdots$ مسئلہ 9.8 کے کس

ایک شرط کو مطمئن نہیں کرتا ہے؟ (ب) اس تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: (الف) $a_n \geq a_{n+1}$ (ب) $-\frac{1}{2}$

سوال 9.412: کیلکولیٹر
مسئلہ 9.8 کے شرائط کو مطمئن کرنے والے بدلتے تسلسل کا حد L کسی بھی دو یک بعد دیگرے جزوی مجموعوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ یوں ہم L کی اندازاً قیمت کے لئے اوسط $\frac{s_n+s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$ استعمال کر سکتے ہیں۔ بدلتے ہارمونی تسلسل کا تخمینی مجموعہ $s_{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}$ کا حساب لگائیں۔ ٹھیک ٹھیک مجموعہ $\ln 2 = 0.6931\cdots$ ہے۔

سوال 9.413: بدلتا تسلسل جو مسئلہ 9.8 کے شرائط مطمئن کرتا ہو کے جزوی مجموعہ کے باقی علامت
مسئلہ 9.9 کہتا ہے کہ جب مسئلہ 9.8 کے شرائط مطمئن کرنے والے تسلسل کے مجموعہ کو تخمیناً اس کے جزوی مجموعہ سے ظاہر کیا جائے تب تسلسل کے باقی اجزاء کے مجموعہ کی علامت پہلے غیر مستعمل جزو کی علامت ہو گی۔ اس فقرے کو ثابت کریں۔ (اشارہ: باقی اجزاء کو دو دو کی گروہوں میں جمع کریں۔)

سوال 9.414: دکھائیں کہ تسلسل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ کے ابتدائی $2n$ اجزاء کا مجموعہ درج ذیل تسلسل کے ابتدائی n اجزاء کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

کیا یہ تسلسل مرتکز ہیں؟ ابتدائی $2n+1$ اجزاء کا مجموعہ کتنا ہے؟ اگر تسلسل مرتکز ہوں تب ان کا مجموعہ کتنا ہے؟

سوال 9.415: دکھائیں کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ منفرج تب $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ بھی منفرج ہو گا۔

سوال 9.416: دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو تب $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ہو گا۔

سوال 9.417: دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دونوں مطلق مرتکز ہوں درج ذیل بھی مطلق مرتکز ہوں گے۔

ا. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (k عدد ہے)

سوال 9.418: مثال دے کر دکھائیں کہ مرتکز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور مرتکز $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ کے باوجود $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ منفرج ہو سکتا ہے۔

سوال 9.419: آپ چاہتے ہیں کہ مثال 9.46 میں ترتیب نو سے ایسا تسلسل حاصل کریں جس کا مجموعہ $-\frac{1}{2}$ ہو۔ نئے تسلسل کو $-\frac{1}{2}$ سے شروع کریں۔ جب بھی مجموعہ $-\frac{1}{2}$ کے برابر یا اس سے کم ہو، یک بعد دیگرے مثبت اجزاء شامل کریں حتیٰ کہ مجموعہ $-\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو۔ اس کے بعد منفی اجزاء شامل کریں حتیٰ کہ مجموعہ $-\frac{1}{2}$ کے برابر یا اس سے کم ہو۔ اسی طرح چلتے جائیں حتیٰ کہ جزوی مجموعات $-\frac{1}{2}$ سے تین مرتبہ تجاوز کر جائیں اور یہیں رک جائیں یا اس سے ایک قدم پہلے رک جائیں۔ اگر ابتدائی n نئے اجزاء کا مجموعہ s_n ہو تب (n, s_n) ترسیم کر کے جزوی مجموعات کا رویہ واضح کریں۔

سوال 9.420: مسئلہ 9.11 کے ثبوت کا خاکہ

ا. فرض کریں ϵ ایک مثبت حقیقی عدد ہو۔ مزید فرض کریں $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ ہیں۔ دکھائیں کہ کسی اشاریہ N_1 کے لئے اور کسی اشاریہ $N_2 \geq N_1$ کے لئے $\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ اور $|s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔ چونکہ تمام اجزاء $a_1, a_2, \cdots, a_{N_2}$ ترتیب $\{b_n\}$ میں کہیں نا کہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ایک ایسا اشاریہ $N_3 \geq N_2$ پایا جائے گا کہ اگر $n \geq N_3$ ہو تب $(\sum_{k=1}^{n} b_k) - s_{N_2}$ زیادہ سے زیادہ اجزاء a_m کا مجموعہ ہو گا جہاں $m \geq N_1$ ہے۔ یوں اگر $n \geq N_3$ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + \left|s_{N_2} - L\right|$$
$$\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + \left|s_{N_2} - L\right| < \epsilon$$

ب. جزو-الف کی بحث کے تحت اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مرتکز اور $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ہو گا۔ اب دکھائیں کہ چونکہ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ پر $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ مرتکز ہو گا۔

سوال 9.421:

ا. دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو اور $b_n = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$ ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مرتکز ہو گا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اسی طرح دکھائیں کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو اور $c_n = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ a_n & a_n < 0 \end{cases}$ ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ مرتکز ہو گا۔

دوسرے لفظوں میں مطلق مرتکز تسلسل کی صورت میں اس کے مثبت اجزاء مرتکز تسلسل بناتے ہیں اور اس کے منفی اجزاء مرتکز تسلسل بناتے ہیں۔ مزید $b_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ اور $c_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ کی بنا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ہو گا۔

سوال 9.422: یہاں کیا غلط ہے:
بدلتے ہارمونی تسلسل

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

کے دونوں اطراف کو 2 سے ضرب دے کر

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

حاصل کریں۔ ایک جیسے نسب نما کی اجزاء جمع کریں، مثلاً $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}$ ۔یوں

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

حاصل ہو گا جہاں بائیں ہاتھ کا تسلسل وہی ہے جہاں سے ہم نے شروع کیا تھا۔یوں $2S = S$ ہو گا جس کے دونوں اطراف کو S سے تقسیم کر کے $2 = 1$ ملتا ہے۔

سوال 9.423: $N > 1$ کی صورت میں مسئلہ 9.8 میں تسلسل کا ارتکاز شکل 9.22 کی طرح ترسیم بنا کر دکھائیں۔

9.8 طاقتی تسلسل

اب چونکہ ہم لامتناہی تسلسل کا ارتکاز پرکھ سکتے ہیں لہٰذا ہم اب لامتناہی کثیر رکنی کا مطالعہ کر سکتے ہیں جن کا ذکر حصہ 9.3 کی شروع میں کیا گیا۔ تعریف کی رو سے ان کثیر رکنیوں کو کسی متغیر، مثلاً x ، کے طاقتوں کا لامتناہی تسلسل لکھا جاتا ہے لہٰذا ہم ان کثیر رکنیوں کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ کثیر رکنیوں کی طرح، طاقتی تسلسلوں کو جمع، منفی، ضرب، تفرق اور تکمل کر کے نئے طاقتی تسلسل حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل اور ارتکاز

ہم باضابطہ تعریف سے ابتدا کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $x = 0$ کے لحاظ سے **طاقتی تسلسل**[36] سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے۔

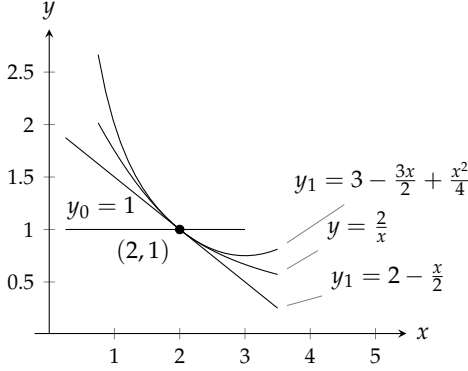
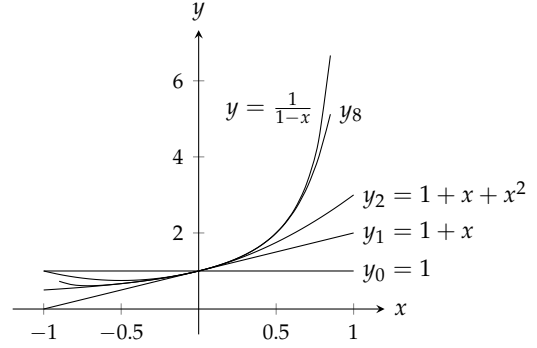
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{9.22}$$

نقطہ $x = a$ کے لحاظ سے طاقتی تسلسل سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{9.23}$$

جس میں **مرکز**[37] a اور **عددی سر**[38] c_0 ، c_1 ، c_2 ، $\cdots$ ، c_n ، $\cdots$ مستقل ہیں۔

□

power series[36]
center[37]
coefficients[38]

شکل 9.24: تفاعل $f(x) = \frac{2}{x}$ اور اس کی ابتدائی تین تخمینی کثیر رکنیاں (مثال 9.48)۔

شکل 9.23: تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی چار تخمینی کثیر رکنیاں (مثال 9.47)۔

مساوات 9.23 میں $a = 0$ پر کرنے سے طاقتی تسلسل کی خصوصی روپ مساوات 9.22 حاصل ہوتی ہے۔

مثال 9.47: مساوات 9.22 میں تمام عددی سر 1 لینے سے درج ذیل ہندسی طاقتی تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

اس ہندسی تسلسل کا پہلا جزو 1 اور نسبت x ہے۔ یہ $|x| < 1$ کے لئے $\frac{1}{1-x}$ پر مرتکز ہے۔ اس حقیقت کا اظہار درج ذیل لکھ کر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{9.24}$$

□

اب تک مساوات 9.23 کو ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے مجموعہ کا کلیہ استعمال کرتے آ رہے ہیں۔ ہم اب اپنی توجہ کا مرکز تبدیل کرتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے جزوی مجموعات کو کثیر رکنیاں $P_n(x)$ تصور کرتے ہیں جو بائیں ہاتھ تفاعل کی تخمین دیتے ہیں۔ صفر کے قریب x کی قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء کا مجموعہ لے کر تفاعل کی اچھی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ہاں $x = -1$ یا $x = 1$ کے قریب ہمیں تفاعل کی اچھی تخمین حاصل کرنے کی خاطر تسلسل کے زیادہ اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا شکل 9.23 میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی تخمینی کثیر رکنیاں $y_n = P_n(x)$ دکھائی گئی ہیں۔

مثال 9.48: درج ذیل طاقتی تسلسل مساوات 9.23 کی طرح ہے جہاں $a=2$ ، $c_0=1$ ، $c_1=-\frac{1}{2}$ ، $c_2=\frac{1}{4}$ ، $\cdots$ ، $c_n=(-1/2)^n$ ہیں۔

$$1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\cdots+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n(x-2)^n+\cdots \tag{9.25}$$

یہ ایک ہندسی تسلسل ہے جس کا ابتدائی جزو 1 اور نسبت $r=-\frac{x-2}{2}$ ہے۔ یہ تسلسل $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ یعنی $0<x<4$ کے لئے مرکوز ہے۔اس کا مجموعہ

$$\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{2}{x}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{2}{x}=1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2+\cdots+\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n(x-2)^n+\cdots,\quad 0<x<4$$

ہو گا۔ مساوات 9.25 کا تسلسل 2 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے $f(x)=\frac{2}{x}$ کی کارآمد تخمینی کثیر رکنیاں پیدا کرتا ہے (شکل 9.24):

$$P_0(x)=1$$
$$P_1(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)=2-\frac{x}{2}$$
$$P_2(x)=1-\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{4}(x-2)^2=3-\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{4}$$

□

مثال 9.49: درج ذیل طاقتی تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے ارتکاز پذیر ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad \text{(ا)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad \text{(ب)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \quad \text{(ج)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots \quad \text{(د)}$$

حل: تناسبی پرکھ کا اطلاق تسلسل $\sum|u_n|$ پر کریں جہاں زیر غور تسلسل n جزو u_n ہے۔ نتائج شکل 9.25 میں دکھائے گئے ہیں۔

شکل 9.25: وقفہ ارتکاز برائے مثال 9.49

ا. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|$
یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لئے مطلق مرتکز ہے۔ $|x| > 1$ کے لئے چونکہ اس کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا جبکہ $x = 1$ پر ہمیں بدلتا ہارمونی تسلسل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ حاصل ہوتا ہے جو مرتکز ہے۔ $x = -1$ پر ہمیں ہارمونی تسلسل کا نفی $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$ ملتا ہے جو منفرج ہے۔ یوں تسلسل (ا) وقفہ $-1 < x \leq 1$ کے لئے مرتکز اور اس وقفہ کے باہر منفرج ہو گا۔

ب. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \to x^2$
$x^2 < 1$ کے لئے تسلسل مطلق مرتکز ہے۔ چونکہ $x^2 > 1$ پر n واں جزو صفر پر مرکوز نہیں ہے لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا۔ $x = 1$ پر تسلسل $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ دیتا ہے جو مسئلہ بدلتا تسلسل کے تحت مرتکز ہو گا۔ $x = -1$ پر بھی بدلتا تسلسل ملتا ہے جو ارتکاز کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ مرتکز ہو گا۔ نقطہ $x = 1$ پر تسلسل کی قیمت نقطہ $x = -1$ پر تسلسل کی قیمت کا منفی ہے۔ تسلسل (ب) وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر مرتکز جب کہ اس کے باہر منفرج ہو گا۔

ج. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$
تسلسل تمام x کے لئے مطلق مرتکز ہے۔

د. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$
ماسوائے $x = 0$ تسلسل x کی تمام قیمتوں کے لئے منفرج ہو گا۔

□

ہم نے مثال 9.49 میں تسلسل کو ارتکاز یا انفراج کے لئے پرکھنا دیکھا۔

طاقتی تسلسل کا پرکھ برائے ارتکاز

قدم ا: تناسبی پرکھ (یا n واں جذر پرکھ) استعمال کرتے ہوئے وہ وقفہ تلاش کریں جس پر تسلسل مطلق مرتکز ہو۔ عموماً یہ وقفہ کھلا وقفہ ہو گا:

$$|x - a| < R \quad \text{یعنی} \quad a - R < x < a + R$$

قدم ب: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ متناہی ہو تب ہر آخری نقطہ پر ارتکاز یا انفراج کے لئے تسلسل کو پرکھیں (جیسا مثال 9.49-ا اور ب میں کیا گیا)۔ آپ تقابلی پرکھ، تکملی پرکھ یا بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کر سکتے ہیں۔
قدم ج: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ $a - R < x < a + R$ ہو تب $|x - a| > R$ کے لئے تسلسل منفرج ہو گا (تسلسل یہاں مشروط مرتکز بھی نہیں ہو گا) چونکہ x کی ان قیمتوں کے لئے n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔

□

مسئلہ 9.12: **طاقتی تسلسل کا مسئلہ ارتکاز**
اگر $x = c \neq 0$ کے لئے تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ مرتکز ہو تب $|x| < |c|$ کے لئے یہ مطلق مرتکز ہو گا۔ اگر $x = d$ کے لئے تسلسل منفرج ہو تب $|x| > |d|$ کے لئے یہ منفرج ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ مرتکز ہے۔ تب $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ ہو گا۔ یوں ایسا عدد N پایا جائے گا کہ تمام $n \geq N$ کے لئے $|a_n c^n| < 1$ ہو گا، یعنی:

$$|a_n| < \frac{1}{|c^n|} \qquad n \geq N \tag{9.26}$$

اب ایسا x لیں کہ $|x| < |c|$ ہو اور درج ذیل پر غور کریں۔

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_{N-1}\, x^{N-1}\right| + \left|a_N\, x^N\right| + \left|a_{N+1}\, x^{N+1}\right| + \cdots$$

جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ سے قبل متناہی تعداد کے اجزاء پائے جاتے ہیں اور ان کا مجموعہ متناہی ہے۔ مساوات 9.26 کی بنا جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ اور اس کے بعد تمام اجزاء درج ذیل سے کم ہوں گے۔

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} + \cdots \tag{9.27}$$

اب مساوات 9.27 ہندسی تسلسل ہے جس کا نسبت $r = \left|\frac{x}{c}\right|$ ہے جو $|x| < |c|$ کی بنا 1 سے کم ہے۔ یوں مساوات 9.27 کا تسلسل مرتکز ہے لہٰذا اصل تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔ یوں مسئلے کا پہلا حصہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلے کا دوسرا حصہ مسئلے کے پہلے حصہ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر $x = d$ کے لئے تسلسل منفرج اور x_0 پر تسلسل مرتکز ہو جہاں $|x_0| > |d|$ ہے تب ہم مسئلے کے پہلے حصے میں $c = x_0$ لے کر فیصلہ کر سکتے ہیں کہ d پر تسلسل مطلق مرتکز ہو گا، لیکن ایک ہی وقت میں تسلسل مرتکز اور منفرج دونوں نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں اگر تسلسل d پر منفرج ہو تب تمام $|x| > |d|$ کے لئے یہ منفرج ہو گا۔

□

علامتیت سادہ رکھنے کی خاطر مسئلہ 9.12 میں تسلسل $\sum a_n x^n$ کے ارتکاز کی بات کی گئی۔ تسلسل $\sum a_n (x-a)^n$ کے ارتکاز کی بات کرتے ہوئے ہم $x - a$ کی جگہ x' پر کر کے نتیجہ کو تسلسل $\sum a_n (x')^n$ پر لاگو کر سکتے ہیں۔

ارتکاز کا رداس اور وقفہ

اب تک دیکھے گئے مثالوں اور مذکورہ بالا مسئلے کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ طاقتی تسلسل کا رویہ درج ذیل میں سے ایک ہو گا۔

تسلسل $\sum c_n(x-a)^n$ کے ممکنہ رویے

ا. ایک ایسا مثبت عدد R پایا جاتا ہے کہ $|x-a|>R$ کے لئے تسلسل منفرج جبکہ $|x-a|<R$ کے لئے مطلق مرتکز ہے۔ ہر ایک آخری نقطہ $x=a-R$ اور $x=a+R$ پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔

ب. ہر x پر تسلسل مطلق مرتکز ہے ($R=\infty$)۔

ج. تسلسل $x=a$ کے لئے مرتکز جبکہ باقی تمام x کے لئے منفرج ہے ($R=0$)۔

پہلی صورت میں ارتکاز کے نقطوں کا سلسلہ متناہی وقفہ ہے جس کو **وقفہ ارتکاز**[39] کہتے ہیں۔ ہم مذکورہ بالا مثالوں سے جانتے ہیں کہ وقفہ ارتکاز کھلا، نصف کھلا، یا بند ہو سکتا ہے اور یہ دیے گئے تسلسل پر منحصر ہو گا۔ وقفہ ارتکاز جس قسم کا بھی ہو، R کو تسلسل کا **رداس ارتکاز**[40] کہیں گے اور تسلسل کے ان نقطوں کا سلسلہ، جن کے لئے تسلسل مرتکز ہو، کا کم سے کم بالائی حد بندی $a+R$ ہو گا۔ اس وقفہ کی اندرونی ہر نقطہ پر ارتکاز مطلق ہو گا۔ اگر x کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے ایک تسلسل مطلق مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں اس تسلسل کا **رداس ارتکاز لامتناہی** ہے۔ اگر یہ صرف $x=a$ کے لئے مرتکز ہو تب اس کا **رداس ارتکاز صفر** ہو گا۔

جزو در جزو تفرق

اعلٰی احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ وقفہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9.13: **مسئلہ جزو در جزو تفرق**
وقفہ $a-R<x<a+R$ پر مرتکز تسلسل $\sum c_n(x-a)^n$ درج ذیل تفاعل f دیتا کرتا ہے، جہاں $R>0$ ہے۔

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad a-R<x<a+R$$

وقفہ ارتکاز کے اندر ایسے تفاعل کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ ان تفرق کو حاصل کرنے کے لئے ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$
$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

---

[39] interval of convergence
[40] radius of convergence

لیتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے ہر اندرونی نقطہ کے لئے یہ تفرقی تسلسل مرتکز ہوں گے۔

انتباہ: ضروری نہیں کہ جزو در جزو تفرق دیگر تسلسل کے لئے بھی قابل استعمال ہو۔ مثال کے طور پر تکونیاتی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔ البتہ اس کا جزو در جزو تفرق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ ہے جو تمام x کے لئے منفرج ہے۔

مثال 9.50: درج ذیل تفاعل $f(x)$ کے تفرق $f'(x)$ اور $f''(x)$ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad -1 < x < 1 \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

□

جزو در جزو تکمل

اعلٰی احصاء کا دوسرا مسئلہ کہتا ہے کہ پورے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9.14: **مسئلہ جزو در جزو تکمل**
فرض کریں $(R > 0)$ $a - R < x < a + R$ میں

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

مرتکز ہو تب $a-R<x<a+R$ میں

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

مرتکز ہو گا اور $a-R<x<a+R$ میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}+C$$

مثال 9.51: وقفہ $-1\le x\le 1$ میں $\tan^{-1}x$ کا تسلسل درج ذیل تفاعل پہچانیں۔

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots \qquad -1\le x\le 1$$

حل: ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$f'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\cdots \qquad -1\le x\le 1$$

یہ ہندسی تسلسل ہے جس کا پہلا جزو 1 اور نسبت $-x^2$ ہے لہٰذا

$$f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

ہو گا۔ہم اب $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\tan^{-1}x+C$$

چونکہ $x=0$ پر $f(x)$ کا تسلسل صفر ہے لہٰذا $C=0$ ہو گا۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\tan^{-1}x \qquad -1<x<1 \tag{9.28}$$

ہم حصہ 9.11 میں دیکھیں گے کہ یہ تسلسل $x=\pm 1$ پر بھی $\tan^{-1}x$ کو مرکوز ہے۔

دھیان رہے کہ اس مثال میں ابتدائی (اصل) تسلسل دیے گئے وقفہ کے دونوں آخری سروں پر بھی مرتکز ہے لیکن مسئلہ 9.13 صرف اس وقفہ کے اندر تسلسل کی ارتکاز کی یقین دہانی کرتا ہے۔ □

ہم دیکھیں گے کہ $x = \mp 1$ کے لئے بھی یہ تسلسل $\tan^{-1} x$ پر مرکوز ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مثال 9.51 میں اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے دونوں آخری نقطوں کے لئے اصل تسلسل مرتکز ہے، البتہ مسئلہ 9.13 صرف اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کی اندرون میں تفرقی تسلسل کے ارتکاز کی ضمانت دیتا ہے۔

مثال 9.52: **وقفہ $-1 < x < 1$ کے لئے $\ln(1+x)$ کا تسلسل**
کھلا وقفہ $-1 < t < 1$ کے لئے تسلسل

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

مرکوز ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x < 1\end{aligned}$$

□

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ $x = 1$ پر تسلسل عدد $\ln 2$ کو مرکوز ہے مگر مسئلہ اس کی ضمانت نہیں دیتا ہے۔

فنیات مطالعہ تسلسل

تسلسل کئی طریقوں سے تکمل کی طرح ہوتے ہیں۔ جیسے بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح الٹ تفرق رکھنے والے تفاعل کی تعداد قابل تکمل تفاعل کی تعداد سے بہت کم ہے، x کی صورت میں طاقتی تسلسل جو صریحاً بنیادی تفاعل کے ساتھ x وقفہ پر اتفاق کرتے ہوں کی تعداد ان طاقتی تسلسل کی تعداد سے بہت کم ہے جو کسی x وقفہ پر منفرج ہوں۔ جیسے مطلق تکمل کے مطالعہ میں اعدادی تکمل مددگار ثابت ہوتا ہے، اسی طرح مطالعہ تسلسل میں کمپیوٹر ترسیمات کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ عموماً کمپیوٹر الجبرائی نظام میں x کی مخصوص قیمتوں پر طاقتی تسلسل کا مطالعہ کرنا ممکن ہوتا ہے۔

تیز مرتکز تسلسل کے مجموعہ کا اندازہ ہمیں کمپیوٹر دے سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $31 \le n \le 200$ لے لئے ہم تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ [مثال 9.33-ب] کے ابتدائی جزوی مجموعات آکٹیو[41] سے $S_n = 1.606\,695\,152$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ 10 ہندسوں تک اس تسلسل کا مجموعہ $1.606\,695\,152$ ہو گا۔یقیناً

$$\sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^n-1} = \sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}(2-\frac{1}{2^{n-1}})} < \sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{199}} < 1.25 \times 10^{-60}$$

[41] کمپیوٹر کا الجبرائی پروگرام

کے تحت 200 اجزاء کے بعد باقی قابل نظر انداز ہے۔

البتہ نہایت آہستہ مرتکز یا منفرج تسلسل کی صورت میں کمپیوٹر مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے بلکہ اس کے نتائج بالکل غلط ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10}n}$ کے جزوی مجموعات کا حساب کرنے کی کوشش کریں۔ یہاں اجزاء نہایت چھوٹے ہیں اور سیکڑوں اجزاء کا مجموعہ بھی نہایت چھوٹا ہے جس سے ہمیں غلط فہمی ہو سکتی ہے کہ یہ تسلسل مرتکز ہے۔ اس تسلسل کو $\frac{1}{10^{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ لکھ کر صاف ظاہر ہے کہ یہ منفرج ہے۔

ہم حصہ 9.10 میں **اندازہ غلطی**[42] کا مطالعہ کرنے کے بعد اعدادی نتائج کی بہتر تشریح کرنے کے قابل ہوں گے۔

طاقتی تسلسل کا ضرب

ایک اعلیٰ مسئلہ کہتا ہے کہ مطلق مرتکز تسلسل کو کثیر رکنی کی طرح آپس میں ضرب دیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ 9.15: طاقتی تسلسل کے ضرب کا مسئلہ
اگر $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ اور $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ وقفہ $|x| < R$ پر مطلق مرتکز ہوں اور

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ہو تب $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ وقفہ $|x| < R$ پر $A(x)B(x)$ کو مطلق مرتکز ہو گا۔

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

مثال 9.53: درج ذیل ہندسی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

کو اپنے ساتھ ضرب کرتے ہوئے وقفہ $|x| < 1$ پر $\frac{1}{(1-x)^2}$ کا طاقتی تسلسل حاصل کریں۔

حل: فرض کریں

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

---
[42] error estimation

اور

$$\begin{aligned} c_n &= \underbrace{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_kb_{n-k} + \cdots + a_nb_0}_{n+1 \text{ اجزاء}} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ ایک}} = n+1 \end{aligned}$$

اب مسئلہ 9.15 کے تحت $\frac{1}{(1-x)^2}$ کا تسلسل

$$\begin{aligned} A(x)\cdot B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \end{aligned}$$

ہو گا جو $|x| < 1$ کے لئے مطلق مرتکز ہو گا۔

درج ذیل کی بنا مثال 9.50 بھی یہی نتیجہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

□

سوالات

ارتکاز کے وقفے

سوال 9.424 تا سوال 9.455 میں (الف) تسلسل کا رداس اور وقفہ ارتکاز تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے تسلسل (ب) مطلق مرتکز(ج) مشروط مرتکز ہے؟

سوال 9.424: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

جواب: (الف) $1, -1 < x < 1$ (ب) $-1 < x < 1$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.425: $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

سوال 9.426: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(4x+1)^n$

جواب: (الف) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} < x < 0$ (ب) $-\frac{1}{2} < x < 0$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.427: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

سوال 9.428: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

جواب: (الف) $-8 < x < 12$ (ب) $10, -8 < x < 12$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.429: $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

سوال 9.430: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

جواب: (الف) $-1 < x < 1$ (ب) $1, -1 < x < 1$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.431: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n}$

سوال 9.432: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

جواب: (الف) $[-3,3]$ (ب) $3, [-3,3]$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.433: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

سوال 9.434: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

جواب: (الف) تمام x کے لئے ∞ (ب) تمام x کے لئے (ج) کوئی نہیں

سوال 9.435: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

سوال 9.436: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

جواب: (الف) تمام x کے لئے ∞ (ب) تمام x کے لئے (ج) کوئی نہیں

سوال 9.437: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$

سوال 9.438: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

جواب: (الف) 1 (ب) $-1 \le x < 1$ (ج) $-1 < x < 1$، $x = -1$

سوال 9.439: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

سوال 9.440: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

جواب: (الف) 5 (ب) $-8 < x < 2$ (ج) $-8 < x < 2$، کوئی نہیں

سوال 9.441: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

سوال 9.442: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

جواب: (الف) 3 (ب) $-3 < x < 3$ (ج) $-3 < x < 3$، کوئی نہیں

سوال 9.443: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

سوال 9.444: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

جواب: (الف) 1 (ب) $-1 < x < 1$ (ج) $-1 < x < 1$، کوئی نہیں

سوال 9.445: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln x)x^n$

سوال 9.446: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

جواب: (الف) 0 (ب) $x = 0$ (ج) $x = 0$، کوئی نہیں

سوال 9.447: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

سوال 9.448: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

جواب: (الف) 2 (ب) $-4 < x \le 0$ (ج) $-4 < x < 0$، $x = 0$

سوال 9.449: $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n(n+1)(x-1)^n$

سوال 9.450: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ آپ سوال 9.269 کی مدد لے سکتے ہیں۔

جواب: (الف) $1,\ -1 \le x \le 1$ (ب) $-1 \le x \le 1$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.451: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln n}$ آپ سوال 9.268 کی مدد لے سکتے ہیں۔

سوال 9.452: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

جواب: (الف) $\frac{1}{4},\ 1 \le x \le \frac{3}{2}$ (ب) $1 \le x \le \frac{3}{2}$ (ج) کوئی نہیں

سوال 9.453: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

سوال 9.454: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$

جواب: (الف) $1,\ (-1-\pi) \le x < (1-\pi)$
(ب) $(-1-\pi) < x < (1-\pi)$ (ج) $x=-1-\pi$

سوال 9.455: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

سوال 9.456 تا سوال 9.461 میں تسلسل کی ارتکاز کا وقفہ تلاش کریں اور اس وقفہ میں تسلسل کے مجموعہ کو x کا تفاعل لکھیں۔

سوال 9.456: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

جواب: $-1 < x < 3,\ \frac{4}{3+2x-x^2}$

سوال 9.457: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

سوال 9.458: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$

جواب: $0 < x < 16,\ \frac{2}{4-\sqrt{x}}$

سوال 9.459: $\sum_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$

سوال 9.460: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

جواب: $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ \frac{3}{2-x^2}$

سوال 9.461: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.462: درج ذیل تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے مرتکز ہے؟

$$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{4}(x-3)^2+\cdots+(-\frac{1}{2})^n(x-3)^n+\cdots$$

اس کا مجموعہ کتنا ہے؟ اس تسلسل کا جزو در جزو تفرق لینے سے کونسا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ یہ نیا تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے مرتکز ہو گا؟ اس کا مجموعہ کیا ہے؟

جواب: $1<x<5,\ \frac{2}{x-1},\ 1<x<5,\ \frac{-2}{(x-1)^2}$

سوال 9.463: اگر آپ سوال 9.462 کا تسلسل جزو در جزو تکمل کریں تب کونسا تسلسل حاصل ہو گا؟ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ نیا تسلسل مرتکز ہو گا؟ اس مجموعے کا دوسرا نام کیا ہے؟

سوال 9.464: درج ذیل تسلسل تمام x کے لئے $\sin x$ پر مرکوز ہے۔

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+\cdots$$

ا. $\cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء دریافت کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے حاصل تسلسل مرتکز ہو گا۔

ب. $\sin x$ کے تسلسل میں x کی جگہ $2x$ پر کرنے ایسا تسلسل حاصل کریں جو تمام x کے لئے $\sin 2x$ پر مرتکز ہو۔

ج. ضرب تسلسل اور جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے $2\sin x\cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء حاصل کریں۔ جزو-ب کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

جواب: (الف) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$ ؛ تمام x کے لئے مرتکز ہے
(ب) اور (ج) $2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \frac{2^9x^9}{9!} - \frac{2^{11}x^{11}}{11!} + \cdots$

سوال 9.465: درج ذیل تسلسل تمام x کے لئے e^x پر مرکوز ہے۔

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

ا. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو دوبارہ e^x کا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ب. $\int e^x \, \mathrm{d}x$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو دوبارہ e^x کا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ج. e^x کے تسلسل میں x کی جگہ $-x$ پر کر کے e^{-x} کا تسلسل حاصل کریں۔ اب e^x کے تسلسل کو e^{-x} کے تسلسل کے ساتھ ضرب کر کے $e^x \cdot e^{-x}$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء تلاش کریں۔

سوال 9.466: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے $\tan x$ پر مرتکز ہے۔

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

ا. $\ln|\sec x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہو گا؟

ب. $\sec^2 x$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہو گا؟

ج. اگلے سوال میں $\sec x$ کے تسلسل کا مربع تلاش کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔

جواب: (الف) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14175}, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$
(ب) $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \cdots, \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال 9.467: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے $\sec x$ پر مرتکز ہے۔

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \cdots$$

ا. $\ln|\sec x + \tan x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہو گا؟

ب. $\sec x \tan x$ کے تسلسل کے ابتدائی چار اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہو گا؟

ج. گزشتہ سوال میں $\tan x$ کے تسلسل کو $\sec x$ کے تسلسل کے ساتھ ضرب کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔

سوال 9.468: مرتکز طاقتی تسلسل کی یکتائی

ا. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لئے مرتکز اور ایک دوسرے کے برابر تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ اور $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ کی صورت میں تمام n کے لئے $a_n = b_n$ ہو گا۔ (اشارہ: فرض کریں $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ہے۔ جزو در جزو تفرق لے کر ثابت کریں کہ a_n اور b_n دونوں $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ کے برابر ہیں۔)

ب. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لئے $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ کی صورت میں تمام n کے لئے $a_n = 0$ ہو گا۔

سوال 9.469: تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ کا مجموعہ تلاش کرنے کی خاطر $\frac{1}{1-x}$ کو ہندسی تسلسل کی صورت میں لکھ کر دونوں اطراف کا x کے ساتھ تفرق لیں، دونوں اطراف کو x سے ضرب دے کر دونوں اطراف کا تفرق لیں اور آخر کار دونوں اطراف کو x سے ضرب کریں۔ اب $x = \frac{1}{2}$ پر کریں۔ کیا حاصل ہوتا ہے؟

سوال 9.470: آخری نقطوں پر ارتکاز
ایک مثال سے دکھائیں کہ ایک طاقتی تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے آخری سروں پر اس تسلسل کا ارتکاز مشروط یا مطلق ہو سکتا ہے۔

سوال 9.471: ایسے طاقتی تسلسل بنائیں جن کے وقفہ ارتکاز درج ذیل ہوں۔

ا. $(-3, 3)$ ب. $(-2, 0)$ ج. $(1, 5)$

9.9 ٹیلر اور مکلارن تسلسل

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ وہ تفاعل جو لامتناہی گنا قابل تفرق ہوں طاقتی تسلسل پیدا کرتے ہیں جنہیں ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔ عموماً ایسے تسلسل، پیداکار تفاعل کے کارآمد تخمینی کثیر رکنیاں پیش کرتے ہیں۔

تسلسلی اظہار

ہم جانتے ہیں کہ اپنے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقتی تسلسل کا مجموعہ استمراری تفاعل ہوتا ہے جس کے تفرقات ہر درجے کے پائے جاتے ہیں۔ لیکن کیا ہم یہی کچھ دوسری رخ بھی کہہ سکتے ہیں؟ یعنی کیا ایسا تفاعل $f(x)$ جس کے وقفہ I ہر رتبہ کے تفرقات پائے جاتے ہوں کو I میں طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو گا؟ اگر ایسا ممکن ہو، تب اس تسلسل کے عددی سر کیا ہوں گے؟

ہم $f(x)$ کو مثبت رداس ارتکاز کے طاقت تسلسل کا مجموعہ

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

تصور کر کے اس آخری سوال کا جواب با آسانی دے سکتے ہیں۔ وقفہ I میں بار بار جزو در جزو تفرق لینے سے

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ یوں تمام n کے لئے n گنا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{اجزاء کا مجموعہ جن میں جزو ضربی } (x-a) \text{ پایا جاتا ہے}$$

چونکہ یہ تمام مساوات $x = a$ پر کارآمد ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ f''(a) &= 1\cdot 2a_2 \\ f'''(a) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 \end{aligned}$$

یا عمومی طور پر

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ وقفہ I پر f کو مرتکز کسی بھی طاقتی تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ کے عددی سروں کا ایک حیرت کن نقش پیش کرتا ہے۔ اگر ایسا تسلسل پایا جاتا ہو (جو ہم اب تک نہیں جانتے کہ پایا جاتا ہے) تب ایسا تسلسل صرف ایک ہو سکتا ہے جس کے n عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

اگر f کا تسلسلی روپ پایا جاتا ہو تب یہ تسلسل لازماً درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \tag{9.29}$$

لیکن کیا وقفہ I، جس کا مرکز $x = a$ ہو، پر لامتناہی گنّا قابل تفرق اختیاری تفاعل f سے شروع کر کے مساوات 9.29 کا تسلسل پیدا کر کے I کی اندرون میں ہر x پر $f(x)$ کو مرکوز تسلسل حاصل ہو گا؟ جیسا ہم دیکھیں گے بعض تفاعل کے لئے ایسا ہو گا اور بعض کے لئے ایسا نہیں ہو گا۔

ٹیلر اور مکلارن تسلسل

تعریف: فرض کریں کسی وقفہ، جس میں اندرونی نقطہ a پایا جاتا ہو، میں تفاعل f کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ تب نقطہ $x = a$ پر f کا **ٹیلر تسلسل**[43] درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

نقطہ $x = 0$ پر f کے پیدا کردہ (درج ذیل) ٹیلر تسلسل کو **مکلارن تسلسل**[44] کہتے ہیں۔

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

□

مثال 9.54: نقطہ $a = 2$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل حاصل کریں۔ یہ تسلسل $\frac{1}{x}$ پر کہاں مرتکز ہو گا۔

---

[43] Taylor series
[44] Maclaurin series

حل: ہمیں $f(2)$ ، $f'(2)$ ، $f''(2)$ ، $\dots$ درکار ہیں۔ تفرق لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\frac{1}{2^2} \\
f''(x) &= 2!x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!} &= \frac{1}{2^3} \\
f'''(x) &= -3!x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!} &= -\frac{1}{2^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

یوں ٹیلر تسلسل

$$\begin{aligned}
f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots \\
= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots
\end{aligned}$$

ہو گا جو ایک ہندسی تسلسل ہے جس کا پہلا رکن $\frac{1}{2}$ اور نسبت $r = -\frac{(x-2)}{2}$ ہے۔ یہ وقفہ $|x-2| < 2$ میں مطلق مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ

$$\frac{1/2}{1+(x-2)/2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}$$

ہے۔ اس مثال میں نقطہ $a = 2$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل وقفہ $|x-2| < 2$ یا $0 < x < 4$ میں $\frac{1}{x}$ پر مرتکز ہے
□

ٹیلر کثیر رکنیاں

نقطہ a پر قابل تفرق تفاعل f کی خط بندی درج ذیل کثیر رکنی ہے۔

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

اگر a پر f کے بلند رتبی تفرقات پائے جاتے ہوں تب ہر پائے جانے والے تفرق کے لئے اس کی بلند رتبی تخمینی کثیر رکنی بھی پائی جائے گی۔ ان کثیر رکنیوں کو f کی ٹیلر کثیر رکنیاں کہتے ہیں۔

ہم رتبہ n کی بجائے درجہ n ٹیلر کثیر رکنی کی بات کرتے ہیں چونکہ $f^{(n)}(a)$ صفر بھی ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر نقطہ $x=0$ پر $\cos x$ کی ابتدائی دو ٹیلر کثیر رکنیاں $P_0(x)=1$ اور $P_1(x)=1$ ہیں۔ رتبہ اول کثیر رکنی کا درجہ صفر ہے نا کہ اکائی۔

تعریف: فرض کریں کسی وقفہ، جس کی اندرون میں نقطہ a پایا جاتا ہو، میں تفاعل f کے k رتبی تفرق پائے جاتے ہیں جہاں $k=1,2,\cdots,N$ ہے۔ تب 0 سے N تک ہر عدد صحیح کے لئے نقطہ a پر f کا پیدا کردہ n **رتبی ٹیلر تسلسل** درج ذیل کثیر رکنی ہو گا۔

$$\begin{aligned}P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots\\+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\end{aligned}$$

□

جیسا $x=a$ پر f کی خط بندی، a کی پڑوس میں f کی بہترین خطی تخمین مہیا کرتی ہے اسی طرح بلند رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں اپنے درجہ کے لحاظ سے بہترین تخمینی کثیر رکنی مہیا کرتے ہیں۔

مثال 9.55: نقطہ $x=0$ پر $f(x)=e^x$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل اور ٹیلر کثیر رکنی حاصل کریں۔

حل: درج ذیل

$$f(x)=e^x,\quad f'(x)=e^x,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x)=e^x$$

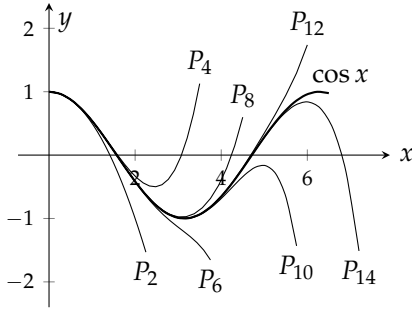
کی بنا

$$f(0)=e^0=1,\quad f'(0)=1,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(0)=1$$

ہوں گے۔یوں $x=0$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\\=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\\=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

تعریف کی رو سے یہی e^x کا مکلارن تسلسل بھی ہو گا۔ ہم حصہ 9.10 میں دیکھیں گے کہ ہر x کے لئے یہ تسلسل e^x پر مرتکز ہے۔

شکل 9.26: قوت نمائی تفاعل $f(x)=e^x$ کی ٹیلر کثیر رکنیاں (مثال 9.55)

شکل 9.27: کوسائن اور اس کی ٹیلر کثیر رکنیاں (مثال 9.56)

نقطہ $x=0$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنی درج ذیل ہوں گی

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

یعنی نقطہ $x=0$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں

$$P_1(x)=1+x,\quad P_2=1+x+\frac{x^2}{2!},\quad P_3=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

ہوں گی جو $x=0$ کی پڑوس میں e^x کے بہت قریب ہے (9.26)۔ □

مثال 9.56: نقطہ $x=0$ پر تفاعل $f(x)=\cos x$ کا ٹیلر تسلسل اور ٹیلر کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

حل: تفاعل اور اس کے تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(x)&=\cos x & f'(x)&=-\sin x\\
f''(x)&=-\cos x & f^{(3)}(x)&=\sin x\\
&\vdots\\
f^{(2n)}(x)&=(-1)^n\cos x & f^{(2n+1)}&=(-1)^{n+1}\sin x
\end{aligned}$$

نقطہ 0 پر کوسائن کی قیمتیں 1 جبکہ سائن کی قیمتیں 0 ہیں لہٰذا

$$f^{(2n)}(0)=(-1)^n,\quad f^{(2n+1)}(0)=0$$

ہوں گے۔ نقطہ 0 پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \\ &= 1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

تعریف کی رو سے یہی $\cos x$ کا مکلارن تسلسل بھی ہو گا۔ ہم حصہ 9.10 میں دیکھیں گے کہ تمام x کے لئے یہ تسلسل $\cos x$ کو مرکوز ہو گا۔

چونکہ $f^{(2n+1)}(0)=0$ ہے لہٰذا $2n$ اور $2n+1$ رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں ایک دوسرے جیسی ہوں گی:

$$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

آپ شکل 9.27 میں دیکھ سکتے ہیں کہ $x=0$ کی پڑوس میں یہ کثیر رکنیاں $\cos x$ کے کتنے قریب ہیں۔ چونکہ y محور کے لحاظ سے ترسیمات تشاکلی ہیں لہٰذا انہیں صرف $x\geq 0$ کے لئے دکھایا گیا ہے۔

کثیر رکنیاں $P_{2n}(x)$ کوسائن تفاعل پر $n\to\infty$ کرنے سے مرکوز ہوتی ہیں۔ ہم $x=0$ پر کوسائن اور اس کے تفرقات کی قیمتیں جانتے ہوئے کسی بھی فاصلہ پر $\cos x$ کا رویہ جان سکتے ہیں۔ □

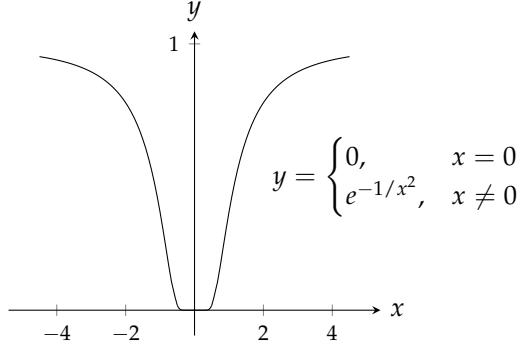
ایسے لامتناہی گنا قابل تفرق تفاعل جنہیں صرف الگ تھلگ نقطوں پر ٹیلر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہوں حقیقتاً بہت کم پائے جاتے ہیں۔

مثال 9.57: ایک تفاعل $f(x)$ جس کا ٹیلر تسلسل ہر x پر مرتکز ہے لیکن یہ تسلسل صرف $x=0$ پر $f(x)$ کو مرتکز ہے۔

یہ (کافی محنت کے بعد) دکھایا جا سکتا ہے کہ $x=0$ پر

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-1/x^2}, & x\neq 0\end{cases}$$

کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے اور تمام n کے لئے $f^{(n)}(0)=0$ ہیں۔ اس کا مطلب ہوا کہ $x=0$ پر f کا پیدا کردہ تسلسل

$$\begin{aligned} f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots \\ &= 0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+\cdots \\ &= 0+0+\cdots+0+\cdots \end{aligned}$$

شکل 9.28: صفر پر تفاعل کا ترسیم اتنا (افقی) سیدھا ہے کے یہاں اس کے تمام تفرقات 0 ہیں۔

ہو گا جو ہر x کے لئے مرتکز ہے (جس کا مجموعہ 0 ہے) لیکن یہ صرف $x = 0$ پر $f(x)$ کو مرتکز ہے۔ تفاعل $y = e^{-1/x^2}$ کی استمراری توسیع کا ترسیم (شکل 9.28) صفر پر اتنا (افقی) سیدھا ہے کہ اس کے تمام تفرقات یہاں 0 کے برابر ہیں۔ $\square$

دو سوالات اب بھی رہتے ہیں۔

ا. ہم x کی کن قیمتوں کے لئے توقع کر سکتے ہیں کہ ایک تفاعل کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل اسی تفاعل پر مرتکز ہو گا؟

ب. کسی دیے گئے وقفہ پر ایک تفاعل کا ٹیلر کثیر رکنی تخمین کتنی درستگی کے ساتھ اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے؟

ان سوالات کے جوابات اگلے حصہ میں ٹیلر کا ایک مسئلہ دیتا ہے۔

سوالات

ٹیلر تسلسل کا حصول

سوال 9.472 تا سوال 9.479 میں a پر f کے پیدا کردہ 0 ، 1 ، 2 اور 3 رتبی ٹیلر کثیر رکنی حاصل کریں۔

سوال 9.472: $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

جواب: $P_0(x) = 0$ ، $P_1(x) = x - 1$ ، $P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$
$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

سوال 9.473: $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

سوال 9.474: $f(x)=\frac{1}{x}, \quad a=2$

جواب: $P_0(x)=\frac{1}{2}$ ، $P_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$ ، $P_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2$ ، $P_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$

سوال 9.475: $f(x)=\frac{1}{x+2}, \quad a=0$

سوال 9.476: $f(x)=\sin x, \quad a=\frac{\pi}{4}$

جواب: $P_0(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $P_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})$ ، $P_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2$ ، $P_3(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{\sqrt{2}}{12}(x-\frac{\pi}{4})^3$

سوال 9.477: $f(x)=\cos x, \quad a=\frac{\pi}{4}$

سوال 9.478: $f(x)=\sqrt{x}, \quad a=4$

جواب: $P_0(x)=2$ ، $P_1(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)$ ، $P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$ ، $P_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$

سوال 9.479: $f(x)=\sqrt{x+4}, \quad a=0$

مکلارن تسلسل کا حصول

سوال 9.480 تا سوال 9.491 میں دیے گئے تفاعل کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

سوال 9.480: e^{-x}

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

سوال 9.481: $e^{x/2}$

سوال 9.482: $\frac{1}{1+x}$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots$

سوال 9.483: $\frac{1}{1-x}$

سوال 9.484: $\sin 3x$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

سوال 9.485: $\sin \frac{x}{2}$

سوال 9.486: $7\cos(-x)$
جواب: $7\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

سوال 9.487: $5\cos \pi x$

سوال 9.488: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

سوال 9.489: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

سوال 9.490: $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$
جواب: $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

سوال 9.491: $(x+1)^2$

ٹیلر تسلسل کی تلاش

سوال 9.492 تا سوال 9.499 میں $x = a$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل تلاش کریں۔

سوال 9.492: $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$
جواب: $8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$

سوال 9.493: $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$

سوال 9.494: $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$
جواب: $21 - 36(x+2) + 25(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$

سوال 9.495: $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$

سوال 9.496: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a = 1$
جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$

سوال 9.497: $f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad a = 0$

سوال 9.498: $f(x)=e^x, \quad a=2$
جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$

سوال 9.499: $f(x)=2^x, \quad a=1$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.500: نقطہ $x=a$ پر e^x کا پیدا کردہ تسلسل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$e^x=e^a[1+(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots]$$

سوال 9.501: نقطہ $x=1$ پر e^x کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل تلاش کریں۔ سوال 9.500 میں حاصل کلیہ کے ساتھ اپنے جواب کا موازنہ کریں۔

سوال 9.502: فرض کریں $x=a$ پر $f(x)$ کے n رتبہ تک تمام تفرقات پائے جاتے ہوں۔ دکھائیں کہ $x=a$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنی اور اس کے ابتدائی n تفرقات کی قیمتیں وہیں ہیں جو $x=a$ پر f اور اس کے ابتدائی n تفرقات کی قیمتیں ہیں۔

سوال 9.503: درجہ $n \leq$ کے تمام کثیر رکنیوں میں سب سے بہتر تخمین n رتبی کثیر رکنی دیتی ہے۔ فرض کریں $f(x)$ ایک وقفہ جس کا مرکز $x=a$ ہو پر قابل تفرق ہے اور $g(x)=b_0+b_1(x-a)+\cdots+b_n(x-a)^n$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ n اور جس کے عددی سر مستقل b_0 ، $\cdots$ ، b_n ہیں۔فرج کریں $E(x)=f(x)-g(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط

ا. $E(a)=0$ نقطہ $x=a$ پر تخمینی خلل صفر ہے۔

ب. $\lim_{x\to a}\frac{E(x)}{(x-a)^n}=0$ $(x-a)^n$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

لاگو کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یوں $P_n(x)$ وہ واحد n کے برابر یا اس سے کم درجہ کی کثیر رکنی ہے جس کا خلل $x=a$ پر صفر اور $(x-a)^n$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

دو درجی تخمینات

نقطہ $x=a$ پر دوگنا قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی پیدا کردہ 2 رتبی ٹیلر کثیر رکنی کو $x=a$ پر f کی **دو درجی تخمین**[45] کہتے ہیں۔ سوال 9.504 تا سوال 9.509 میں $x=0$ پر f کی (الف) خط بندی (1 رتبی ٹیلر کثیر رکنی) اور (ب) دو درجی تخمین تلاش کریں۔

سوال 9.504: $f(x)=\ln(\cos x)$
جواب: $L(x)=0,\ Q(x)=-\frac{x^2}{2}$

سوال 9.505: $f(x)=e^{\sin x}$

سوال 9.506: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
جواب: $L(x)=1,\ Q(x)=1+\frac{x^2}{2}$

سوال 9.507: $f(x)=\cosh x$

سوال 9.508: $f(x)=\sin x$
جواب: $L(x)=x,\ Q(x)=x$

سوال 9.509: $f(x)=\tan x$

9.10 ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے

اس حصہ میں ان دو سوالات کا جواب دیا جائے گا جن کے جوابات حصہ 9.9 میں نہیں دیے گئے۔

ا. کب ایک ٹیلر تسلسل اپنے پیدا کردہ تفاعل پر مرکوز ہو گا؟

ب. کسی بھی وقفہ پر ایک تفاعل کے ٹیلر کثیر رکنیاں اس تفاعل کی کتنی درست تخمین دیتی ہیں؟

[45] quadratic approximation

مسئلہ 9.16:
مسئلہ ٹیلر
اگر $[a, b]$ یا $[b, a]$ پر f اور اس کے n تفرقات f' ، f'' ، $\cdots$ ، $f^{(n)}$ استمراری ہوں اور (a, b) یا (b, a) پر $f^{(n)}$ قابل تفرق ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c موجود ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

مسئلہ ٹیلر درحقیقت مسئلہ اوسط قیمت کی عمومی شکل ہے (سوال 9.548)۔ مسئلہ اوسط قیمت کی عمومی صورت مسئلہ ٹیلر ہے۔ اس حصہ کے آخر میں مسئلہ ٹیلر کا ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

مسئلہ ٹیلر کو استعمال کرتے ہوئے ہم عموماً a کو مستقل جبکہ b کو غیر تابع متغیر رکھنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں ہم b کی جگہ x پر کرتے ہیں۔ اس تبدیلی کے بعد یہ مسئلہ درج ذیل پڑھا جائے گا۔

ضمنی نتیجہ 9.2: مسئلہ ٹیلر کا ضمنی نتیجہ
مسئلہ ٹیلر
اگر وقفہ I ، جس میں a پایا جاتا ہو، میں f کے ہر رتبی تفرقات پائے جاتے ہوں، تب ہر مثبت عدد صحیح n اور I میں ہر x کے لئے

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{9.30}$$

ہو گا جہاں

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{9.31}$$

ہے جبکہ a اور x کے بیچ c کوئی نقطہ ہے۔

مسئلہ ٹیلر کو اس طرح بیان کرنے سے یہ کہتا ہے کہ I میں ہر x کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ذرہ رک کر اس قابل ذکر مساوات پر غور کریں۔ یہ کلیہ وقفہ I پر کسی بھی n کے لئے f کی اسی رتبے کی تخمینی کثیر رکنی دیتی ہے اور اس تخمین سے پیدا خلل کا کلیہ بھی دیتی ہے۔

مساوات 9.30 کو **کلیہ ٹیلر**[46] کہتے ہیں۔ تفاعل $R_n(x)$ کو وقفہ I پر f کی تخمین $P_n(x)$ کا n **رتبی باقی** یا **جزو خلل** کہتے

[46] Taylor's formula

ہیں۔ اگر I میں تمام x کے لئے $n \to \infty$ سے $R_n(x) \to 0$ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $x = a$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل I پر f کو مرکوز ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

مثال 9.58: تفاعل e^x کا مکلارن تسلسل
دکھائیں کہ $x = 0$ پر $f(x) = e^x$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل ہر حقیقی x کے لئے f کو مرکوز ہے۔

حل: تمام وقفہ $(-\infty, \infty)$ میں اس تفاعل کے ہر رتبی تفرقات پائے جاتے ہیں۔ مساوات 9.30 اور مساوات 9.31 تفاعل $f(x) = e^x$ اور $a = 0$ لیتے ہوئے

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad \text{(مثال 9.55)}$$

اور

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{0 اور } x \text{ کے بیچ کسی } c \text{ کے لئے}$$

دیتے ہیں۔ چونکہ e^x متغیر x کے ساتھ بڑھتا تفاعل ہے، لہٰذا $e^0 = 1$ اور e^x کے بیچ e^c پایا جائے گا۔ جب x منفی ہو تب c بھی منفی اور $e^c < 1$ ہو گا۔ جب x صفر ہو تب $e^x = 1$ اور $R_n(x) = 0$ ہو گا۔ جب x مثبت ہو تب c بھی مثبت اور $e^c < e^x$ ہو گا۔ یوں

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x \le 0$$

اور

$$\left|R_n(x)\right| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x > 0$$

ہوں گے۔ آخر میں، چونکہ تمام x کے لئے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{(حصہ 9.2)}$$

ہے لہٰذا $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے یہ تسلسل e^x کو مرکوز ہو گا۔

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

□

باقی کا اندازہ

عموماً $R_n(x)$ کا اندازہ مثال 9.58 کی طرح لگایا جا سکتا ہے۔ اندازہ لگانے کی یہ ترکیب اتنی آسان ہے کہ مستقل میں استعمال کرنے کی غرض سے ہم اس کو بطور ایک مسئلہ بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 9.17: **مسئلہ اندازہ باقی**
اگر ایسے مثبت مستقل M اور r ہوں کہ a اور x کے بشمول اور ان کے بیچ تمام t کے لئے $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq Mr^{n+1}$ ہو تب مسئلہ ٹیلر میں جزو باقی درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|R_n(x)\right| \leq M \frac{r^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

اگر یہ شرائط تمام n کے لئے مطمئن ہوں اور مسئلہ ٹیلر کے باقی تمام شرائط کو f مطمئن کرتا ہو تب یہ تسلسل $f(x)$ کو مرکوز ہو گا۔

سادہ ترین مثال میں ہم $r = 1$ لے سکتے ہیں بشرطیکہ f اور اس کے تفرقات کی مقدار کا حد کوئی مستقل M ہو۔ دیگر صورتوں میں ہمیں r کو بھی لینا ہو گا۔ مثال کے طور پر اگر $f(x) = 2\cos(3x)$ ہو تب ہر تفرق جزو ضربی 3 دیگا لہٰذا r کو 1 سے بڑا منتخب کرنا لازمی ہو گا۔ اس مخصوص مثال میں ہم $r = 3$ اور $M = 2$ منتخب کر سکتے ہیں۔

مسئلہ اندازہ باقی اور مسئلہ ٹیلر استعمال کرتے ہوئے ہم اب ارتکاز کے مسائل حل کر سکتے ہیں۔ جیسا آپ دیکھیں گے، ہم ان سے کسی تفاعل کو تخمیناً ٹیلر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی درستگی بھی جان سکتے ہیں۔

مثال 9.59: تفاعل $\sin x$ کا مکلارن تسلسل
دکھائیں کہ تمام x کے لئے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل $\sin x$ کو مرکوز ہے۔

حل: تفاعل اور اس کے تفرقات

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x \\ &\vdots \\ f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x \end{aligned}$$

ہیں لہٰذا

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

ہوں گے۔ تسلسل میں صرف طاق طاقتی اجزاء پائے جائیں گے اور $n = 2k + 1$ کے لئے مسئلہ ٹیلر کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

تفاعل $\sin x$ کے تمام تفرقات کی مطلق قیمتیں 1 یا اس سے کم ہیں لہٰذا ہم اندازہ باقی کے مسئلہ میں $M = 1$ اور $r = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

چونکہ کسی بھی x کے لئے $k \to 0$ سے $\left(|x|^{2k+2} / (2k+2)\right) \to 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $R_{2k+1}(x) \to 0$ ہو گا اور تمام x کے لئے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل $\sin x$ کو مرکوز ہو گا۔

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{9.32}$$

□

مثال 9.60: تفاعل $\cos x$ کا مکلارن تسلسل
دکھائیں کہ تمام x کے لئے $\cos x$ کا مکلارن تسلسل $\cos x$ کو مرکوز ہے۔

حل: ہم مثال 9.56 میں حاصل $\cos x$ کی کثیر رکنی کے ساتھ جزو باقی جمع کر کے $\cos x$ کا کلیہ ٹیلر حاصل کرتے ہیں جس میں $n = 2k$ ہو گا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x)$$

چونکہ کوسائن کی مطلق قیمت 1 کے برابر یا اس سے کم ہوتی ہے لہٰذا اندازہ باقی کے مسئلہ $M = 1$ اور $r = 1$ کے ساتھ درج ذیل دیگا۔

$$\left|R_{2k}(x)\right| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

چونکہ x کی ہر قیمت کے لئے، $k \to \infty$ سے $R_{2k}(x) \to 0$ حاصل ہو گا لہٰذا ہر x کے لئے یہ تسلسل $\cos x$ کو مرکوز ہو گا۔

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{9.33}$$

□

مثال 9.61: ترکیب بدل سے مکلارن تسلسل کا حصول
تفاعل $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

حل: ہم $\cos x$ کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ $2x$ پر کر کے $\cos 2x$ کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \qquad \text{مساوات 9.33 میں } x \text{ کی جگہ } 2x\\ &= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\end{aligned}$$

وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر مساوات 9.33 مطمئن ہوتی ہے لہٰذا وقفہ $-\infty < 2x < \infty$ پر بھی یہ مطمئن ہو گی۔یوں نیا تسلسل تمام x کے لئے مرتکز ہو گا۔ سوال 9.554 دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل در حقیقت $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل ہے۔ □

مثال 9.62: مکلارن تسلسل کا حصول بذریعہ ضرب
تفاعل $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

حل: ہم $\sin x$ کے مکلارن تسلسل کو x سے ضرب دے کر $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل حاصل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned}x \sin x &= x\Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\Big)\\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

چونکہ $\sin x$ کا تسلسل تمام x کے لئے مرتکز ہے لہٰذا یہ نیا تسلسل بھی تمام x کے لئے مرتکز ہو گا۔سوال 9.554 دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل در حقیقت $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل ہے۔ □

حذفی خلل

تمام x کے لئے e^x کا مکلارن تسلسل e^x کو مرکوز ہے۔ اس کے باوجود کسی مخصوص درستگی تک نتائج حاصل کرنے کے لئے درکار اجزاء کی تعداد جاننا ضروری ہو گا۔ مسئلہ اندازہ باقی ہمیں یہ معلومات فراہم کرتا ہے۔

مثال 9.63: e کی قیمت تلاش کریں جس میں خلل 10^{-6} سے کم ہو۔

حل: ہم مثال 9.58 کے نتیجہ میں $x = 1$ لے کر

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

لکھتے ہیں جہاں 0 اور 1 کے بیچ کسی c پر درج ذیل ہو گا۔

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!}$$

اس مثال کے لئے ہم فرض کرتے ہیں کہ $e < 3$ ہے۔ چونکہ $0 < c < 1$ کے لئے $1 < e^c < 3$ ہے لہٰذا یقیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

تجربہ سے $\frac{1}{9!} > 10^{-6}$ اور $\frac{1}{10!} < 10^{-6}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہمیں $(n+1)$ کو کم از کم 10، یا n کو کم از کم 9 لینا ہو گا۔ خلل کو 10^{-6} سے کم رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718\,282$$

□

مثال 9.64: خلل کی مقدار کو 3×10^{-4} سے کم رکھتے ہوئے ہم x کی کن قیمتوں کے لئے $\sin x$ کو $x - \frac{x^3}{3!}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں؟

حل: ہر غیر صفر x کے لئے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل ایک بدلتا تسلسل ہے۔ مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ (مسئلہ 9.9) کے تحت

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} \bigg| + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

کو $\frac{x^3}{3!}$ کے بعد حذف کرنے سے خلل

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}$$

سے زیادہ نہیں ہو گا۔ یوں اگر

$$\frac{\left|x^5\right|}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \implies \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514 \quad \text{محفوظ رہنے کے لئے نیچے پور و پور}$$

ہو تب خلل 3×10^{-4} سے کم یا اس کے برابر ہو گا۔ مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ ہمیں وہ کچھ بتاتا ہے جو مسئلہ اندازہ باقی ہمیں نہیں بتاتا، یعنی، چونکہ مثبت x کے لئے $\frac{x^5}{120}$ مثبت ہو گا لہٰذا $\sin x$ کا اندازہ $x - \frac{x^3}{3!}$ در حقیقت اصل قیمت سے کم ہو گا۔

شکل 9.29 میں $\sin x$ اور اس کی کئی تخمینی ٹیلر کثیر رکنیاں دکھائی گئی ہیں۔ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر کثیر رکنی $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ اور تفاعل $\sin x$ کے ترسیمات بالکل ایک دوسرے جیسے ہیں۔

آپ سوچ رہے ہوں گے کہ مسئلہ اندازہ باقی اور مسئلہ اندازہ بدلتا تسلسل کے نتائج میں سے کونسا اندازہ بہتر ہے۔ اگر ہم

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3$$

لکھیں تب مسئلہ اندازہ باقی کے تحت

$$|R_3| \le 1 \cdot \frac{|x|^4}{4!} = \frac{|x|^4}{24}$$

ہو گا جو اتنا بہتر نہیں ہے۔ لیکن اگر ہم $x - \frac{x^3}{3!} = 0 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4$ لکھیں جو 3 رتبی اور 4 رتبی ٹیلر کثیر رکنی ہے تب

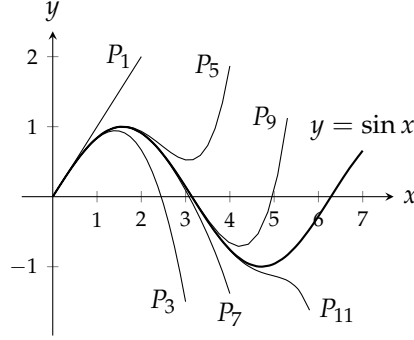
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$

لکھا جا سکتا ہے اور مسئلہ اندازہ باقی میں $M = r = 1$ لیتے ہوئے

$$|R_4| \le 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

حاصل ہو گا۔ یہی نتیجہ مسئلہ اندازہ بدلتا تسلسل سے حاصل ہوتا ہے۔ □

ٹیلر تسلسلوں کا ملاپ

ٹیلر تسلسلوں کے وقفات ارتکاز کے تقاطع پر، ٹیلر تسلسلوں کو جمع، منفی اور مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ یوں حاصل تسلسل بھی ٹیلر تسلسل ہوں گے۔ تفاعل $f(x) + g(x)$ کا ٹیلر تسلسل $f(x)$ اور $g(x)$ کے ٹیلر تسلسلوں کا مجموعہ ہو گا۔ اسی طرح 1 کے ساتھ $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل جمع کر کے نتیجہ کو 2 سے تقسیم کرنے سے $\frac{1+\cos 2x}{2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل ہو گا۔ $\sin x$ اور $\cos x$ کے مکلارن تسلسلوں کو جزو در جزو جمع کرنے سے $\sin x + \cos x$ کا مکلارن تسلسل حاصل ہو گا۔

شکل 9.29: $n \to \infty$ کرنے سے کثیر رکنیاں $\sin x$ پر مرکوز ہوتی ہیں

کلیہ یولر

آپ جانتے ہیں کہ $a + ib$ روپ کے عدد کو مخلوط عدد کہتے ہیں، جہاں a اور b مستقل ہیں جبکہ $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ اگر ہم e^x کے مکلارن تسلسل میں $x = i\theta$ پر کریں، جہاں θ حقیقی ہو، اور درج ذیل تعلقات استعمال کریں

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^2 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i, \quad \cdots$$

تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\
&= \Big(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\Big) + i\Big(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\Big) \\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

چونکہ ہم e کے خیالی طاقت کی تعریف نہیں جانتے ہیں لہٰذا درج بالا مساوات $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ کو ثابت نہیں کرتا ہے۔ البتہ یہ مساوات ہمیں $e^{i\theta}$ کی ایسی تعریف پیش کرنے کا طریقہ دیتی ہے جو باقی ان تمام چیزوں کے ساتھ مطابقت رکھتی ہو جنہیں ہم جانتے ہیں۔

تعریف: کسی بھی حقیقی عدد θ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{9.34}$$

□

مساوات 9.34 جو **کلیہ یولر**[47] کہلاتی ہے، کسی بھی مخلوط عدد $a + ib$ کے لئے ہمیں e^{a+ib} کی تعریف $e^a \cdot e^{ib}$ دیتی ہے۔

---
[47] Euler's formula

مسئلہ ٹیلر کا ثبوت

ہم $a < b$ فرض کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر ثابت کرتے ہیں۔ ($a > b$ کے لئے بھی ثبوت تقریباً ایسا ہے۔)

نقطہ $x = a$ پر ٹیلر کثیر رکنی

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

اور اس کے ابتدائی n تفرقات، تفاعل f اور اس کے ابتدائی n تفرقات کے موافق ہیں۔ اس میں $K(x-a)^{n+1}$ طرز کا جزو، جہاں K مستقل ہے، شامل کرنے سے یہ موافقت خراب نہیں ہوتی ہے چونکہ $x = a$ پر ایسا جزو اور اس کے تمام تفرقات صفر ہیں۔ نقطہ $x = a$ پر یہ نیا تفاعل

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x-a)^{n+1}$$

اور اس کے ابتدائی n تفرقات، f اور اس کے ابتدائی n تفرقات کے ساتھ موافقت رکھیں گے۔

ہم ایسا K منتخب کرتے ہیں کہ $x = b$ پر $y = \phi_n(x)$ کی منحنی اور اصل تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی ایک دوسری جیسی ہوں، یعنی:

$$f(b) = P_n(b) + K(b-a)^{n+1} \implies K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b-a)^{n+1}} \tag{9.35}$$

جب K کی قیمت مساوات 9.35 دیتی ہو تب وقفہ $[a, b]$ میں تمام x کے لئے اصل تفاعل f اور تخمینی تفاعل ϕ_n میں فرق درج ذیل تفاعل دیگا۔

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

ہم اب مسئلہ رول (حصہ 4.2) استعمال کرتے ہیں۔ پہلی بات، چونکہ $F(a) = F(b) = 0$ ہے اور $[a, b]$ پر F اور F' استمراری ہیں، ہم جانتے ہیں کہ

$$F'(c_1) = 0 \qquad (a, b) \text{ میں کسی } c_1 \text{ پر}$$

ہو گا۔ دوسری بات، چونکہ $F'(a) = F'(c_1) = 0$ ہے اور ساتھ ہی F' اور F'' دونوں $[a, c_1]$ پر استمراری ہیں، ہم جانتے ہیں کہ

$$F''(c_2) = 0 \qquad (a, c_1) \text{ میں کسی } c_2 \text{ پر}$$

ہو گا۔ یک بعد دیگرے F'' ، F''' ، . . . ، $F^{(n-1)}$ پر مسئلہ رول کی اطلاق سے درج ذیل مراد لیا جا سکتا ہے۔

(a, c_2) میں ایسا c_3 کہ $F'''(c_3) = 0$ ہو،

(a, c_3) میں ایسا c_4 کہ $F^{(4)}(c_4) = 0$ ہو،

$\vdots$

(a, c_{n-1}) میں ایسا c_n کہ $F^{(n)}(c_n) = 0$ ہو۔

آخر میں چونکہ $[a, c_n]$ پر $F^{(n)}$ استمراری اور (a, c_n) پر قابل تفرق ہے، اور $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$ ہے، مسئلہ رول سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ (a, c_n) میں ایسا عدد c_{n+1} پایا جاتا ہے کہ درج ذیل مطمئن ہو۔

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 \tag{9.36}$$

تفاعل $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ کا $n+1$ گنّا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!K \tag{9.37}$$

مساوات 9.36 اور مساوات 9.37 مل کر

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad (a, b) \text{ میں کسی } c = c_{n+1} \text{ پر} \tag{9.38}$$

دیتے ہیں۔ مساوات 9.35 اور مساوات 9.38 درج ذیل دیتے ہیں۔

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوالات

مکلارن تسلسل بذریعہ بدل

سوال 9.510 تا سوال 9.515 میں (مثال 9.61 کی طرح) ترکیب بدل سے تفاعل کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال 9.510: e^{-5x}

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2x^2}{2!} - \frac{5^3x^3}{3!} + \cdots$

سوال 9.511: $e^{-x/2}$

سوال 9.512: $5\sin(-x)$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=-5x+\frac{5x^3}{3!}-\frac{5x^5}{5!}+\frac{5x^7}{7!}+\cdots$

سوال 9.513: $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

سوال 9.514: $\cos\sqrt{x}$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$

سوال 9.515: $\cos\left(\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)$

مزید مکلارن تسلسل

سوال 9.516 تا سوال 9.527 میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال 9.516: xe^x

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{4!}+\cdots$

سوال 9.517: $x^2\sin x$

سوال 9.518: $\frac{x^2}{2}-1+\cos x$

جواب: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\cdots$

سوال 9.519: $\sin x-x+\frac{x^3}{3!}$

سوال 9.520: $x\cos\pi x$

جواب: $x-\frac{\pi^2x^3}{2!}+\frac{\pi^4x^5}{4!}-\frac{\pi^6x^7}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$

سوال 9.521: $x^2\cos(x^2)$

سوال 9.522: $\cos^2 x$ (اشارہ: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$)

جواب: $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}-\frac{(2x)^6}{2\cdot 6!}+\cdots$

سوال 9.523: $\sin^2 x$

سوال 9.524: $\frac{x^2}{1-2x}$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{n+2} = 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^3 + \cdots$

سوال 9.525: $x\ln(1+2x)$

سوال 9.526: $\frac{1}{(1-x)^2}$

جواب: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

سوال 9.527: $\frac{2}{(1-x)^3}$

اندازہ خلل

سوال 9.528: خلل کی مقدار 5×10^{-4} سے بڑھائے بغیر x کی کن قیمتوں کے لئے $\sin x$ کو $x - \frac{x^3}{6}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: $|x| < (0.06)^{1/5} < 0.56968$

سوال 9.529: اگر $\cos x$ کو $1 - \frac{x^2}{2}$ سے ظاہر کیا جائے اور $|x| < 0.5$ ہو تب خلل کا اندازہ لگائیں۔ کیا $1 - \frac{x^2}{2}$ اصل سے زیادہ یا کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.530: اگر $|x| < 10^{-3}$ ہو تب تخمین $\sin x = x$ کتنا درست ہو گا؟ x کی کن قیمتوں کے لئے $x < \sin x$ ہو گا؟

جواب: $\left|\text{خلل}\right| < \frac{(10^{-3})^3}{6} < 1.67 \times 10^{-10}, \quad -10^{-3} < x < 0$

سوال 9.531: چھوٹے x کے لئے تخمین $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ استعمال کیا جاتا ہے۔ خلل کا اندازہ $|x| < 0.01$ کی صورت میں لگائیں۔

سوال 9.532: تخمین $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ چھوٹے x کی صورت میں استعمال کیا جاتا ہے۔ مسئلہ اندازہ باقی استعمال کرتے ہوئے $|x| < 0.1$ کے لئے خلل تلاش کریں۔

جواب: $\left|\text{خلل}\right| < \frac{(3^{0.1})(0.1)^3}{6} < 1.87 \times 10^{-5}$

سوال 9.533: تفاعل e^x کا تسلسل $0 < x$ کی صورت میں بدلتا تسلسل ہو گا (سوال 9.532)۔ تفاعل e^x کی جگہ $1 + x + \frac{x^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ کی مدد سے $-0.1 < x < 0$ کی صورت میں خلل کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کا موازنہ سوال 9.532 کے نتیجہ کے ساتھ کریں۔

سوال 9.534: تخمین $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!}$ میں $|x| < 0.5$ کی صورت میں خلل کا اندازہ لگائیں۔ (اشارہ: R_4 استعمال کریں نا کہ R_3)
جواب: $0.000\,293\,653$

سوال 9.535: جب $0 \le h \le 0.01$ ہو، دکھائیں کہ e^h کی جگہ $1 + h$ استعمال کرنے سے پیدا خلل h کے $6\,\%$ سے تجاوز نہیں کرے گا۔ یہاں $e^{0.01} = 1.01$ استعمال کریں۔

سوال 9.536: تفاعل $\ln(1 + x)$ کو x کی کن مثبت قیمتوں کے لئے تخمیناً x لکھتے ہوئے خلل کی مقدار x کی $1\,\%$ سے تجاوز نہیں کرے گی؟
جواب: $|x| < 0.02$

سوال 9.537: آپ $x = 1$ پر $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{\pi}{4}$ کی اندازاً قیمت دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ نتیجہ 2 اعشاریہ درست حاصل کرنے کے لئے درکار اجزاء کی تعداد، مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال 9.538:

ا. تفاعل $\sin x$ کا مکلارن تسلسل اور مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad x \neq 0$$

ب. وقفہ $-5 \le x \le 5$ کے لئے $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ کے ساتھ $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ اور $y = 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیمات کے آپس میں تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال 9.539:

ا. تفاعل $\cos x$ کا مکلارن تسلسل اور مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2} \qquad x \neq 0$$

ب. وقفہ $-9 \le x \le 9$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ کے ساتھ $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ اور $y = \frac{1}{2}$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔

مکلارن تسلسل کا حصول اور اس کی پہچان

سوال 9.540 تا سوال 9.543 میں کسی نقطہ پر تفاعل $f(x)$ کے مکلارن تسلسل کی قیمت دی گئی ہے۔ تفاعل اور نقطہ کی نشاندہی کریں۔ تسلسل کے مجموعہ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 9.540: $(0.1)-\frac{(0.1)^3}{3!}+\frac{(0.1)^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^k(0.1)^{2k+1}}{(2k+1)!}+\cdots$

جواب: $\sin x, \quad x=0.1;\ \sin(0.1)$

سوال 9.541: $1-\frac{\pi^2}{4^2\cdot 2!}+\frac{\pi^4}{4^4\cdot 4!}-\cdots+\frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k}\cdot(2k!)}+\cdots$

سوال 9.542: $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{3^3\cdot 3}+\frac{\pi^5}{3^5\cdot 5}-\cdots+\frac{(-1)^k\pi^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)}+\cdots$

جواب: $\tan^{-1}x, \quad x=\frac{\pi}{3};\ \sqrt{3}$

سوال 9.543: $\pi-\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\pi^k}{k}+\cdots$

سوال 9.544: تفاعل $e^x\sin x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء دریافت کرنے کی خاطر e^x اور $\sin x$ کے مکلارن تسلسلوں کو ضرب کریں۔

جواب: $e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}+\cdots$

سوال 9.545: تفاعل $e^x\cos x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء دریافت کرنے کی خاطر e^x اور $\cos x$ کے مکلارن تسلسلوں کو ضرب کریں۔

سوال 9.546: تفاعل $\sin^2 x$ کے مکلارن تسلسل کو مماثل $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ کی مدد سے تلاش کریں۔ اس تسلسل کا تفرق لے کر $2\sin x\cos x$ کا مکلارن تسلسل دریافت کریں۔ اس کو پرکھیں کہ یہ $\sin 2x$ کا تسلسل ہے۔

سوال 9.547: تفاعل $\cos^2 x$ کا طاقتی تسلسل $\cos^2 x=\cos 2x+\sin^2 x$ کی مدد سے حاصل کریں (سوال 9.546)۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.548: مسئلہ ٹیلر اور مسئلہ اوسط قیمت
سمجھائیں کیسے مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ 4.4) درحقیقت مسئلہ ٹیلر کی ایک مخصوص صورت ہے۔

سوال 9.549: نقاط تصریف پر خط بندی (سوال 4.467 جاری)
دکھائیں اگر دوگنا قابل تفرق تفاعل f کا a $x=a$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہو، تب $x=a$ پر f کی خط بندی، $x=a$ پر f کی دو درجی تخمین بھی ہو گی۔ اس سے سمجھ آتی ہے کہ نقطہ تصریف پر مماس کیوں ترسیم پر اتنا بہتر بیٹھتا ہے۔

سوال 9.550: دو گنا تفرقی پرکھ
درج ذیل مساوات

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل پرکھ کی تصدیق کریں۔

فرض کریں f کا ایک گنا اور دو گنا استمراری تفرق پایا جاتا ہے اور $f'(a) = 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

ا. اگر ایک پورے وقفہ، جس کی اندرون میں a پایا جاتا ہو، میں $f'' \leq 0$ ہو تب f کا a پر مقامی زیادہ سے زیادہ پایا جائے گا۔

ب. اگر ایک پورے وقفہ، جس کی اندرون میں a پایا جاتا ہو، میں $f'' \geq 0$ ہو تب f کا a پر مقامی کم سے کم پایا جائے گا۔

سوال 9.551: کعبی تخمین
کلیہ ٹیلر میں $a = 0$ اور $n = 3$ لیتے ہوئے $x = 0$ پر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ کی معیاری کعبی تخمین تلاش کریں۔ اس تخمین کے خلل کی بالائی حد $|x| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

سوال 9.552:

ا. کلیہ ٹیلر میں $n = 2$ لیتے ہوئے $x = 0$ پر $f(x) = (1+x)^k$ (جہاں k مستقل ہے) کی دو درجی تخمین تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0,1]$ میں $k = 3$ کی صورت میں x کی کن قیمتوں کے لئے دو درجی تخمین کا خلل $\frac{1}{100}$ سے کم ہو گا؟

جواب: (الف) $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$ ، (ب) $0 \leq x \leq 100^{-1/3}$

سوال 9.553: π کی بہتر تخمین

ا. فرض کریں n اعشاریہ درستگی تک π کی تخمین P ہے۔ دکھائیں کہ $P = \sin P$ کی درستگی $3n$ اعشاریہ ہو گی۔ (اشارہ: $P = \pi + x$ لیں۔)

ب. کیلکولیٹر کی مدد سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال 9.554: تفاعل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ کا پیدا کردہ مکلارن تسلسل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ہے۔ ایک تفاعل جس کے طاقتی تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ کا رداس ارتکاز $c > 0$ ہو، کا مکلارن تسلسل وقفہ $(-c, c)$ کے ہر نقطہ پر f کو مرکوز ہو گا۔ اس کی تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ کا مکلارن تسلسل از خود $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ہو گا۔

نتیجتاً مکلارن تسلسل کو x سے ضرب دے کر حاصل تسلسل مثلاً

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

یا

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots$$

اور ساتھ ہی مرتکز طاقتی تسلسل کے تفرق یا تکمل سے حاصل تسلسل بھی ان تفاعل کے مکلارن تسلسل ہوں گے جو انہیں پیدا کرتے ہیں۔

سوال 9.555: طاق اور جفت تفاعل کے مکلارن تسلسل (سوال 9.468 جاری)
فرض کریں کھلا وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لئے $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مرتکز ہو۔ دکھائیں کہ

ا. اگر f جفت ہو تب $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ ہوں گے اور f کے تسلسل میں صرف جفت طاقت ہوں گے۔

ب. اگر f طاق ہو تب $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0$ ہوں گے اور f کے تسلسل میں صرف طاق طاقت ہوں گے۔

سوال 9.556: دوری تفاعل کے ٹیلر کثیر رکنیاں

ا. یہ دکھانے کی خاطر کہ ہر استمراری دوری تفاعل $f(x),\ -\infty < x < \infty$ محدود ہو گا، دکھائیں کہ ہر x کے لئے ایسا مثبت مستقل M موجود ہو گا کہ $|f(x)| \le M$ مطمئن ہو۔

ب. دکھائیں کہ $f(x) = \cos x$ کا ہر پیدا کردہ مثبت درجی ٹیلر کثیر رکنی، $|x|$ بڑھانے سے آخر کار $\cos x$ کی ترسیم سے دور ہٹے گا۔ شکل 9.27 میں اس عمل کو آپ دیکھ سکتے ہیں۔ شکل 9.29 میں $\sin x$ کی کثیر رکنیوں کا رویہ بھی ایسا ہے۔

سوال 9.557:

ا. منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}$ اور $y = \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$ کے ساتھ $y = \frac{1}{3}$ کو ترسیم کریں۔

ب. جو کچھ آپ کو نظر آتا ہے اس کو مکلارن تسلسل کی مدد سے سمجھائیں۔ درج ذیل کیا ہو گا؟

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$$

کلیہ یولر

سوال 9.558: درج ذیل e کی طاقتوں کو مساوات 9.34 کی مدد سے $a + ib$ کے روپ میں لکھیں۔

ا. $e^{-i\pi}$ ب. $e^{i\pi/4}$ ج. $e^{-i\pi/2}$

جواب: (ا) -1 ، (ب) $(1/\sqrt{2})(1+i)$ ، (ج) $-i$

سوال 9.559: یولر مماثل
درج ذیل مساوات 9.34 کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

سوال 9.560: تفاعل $e^{i\theta}$ اور $e^{-i\theta}$ کے معیاری مکلارن تسلسل استعمال کرتے ہوئے سوال 9.559 کے مماثل کی تصدیق کریں۔

سوال 9.561: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\cosh i\theta = \cos\theta$ ب. $\sinh i\theta = i\sin\theta$

سوال 9.562: تفاعل e^x اور $\sin x$ کے مکلارن تسلسلوں کو آپس میں ضرب کرتے ہوئے $e^x \sin x$ کے مکلارن تسلسل کے x^5 تک اجزاء تلاش کریں۔ یہ تسلسل $e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$ کا خیالی حصہ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اپنے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ تفاعل $e^x \sin x$ کا تسلسل x کی کن قیمتوں کے لئے مرتکز ہو گا؟
جواب: $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$ تمام x کے لئے مرتکز ہے۔

سوال 9.563: حقیقی a اور b کے لئے ہم $e^{(a+ib)x}$ کی تعریف درج ذیل مساوات لیتے ہیں۔

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

اس مساوات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$$

یوں تفرق کا جانا پہچانا قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{kx} = ke^{kx}$ حقیقی k کے ساتھ ساتھ مخلوط k کے لئے بھی درست ہے۔

سوال 9.564: تفاعل $e^{i\theta}$ کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی اعداد θ ، θ_1 اور θ_2 کے لئے درج ذیل ہو گا۔

ا. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ب. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$

سوال 9.565: دو مخلوط اعداد $a+ib$ اور $c+id$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے اگر $a=c$ اور $b=d$ ہوں۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$

کی قیمتیں

$$\int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x=\frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x}+C$$

سے حاصل کریں جہاں $C=C_1+iC_2$ تکمل کا مخلوط مستقل ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال: خطی، دو درجی اور کعبی تخمین

کلیہ ٹیلر میں $n=1$ اور $a=0$ پر کرنے سے $x=0$ پر تفاعل کی خطی تخمین حاصل ہوتی ہے جبکہ $n=2$ اور $n=3$ لینے سے بالترتیب معیاری دو درجی اور کعبی تخمین حاصل ہوتی ہیں۔ ان سوالات میں ہم ان تخمینات سے پیدا خلل پر غور کرتے ہیں۔ ہم دو سوالات کے جوابات جاننا چاہتے ہیں:

ا. خلل کو 10^{-2} سے کم رکھتے ہوئے x کی کن قیمتوں کے لئے تفاعل کی جگہ یہ تخمین استعمال کیے جا سکتے ہیں؟

ب. کسی مخصوص وقفہ پر تفاعل کی جگہ ان تخمین کے استعمال سے زیادہ سے زیادہ خلل کتنا متوقع ہو گا؟

کمپیوٹر کی مدد لیتے ہوئے سوال 9.566 تا سوال 9.571 میں دیے تفاعل اور وقفات کے لئے درج ذیل اقدام سے سوال-ا اور سوال-ب کے جوابات حاصل کریں۔

1. دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔

2. نقطہ $x=0$ پر ٹیلر کثیر رکنیاں $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ اور $P_3(x)$ تلاش کریں۔

3. ہر ایک ٹیلر کثیر رکنی کے لئے باقی جزو سے وابستہ $(n+1)$ واں تفرق $f^{(n+1)}(c)$ حاصل کریں۔ اس تفرق کو دیے گئے وقفہ پر c کے لحاظ سے ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت M کا اندازہ لگائیں۔

4. ہر ایک کثیر رکنی کے لئے باقی $R_n(x)$ تلاش کریں۔ قدم-3 میں اندازاً حاصل M کو $f^{(n+1)}(c)$ کی جگہ پر کرتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر $R_n(x)$ ترسیم کر کے اس سے x کی قیمت سوال-ا کے لئے حاصل کریں۔

5. دیے گئے وقفہ پر $E_n(x)$ ترسیم کر کے اندازاً خلل کا اصل خلل $E_n(x)=\left|f(x)-P_n(x)\right|$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ یہ سوال-ب کا جواب حاصل کرنے میں مدد کرے گا۔

6. اصل تفاعل اور اس کے تین تخمینی ٹیلر کثیر رکنیوں کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔قدم 4 اور 5 میں حاصل معلومات کے لحاظ سے ان ترسیمات پر تبصرہ کریں۔

سوال 9.566: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}},\quad |x|\le\frac{3}{4}$

سوال 9.567: $f(x)=(1+x)^{3/2},\quad -\frac{1}{2}\le x\le 2$

سوال 9.568: $f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad |x|\le 2$

سوال 9.569: $f(x)=(\cos x)(\sin 2x),\quad |x|\le 2$

سوال 9.570: $f(x)=e^{-x}\cos 2x,\quad |x|\le 1$

سوال 9.571: $f(x)=e^{x/3}\sin 2x,\quad |x|\le 2$

9.11 طاقتی تسلسل کے استعمال

اس حصہ میں ثنائی تسلسل متعارف کرایا جائے گا جو طاقت اور جذر کا اندازہ کرنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ مزید ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کو تخمیناً تسلسل سے ظاہر کرنا اور غیر بنیادی تکمل کے قیمت کے حصول میں تسلسل کا کردار دکھایا جائے گا۔ ایسے حد جو غیر معین صورت دیتے ہوں کا حل بھی سکھایا جائے گا۔ ہم $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کا ایک مختصر طریقہ دکھائیں گے اور بار بار استعمال ہونے والے تسلسلوں کی جدول کا ذکر کریں گے۔

طاقت اور جذر کے لئے ثنائی تسلسل

تفاعل $f(x)=(1+x)^m$ جہاں m مستقل ہے، کا مکلارن تسلسل درج ذیل ہے

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k+\cdots \tag{9.39}$$

جس کو **ثنائی تسلسل**[48] کہتے ہیں اور جو $|x| < 1$ کے لئے مطلق مرتکز ہے۔ یہ تسلسل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل اور اس کے تفرقات لکھتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m \\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(m-3)(1+x)^{m-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}
\end{aligned}
$$

نقطہ $x = 0$ پر ان کی قیمتیں دریافت کر کے مکلارن تسلسل کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے مساوات 9.39 کا تسلسل حاصل ہو گا۔

اگر m عدد صحیح ہو جو صفر یا اس سے بڑا ہو تب $k = m + 1$ عددی سر سے تمام عددی سر صفر ہوں گے لہٰذا $(m+1)$ اجزاء کے بعد یہ تسلسل رک جاتا ہے۔

اگر m صفر یا مثبت عدد صحیح نہ ہو تب یہ تسلسل لامتناہی اجزاء پر مشتمل ہو گا جو $|x| < 1$ کے لئے مرتکز ہو گا۔ اس کی وجہ دیکھنے کی خاطر فرض کریں u_k وہ جزو ہے جس میں x^k پایا جاتا ہو۔ اب مطلق ارتکاز کے تناسبی پرکھ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \qquad k \to \infty$$

ثنائی تسلسل کا حصول ہمیں صرف اتنا بتاتا ہے کہ $(1+x)^m$ اس کو پیدا کرتا ہے اور $|x| < 1$ کے لئے یہ تسلسل مرتکز ہے۔ تسلسل کا حصول ہمیں یہ نہیں دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل $(1+x)^m$ کو مرکوز ہے۔ حقیقت میں یہ تسلسل $(1+x)^m$ کو مرکوز ہے، جس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

$$
\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, && -1 < x < 1 \\
\binom{m}{1} &= m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!} && \text{جہاں} \\
\binom{m}{k} &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} && \text{اور } k \geq 3 \text{ کے لئے}
\end{aligned} \tag{9.40}
$$

---

[48] binomial series

ہوں گے۔

مثال 9.65: اگر $m = -1$ ہو تب

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1,$$
$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k!}{k!} = (-1)^k$$

ہوں گے اور مساوات 9.40 درج ذیل ثنائی تسلسل دے گی۔

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$$

□

مثال 9.66: ہم مثال 4.40 سے جانتے ہیں کہ چھوٹے $|x|$ کے لئے $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ہو گا۔ ثنائی تسلسل میں $m = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دو درجی اور بلند رتبی تخمین حاصل ہوتے ہیں، اور ساتھ ہی اندازہ خلل بھی حاصل ہوتا ہے جو مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ خلل دیتا ہے:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots\end{aligned}$$

دیگر تخمین x کی مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل ہوں گی۔ مثال کے طور پر:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \qquad \text{چھوٹے } \left|x^2\right| \text{ کے لئے}$$
$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \qquad \text{چھوٹا } \left|\tfrac{1}{x}\right| \text{ یعنی بڑا } |x|$$

□

تفرقی مساوات کے طاقتی تسلسل حل اور ابتدائی قیمت مسائل

ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی سادہ صورت حاصل کرنے میں ناکامی کی صورت میں ہم حل کے بارے میں معلومات دیگر طریقوں سے حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ ایک طریقہ ہے کہ ہم حل کی طاقتی تسلسل روپ حاصل کریں۔ اگر ہم ایسا کر پائیں تو ہمیں حل کی تخمینی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ حقیقت میں عموماً ہمیں یہی درکار ہوتا ہے۔ ہماری پہلی مثال (مثال 9.67) یک رتبی خطی تفرقی مساوات ہے جس کو ہم حصہ 7.11 کے تراکیب سے حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال میں ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کرنا نہیں جانتے ہیں اور اس کو طاقتی تسلسل کے مدد سے حل کرتے ہیں۔ اگلی مثال (مثال 9.68) کو حصہ 7.11 کے تراکیب سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

مثال 9.67: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1$$

حل: ہم فرض کرتے ہیں کہ اس کے حل کا روپ درج ذیل ہے۔

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots \tag{9.41}$$

ہم عددی سروں a_k کی ایسی قیمتیں تلاش کرتے ہیں کہ یہ تسلسل اور اس کا یک رتبی تفرق

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \tag{9.42}$$

دیے گئے تفرقی مساوات اور ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ تسلسل $y' - y$ درحقیقت مساوات 9.41 اور مساوات 9.42 کا فرق ہے:

$$\begin{aligned} y' - y = {} & (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots \\ & + (n a_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \tag{9.43}$$

اگر y نے $y' - y = x$ کو مطمئن کرنا ہو تب مساوات 9.43 میں دیا گیا تسلسل لازماً x کے برابر ہو گا۔ چونکہ طاقتی تسلسل روپ یکتا ہوتے ہیں (جیسا آپ نے سوال 9.468 میں دیکھا ہو گا) لہٰذا مساوات 9.43 کے عددی سر لازمی طور پر درج ذیل مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0 && \text{مستقل جزو} \\ 2a_2 - a_1 &= 1 && x \text{ کا عددی سر} \\ 3a_3 - a_2 &= 0 && x^2 \text{ کا عددی سر} \\ &\vdots \\ n a_n - a_{n-1} &= 0 && x^{n-1} \text{ کا عددی سر} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ہم مساوات 9.41 سے یہ بھی جانتے ہیں کہ $x=0$ پر $y=a_0$ ہو گا لہٰذا ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے $a_0=1$ ہو گا۔ ان تمام معلومات سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$a_0=1,\quad a_1=a_0=1,\quad a_2=\frac{1+a_1}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}$$
$$a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{2}{3!},\quad \cdots,\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{2}{n!},\quad \cdots$$

ان قیمتوں کو y کی مساوات (مساوات 9.41) میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y&=1+x+2\cdot\frac{x^2}{2!}+2\cdot\frac{x^3}{3!}+\cdots+2\cdot\frac{x^n}{n!}+\cdots\\&=1+x+2\underbrace{\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)}_{e^x-1-x \text{ کا مکلارن تسلسل}}\\&=1+x+2(e^x-1-x)=2e^x-1-x\end{aligned}$$

یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y=2e^x-1-x$ ہو گا۔

ہم اس کو پرکھ سکتے ہیں یعنی

$$y(0)=2e^0-1-0=2-1=1$$

اور

$$y'-y=(2e^x-1)-(2e^x-1-x)=x$$

□

مثال 9.68: درج ذیل کا طاقتی تسلسل حل تلاش کریں۔

$$y''+x^2y=0 \tag{9.44}$$

حل: ہم فرض کرتے ہیں کہ اس کا حل درج ذیل روپ کا ہے۔

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{9.45}$$

ہم عددی سروں a_k کی ایسی قیمتیں تلاش کرتے ہیں کہ یہ تسلسل اور اس کا دو رتبی تفرق

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots \tag{9.46}$$

مساوات 9.44 کو مطمئن کرتے ہوں۔ x^2y کا تسلسل مساوات 9.45 کو x^2 سے ضرب دے کر حاصل ہو گا:

$$x^2y = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \cdots + a_nx^{n+2} + \cdots \tag{9.47}$$

$y'' + x^2y$ کا تسلسل مساوات 9.46 اور مساوات 9.47 کا مجموعہ ہو گا:

$$\begin{aligned} y'' + x^2y = 2a_2 + 6a_3x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 \\ + \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \cdots \end{aligned} \tag{9.48}$$

دھیان رہے کہ مساوات 9.47 میں x^{n-2} کا عددی سر a_{n-4} ہے۔ اگر y اور اس کے دو گنّا تفرق، مساوات 9.44 کو مطمئن کرتے ہوں تب مساوات 9.48 کے دائیں ہاتھ x کی ہر انفرادی طاقت کا عددی سر صفر ہو گا:

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0 \tag{9.49}$$

اور تمام $n \geq 4$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \tag{9.50}$$

ہم مساوات 9.45 سے

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0)$$

حاصل کرتے ہیں یعنی ابتدائی دو عددی سر، $x = 0$ پر بالترتیب y اور y' کی قیمتیں ہیں۔ مساوات 9.49 اور کلیہ توالی (مساوات 9.50) کی مدد سے ہم باقی تمام عددی سر معلوم کر سکتے ہیں۔ مساوات 9.49 کے پہلے دو درج ذیل دیتے ہیں۔

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

مساوات 9.50 کہتی ہے کہ $a_{n-4} = 0$ کی صورت میں $a_n = 0$ ہو گا۔ نتیجتاً

$$a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0$$

ہوں گے اور جب بھی $n = 4k + 2$ یا $4k + 3$ ہو، a_n صفر ہو گا۔ باقی عددی سروں کے لئے

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

ہو گا جس سے

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{-a_0}{4 \cdot 3}, \quad a_8 = \frac{-a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}, \\ a_{12} &= \frac{-a_8}{11 \cdot 12} = \frac{-a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} \end{aligned}$$

اور

$$a_5=\frac{-a_1}{5\cdot 4},\quad a_9=\frac{-a_5}{9\cdot 8}=\frac{a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}$$
$$a_{13}=\frac{-a_9}{12\cdot 13}=\frac{-a_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}$$

جواب کو دو علیحدہ تسلسلوں کی روپ میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned}y=&a_0\Big(1-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\cdots\Big)\\&+a_1\Big(x-\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\cdots\Big)\end{aligned}$$

جہاں پہلا تسلسل a_0 سے ضرب اور دوسرا تسلسل a_1 سے ضرب ہوا ہے۔ جیسا تناسبی پرکھ سے ظاہر ہے، دونوں تسلسل تمام x کے لئے مطلق مرتکز ہیں۔
□

غیر بنیادی تکمل کی قیمت کا حصول

غیر بنیادی تکمل کو مکلارن تسلسل کی مدد سے تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 9.69: انکسار شعاع میں $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ طرز کے تکمل پائے جاتے ہیں۔ اس کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھیں۔

حل: $\sin x$ کے تسلسل میں x کی جگہ x^2 پر کرتے ہوئے

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\frac{x^{18}}{9!}-\cdots$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int \sin x^2\,\mathrm{d}x=C+\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\frac{x^{19}}{19\cdot 9!}-\cdots$$

□

مثال 9.70: تکمل $\int_0^1 \sin x^2\,\mathrm{d}x$ کی قیمت 0.001 سے کم خلل کے ساتھ دریافت کریں۔

حل: یہ بدلتا تسلسل ہے اور ہم تجربہ سے دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{11\cdot 5!}\approx 0.000\,76$$

وہ پہلا جزو ہے جس کی قیمت 0.001 سے کم ہے۔ اس سے قبل دو اجزاء کا مجموعہ

$$\int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

ہے۔ ہم مزید دو اجزاء شامل کرتے ہوئے

$$\int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \approx 0.310\,268$$

اندازہ حاصل کر سکتے ہیں جس میں خلل تقریباً 10^{-6} ہے۔ اس کے بعد صرف ایک اضافی جزو کی شمولیت سے

$$\int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310\,268\,303$$

حاصل ہوتا ہے جس میں خلل 1.08×10^{-9} سے کم ہے۔ □

الٹ ٹینجنٹ

ہم مثال 9.51 میں $\tan^{-1} x$ کا تسلسل تلاش کر چکے ہیں جہاں تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

اور تکمل سے

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

حاصل ہوئے۔ البتہ ہم نے مسئلہ جزو در جزو تکمل کا ثبوت پیش نہیں کیا ہے جس پر یہ نتائج منحصر ہیں۔ ہم اب متناہی کلیہ

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdot + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{9.51}$$

کے دونوں اطراف کا تکمل لے کر اسی تسلسل کو دوبارہ حاصل کرتے ہیں، جہاں آخری جزو تسلسل کا باقی ہے جس کو بطور ثنائی تسلسل جمع کیا گیا ہے اور اس ثنائی تسلسل کا ابتدائی جزو $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$ اور تناسب $r = -t^2$ ہیں۔ مساوات 9.51 کے دونوں اطراف کا تکمل $t = 0$ تا $t = x$ لے کر

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(n,x)$$

حاصل ہو گا جہاں

$$R(n,x)=\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ہے۔ تکمل کا نسب نما 1 کے برابر یا اس سے بڑا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\left|R(n,x)\right|\le\int_0^{|x|} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

گر $|x|\le 1$ ہو تب اس عدم مساوات کا دایاں ہاتھ $n\to\infty$ کرتے ہوئے صفر تک پہنچتا ہے۔ یوں $|x|\le 1$ کے لئے $\lim_{n\to\infty}R(n,x)=0$ اور

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\qquad |x|\le 1$$

ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\qquad |x|\le 1 \tag{9.52}$$

ہم $\tan^{-1}x$ کا مکلارن تسلسل بلا واسطہ اس لئے دریافت نہیں کرتے ہیں کہ $\tan^{-1}x$ کے بلند رتبی تفرقات کے کلیات پیچیدہ ہوتے ہیں۔ مذکورہ بالا طریقہ زیادہ آسان ہے۔

مساوات 9.52 میں $x=1$ پر کرنے سے

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}+\cdots$$

حاصل ہوتا ہے جسے **کلیہ لیبنٹز**[49] کہتے ہیں۔ یہ تسلسل بہت آہستہ مرکوز ہے لہٰذا یہ π کی قیمت حاصل کرنے کے لئے زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا ہے۔ π کے حصول کے لئے اس سے بہتر کلیات استعمال کیے جاتے ہیں مثلاً

$$\pi=48\tan^{-1}\frac{1}{18}+32\tan^{-1}\frac{1}{57}-20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

جو 0 کے قریب x کی قیمتیں استعمال کرتا ہے۔

---

[49] Leibniz's formula

غیر معین روپ کی قیمت کا حصول

بعض اوقات غیر معین روپ کے تفاعل کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں لکھ کر ان کی قیمت تلاش کرنا ممکن ہوتا ہے۔

مثال 9.71: غیر معین روپ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم $\ln x$ کو $x-1$ کی طاقت کا ٹیلر تسلسل لکھتے ہیں۔ نقطہ $x=1$ پر بلا واسطہ $\ln x$ کا ٹیلر تسلسل تلاش کر کے یا $\ln x$ کے تسلسل (مثال 9.52) میں x کی جگہ $x-1$ پر کرتے ہوئے ایسا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دونوں طریقوں سے

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots$$

حاصل ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \left(1 - \frac{1}{2}(x-1) + \cdots\right) = 1$$

□

مثال 9.72: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: جزو x^5 تک $\sin x$ اور $\tan x$ کے مکلارن تسلسل

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots$$

ہیں۔ یوں

$$\sin x - \tan x = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{8} - \cdots = x^3\Big(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\Big)$$

اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \Big(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \cdots\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ہو گا۔ □

ہم تسلسل استعمال کر کے نا صرف $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\big)$ کی قیمت تلاش کر پاتے ہیں بلکہ اس عمل میں $\csc x$ کا تخمینی کلیہ بھی حاصل کرتے ہیں۔

مثال 9.73: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ تلاش کریں۔

حل:

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}{x\cdot(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}$$
$$=\frac{x^3(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots)}{x^2(1-\frac{x^2}{3!}+\cdots)}=x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}$$

لہذا

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\right)=0$$

ہو گا۔

ہم چھوٹے $|x|$ کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\approx x\cdot\frac{1}{3!}=\frac{x}{6}\quad\implies\quad\csc x\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{6}$$

□

عموماً مستعمل مکلارن تسلسل

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \le 1$$

ثنائی تسلسل

$$\begin{aligned}(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots \\ &\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1\end{aligned}$$

جہاں

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$ $k \ge 3$ کے لئے

ہیں۔

ثنائی تسلسل لکھتے ہوئے ہم $\binom{m}{0}$ کی تعریف 1 لیتے ہیں اور (اگر $x=0$ ہو تب بھی) $x^0 = 1$ لیتے ہیں۔ یوں $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k$ لکھا جاتا ہے۔ مثبت m کے لئے تسلسل x^m پر ختم ہوتا ہے اور تمام x کے لئے مرتکز ہوتا ہے۔

سوالات

ثنائی تسلسل

سوال 9.572 تا سوال 9.581 میں دیے تفاعل کے ثنائی تسلسل کے ابتدائی چار اجزاء تلاش کریں۔

سوال 9.572: $(1+x)^{1/2}$
جواب: $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$

سوال 9.573: $(1+x)^{1/3}$

سوال 9.574: $(1-x)^{-1/2}$
جواب: $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots$

سوال 9.575: $(1-2x)^{1/2}$

سوال 9.576: $(1+\frac{x}{2})^{-2}$
جواب: $1-x+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{2}$

سوال 9.577: $(1-\frac{x}{2})^{-2}$

سوال 9.578: $(1+x^3)^{-1/2}$
جواب: $1-\frac{x^3}{2}+\frac{3x^6}{8}-\frac{5x^9}{16}$

سوال 9.579: $(1+x^2)^{-1/3}$

سوال 9.580: $(1+\frac{1}{x})^{1/2}$
جواب: $1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}$

سوال 9.581: $(1-\frac{2}{x})^{1/3}$

سوال 9.582 تا سوال 9.585 میں تفاعل کے ثنائی تسلسل تلاش کریں۔

سوال 9.582: $(1+x)^4$
جواب: $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

سوال 9.583: $(1+x^2)^3$

سوال 9.584: $(1-2x)^3$
جواب: $(1-2x)^3 = 1-6x+12x^2-8x^3$

سوال 9.585: $(1-\frac{x}{2})^4$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال 9.586 تا سوال 9.603 میں ابتدائی قیمت مسئلے کے تسلسل حل تلاش کریں۔

سوال 9.586: $y'+y=0, \quad y(0)=1$
جواب: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = e^{-x}$

سوال 9.587: $y'-2y=0, \quad y(0)=1$

سوال 9.588: $y'-y=1, \quad y(0)=0$
جواب: $y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x-1$

سوال 9.589: $y'+y=1, \quad y(0)=2$

سوال 9.590: $y'-y=x, \quad y(0)=0$
جواب: $y=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x-x-1$

سوال 9.591: $y'+y=2x, \quad y(0)=-1$

سوال 9.592: $y'-xy=0, \quad y(0)=1$
جواب: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

سوال 9.593: $y'-x^2y=0, \quad y(0)=1$

سوال 9.594: $(1-x)y'-y=0, \quad y(0)=2$
جواب: $y=\sum_{n=0}^{\infty}2x^n = \frac{2}{1-x}$

سوال 9.595: $(1+x^2)y'+2xy=0, \quad y(0)=3$

سوال 9.596: $y''-y=0,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=0$
جواب: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sinh x$

سوال 9.597: $y''+y=0,\quad y'(0)=0,\quad y(0)=1$

سوال 9.598: $y''+y=x,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=2$
جواب: $y=2+x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$

سوال 9.599: $y''-y=x,\quad y'(0)=2,\quad y(0)=-1$

سوال 9.600: $y''-y=-x,\quad y'(2)=-2,\quad y(2)=0$
جواب: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

سوال 9.601: $y''-x^2y=0,\quad y'(0)=b,\quad y(0)=a$

سوال 9.602: $y''+x^2y=x,\quad y'(0)=b,\quad y(0)=a$
جواب: $y=a+bx+\frac{1}{6}x^3-\frac{ax^4}{3\cdot4}-\frac{bx^5}{4\cdot5}-\frac{x^7}{6\cdot6\cdot7}+\frac{ax^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}+\frac{bx^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9}+\cdots$
اور $n\geq 6$ کے لئے $a_n=(n-2)(n-3)a_{n-4}$ ہوں گے۔

سوال 9.603: $y''-2y'+y=0,\quad y'(0)=1,\quad y(0)=0$

تخمین اور غیر بنیادی تکمل

سوال 9.604 تا سوال 9.607 میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے، خلل کو 10^{-3} کم رکھتے ہوئے تکمل کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ (جوابات 5 اعشاریہ تک دکھائے گئے ہیں۔)

سوال 9.604: $\int_0^{0.2}\sin x^2\,\mathrm{d}x$
جواب: $0.002\,67$

سوال 9.605: $\int_0^{0.2}\frac{e^{-x}-1}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال 9.606: $\int_0^{0.1}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$
جواب: 0.1

سوال 9.607: $\int_0^{0.25}\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 9.608 تا سوال 9.611 میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے، خلل کو 10^{-8} کم رکھتے ہوئے تکمل کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ (جوابات 10 اعشاریہ تک دکھائے گئے ہیں۔)

سوال 9.608: $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$
جواب: $0.099\,944\,461$

سوال 9.609: $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 9.610: $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x$
جواب: $0.100\,001$

سوال 9.611: $\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال 9.612: تکمل $\int_0^1 \cos t^2\,\mathrm{d}t$ میں $\cos t^2$ کو تخمیناً $1-\frac{t^4}{2}+\frac{t^8}{4!}$ سے ظاہر کرتے ہوئے پیدا خلل کا اندازہ لگائیں۔
جواب: $\frac{1}{13\cdot 6!} \approx 0.000\,11$

سوال 9.613: تکمل $\int_0^t \cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ میں $\cos\sqrt{t}$ کو تخمیناً $1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4!}-\frac{t^3}{6!}$ سے ظاہر کرتے ہوئے پیدا خلل کا اندازہ لگائیں۔

سوال 9.614 تا سوال 9.617 میں ایسا کثیر رکنی تلاش کریں جو خلل کو 10^{-3} سے کم رکھتے ہوئے پورے وقفہ پر $F(x)$ کو ظاہر کرتا ہو۔

سوال 9.614: $F(x)=\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, \quad [0,1]$
جواب: $\frac{t^3}{3}-\frac{t^7}{7\cdot 3!}+\frac{t^{11}}{11\cdot 5!}$

سوال 9.615: $F(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \quad [0,1]$

سوال 9.616: (الف) $[0,0.5]$ (ب) $[0,1]$ $F(x)=\int_0^x \tan^{-1} t\,\mathrm{d}t,$
جواب: (الف) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$، (ب) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{5\cdot 6}-\frac{x^8}{7\cdot 8}+\cdots+(-1)^{15}\frac{x^{32}}{31\cdot 32}$

سوال 9.617: (الف) $[0,0.5]$ (ب) $[0,1]$ $F(x)=\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t,$

غیر معین روپ

سوال 9.618 تا سوال 9.627 میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

سوال 9.618: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

جواب: $\frac{1}{2}$

سوال 9.619: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

سوال 9.620: $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t-t^2/2}{t^4}$

جواب: $-\frac{1}{24}$

سوال 9.621: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta-\theta+\theta^3/6}{\theta^5}$

سوال 9.622: $\lim_{y\to 0} \frac{y-\tan^{-1} y}{y^3}$

جواب: $\frac{1}{3}$

سوال 9.623: $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y-\sin y}{y^3\cos y}$

سوال 9.624: $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2}-1)$

جواب: -1

سوال 9.625: $\lim_{x\to\infty} (x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

سوال 9.626: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

جواب: 2

سوال 9.627: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 9.628: تفاعل $\ln(1+x)$ کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ $-x$ پر کرتے ہوئے $\ln(1-x)$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔ اس تسلسل کو اب $\ln(1+x)$ کے تسلسل سے منفی کرتے ہوئے $|x| < 1$ کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

سوال 9.629: خلل کی مقدار کو 10^{-8} سے کم رکھتے ہوئے $\ln(1.1)$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے $\ln(1+x)$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 9.630: خلل کی مقدار کو 10^{-3} سے کم رکھتے ہوئے $\frac{\pi}{4}$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ کے تحت $\tan^{-1}(1)$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: 500 اجزاء

سوال 9.631: دکھائیں کہ $|x| > 1$ کے لئے $f(x) = \tan^{-1} x$ کا مکلارن تسلسل منفرج ہے۔

سوال 9.632: خلل کی مقدار کو 10^{-6} رکھنے کے لئے درج ذیل مساوات کے دائیں ہاتھ میں ہر $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

اس کے برعکس $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ اتنا ست $\frac{\pi^2}{6}$ کو مرکوز ہے کہ 50 اجزاء کا مجموعہ لینے سے بھی دو اعشاریہ درست نتیجہ حاصل نہیں ہوتا ہے۔
جواب: 3 اجزاء

سوال 9.633: تفاعل $\tan t$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء کا تکمل 0 تا x لیتے ہوئے $\ln\sec x$ کی مکلارن کے تسلسل کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء حاصل کریں۔

سوال 9.634: (الف) ثنائی تسلسل اور

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1} x = (1-x^2)^{-1/2}$$

استعمال کرتے ہوئے $\sin^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی چار غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔ رداس ارتکاز کتنا ہو گا؟ (ب) تفاعل $\cos^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء کو اس سوال کے جزو-الف کی مدد سے تلاش کریں۔
جواب: (الف) $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$؛ رداس ارتکاز 1 ہے، (ب) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$

سوال 9.635: (الف) درج ذیل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی غیر صفر چار اجزاء تلاش کریں۔

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(ب) حاصل کردہ تسلسل کے ابتدائی تین اجزاء استعمال کرتے ہوئے $\sinh^{-1} 0.25$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ خلل کی مقدار کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 9.636: تفاعل $\frac{-1}{1+x}$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{1}{(1+x)^2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔
جواب: $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

سوال 9.637: تفاعل $\frac{1}{1-x^2}$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال 9.638: انگلستانی ریاضی دان جان والس نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا۔

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}$$

کمپیوٹر استعمال کر کے اس کلیہ سے π کی قیمت 2 اعشاریہ درست تلاش کریں۔

سوال 9.639: قدرتی لوگارتھم $\ln n$ کا جدول $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$ کے لئے سوال 9.628 کے کلیہ سے حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے تعلقات $\ln 4 = 2\ln 2$ ، $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$ ، $\ln 8 = 3\ln 2$ ، $\ln 9 = 2\ln 3$ اور $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$ بروئے کار لائیں تا کہ کم سے کم لوگارتھمی قیمتوں کا استعمال ہو۔ سوال 9.628 میں x کے درج ذیل قیمتوں سے شروع کریں۔

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}$$

سوال 9.640: تفاعل $(1-x^2)^{-1/2}$ کے ثنائی تسلسل کا تکمل لے کر $|x| < 1$ کے لئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

سوال 9.641: درج ذیل تسلسل کا پہلا تکمل

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+1/t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

x تا ∞ لے کر اور دوسرا تکمل $-\infty$ تا x لے کر بالترتیب درج ذیل تسلسل حاصل کریں۔

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad x > 1$$
$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad x < -1$$

سوال 9.642: دو زاویوں کے فرق کے ٹینجنٹ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$\tan(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1)) = \frac{2}{n^2}$$

باب 10

مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد

جائزہ

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مربع قوت کی بنا سیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ جیسا ہم باب 12 میں دیکھیں گے، اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جسم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہٰذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

10.1 مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات پیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اسی کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائرہ

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو **دائرہ**[1] کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[2] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو **رداس**[3] کہتے ہیں۔

circle[1]
center[2]
radius[3]

□

دائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ 1.4 میں فاصلہ کی مساوات $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (0,0)$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (h,k)$$

قطع مکافی

تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کسی مقررہ سیدھی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سیدھی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع مکافی**[4] کہتے ہیں۔ مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا [5] کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو **ناظمہ**[6] کہتے ہیں۔

□

جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ y محور پر نقطہ $F(0,p)$ پر پایا جاتا ہے اور لکیر $y=-p$ ناظمہ (شکل 10.1) ہے۔ یوں شکل 10.1 میں نقطہ $N(x,y)$ صرف اور صرف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب $NF = NQ$ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$NQ = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

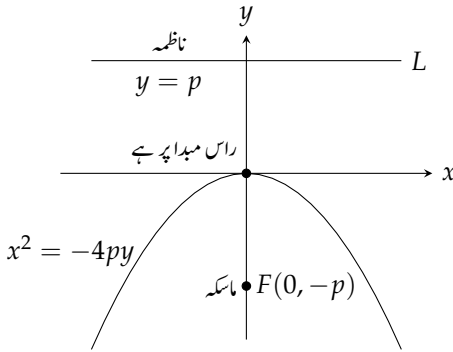
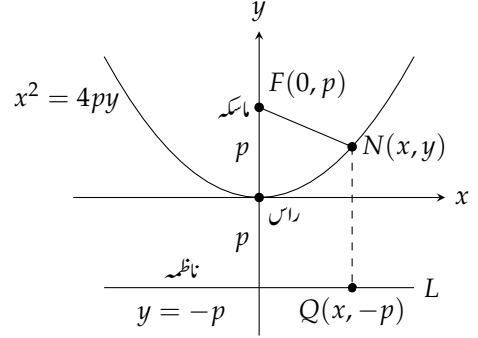
لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y = \frac{x^2}{4p} \implies x^2 = 4py \qquad \text{معیاری روپ} \tag{10.1}$$

اس مساوات سے قطع مکافی کی y محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکافی کا محور تشاکلی ہے جس کو عموماً چھوٹا کر کے صرف **محور**[7] پکارا جاتا ہے۔

وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو **راس**[8] کہلاتا ہے۔ قطع مکافی $x^2 = 4py$ کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل 10.1)۔ مثبت عدد p کو قطع مکافی کا **طول ماسکہ**[9] کہتے ہیں۔

---

[4] parabola
[5] focus
[6] directrix
[7] axis
[8] vertex
[9] focal length

شکل 10.1: قطع مکافی $x^2 = 4py$ ؛ راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیسا ہے۔

شکل 10.2: قطع مکافی $x^2 = -4py$

جدول 10.1: مبدا پر راس والے قطع مکافی کے معیاری مساوات ($p > 0$)

مساوات	ماسکہ	ناظمہ	محور	کھلنے کا رخ
$x^2 = 4py$	$(0,p)$	$y=-p$	y محور	اوپر
$x^2 = -4py$	$(0,-p)$	$y=p$	y محور	نیچے
$y^2 = 4px$	$(p,0)$	$x=-p$	x محور	دائیں
$y^2 = -4px$	$(-p,0)$	$x=p$	x محور	بائیں

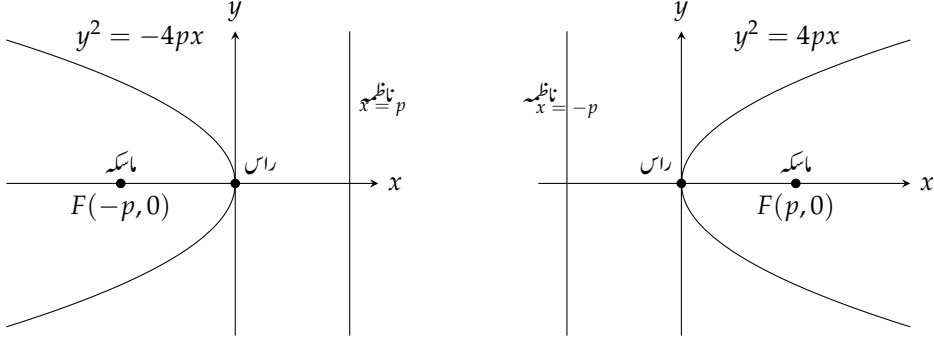
اگر قطع مکافی نیچے رخ کھلتا ہو اور اس کا ماسکہ $(0,-p)$ جبکہ ناظمہ لکیر $y=p$ ہو تب مساوات 10.1 درج ذیل روپ اختیار کرے گی (شکل 10.2)۔

$$y = -\frac{x^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = -4py$$

ہم اسی طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکافی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول 10.1 اور شکل 10.3)۔

مثال 10.1: قطع مکافی $y^2 = 10x$ کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کریں۔

حل: ہم معیاری مساوات $y^2 = 4px$ میں p کی قیمت تلاش کرتے ہیں:

$$4p = 10 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

شکل 10.3: قطع مکافی $y^2 = 4px$ اور $y^2 = -4px$ کے ترسیمات۔

اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\text{ماسکہ} \qquad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{ناظمہ} \qquad x = -p, \qquad x = -\frac{5}{2}$$

□

جدول 10.1 کے کلیات پر حصہ 1.4 میں دیے گئے کلیات انتقال لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ (سوال 10.39، سوال 10.40 اور سوال 10.45 تا سوال 10.48 دیکھیں۔)

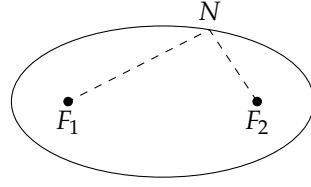
ترخیم

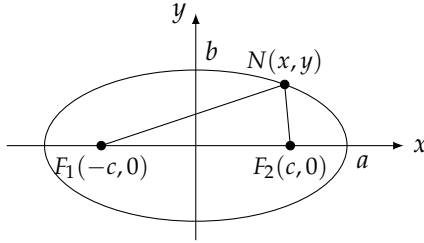
تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو **ترخیم**[10] کہتے ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے **ماسکے** کہتے ہیں (شکل 10.4 اور شکل 10.5)۔

□

ترخیم کو اس کی تعریف استعمال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں F_1 اور F_2 پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھینچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے لہٰذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل 10.4)۔

---

[10] ellipse

شکل 10.4: دونوں ماسکوں (F_1 اور F_2) سے کسی بھی نقطہ N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔

شکل 10.5: ترخیم پر اہم نقطے۔

شکل 10.6: ترخیم کی تعریف $NF_1 + NF_2 = 2a$ اور اس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے۔

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $F_2(c, 0)$ ہوں (شکل 10.6) اور فاصلہ $NF_1 + NF_2$ کو $2a$ سے ظاہر کیا جائے تب ترخیم پر نقطہ $N(x, y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجتاً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{10.2}$$

چونکہ $NF_1 + NF_2$ کی لمبائی F_1F_2 کی لمبائی سے زیادہ ہے (تکون NF_1F_2 کے لئے تکونی عدم مساوات) لہٰذا عدد $2a$ عدد $2c$ سے بڑا ہو گا۔ یوں $a > c$ ہو گا لہٰذا مساوات 10.2 میں $a^2 - c^2$ ایک مثبت عدد ہو گا۔

ہم مساوات 10.2 حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات 10.2 کو $0 < c < a$ کے لئے مطمئن کرتا ہو $NF_1 + NF_2 = 2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات 10.2 کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \tag{10.3}$$

ہو تب $a^2 - c^2 = b^2$ ہو گا اور مساوات 10.2 درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.4}$$

مساوات 10.4 کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x = \pm a$ اور $y = \pm b$ لکیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{مساوات 10.4 سے حاصل کیا گیا}$$

کی قیمت $x = 0$ پر صفر اور $y = 0$ پر لامتناہی ہے لہٰذا $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخیم کا اکبر اور اصغر محور

مساوات 10.4 کی ترخیم کا **اکبر محور**[11] نقاط $(\pm 2, 0)$ کو جوڑنا والی لکیر ہے جس کی لمبائی $2a$ ہے۔ اس کے **اصغر محور**[12] کی لمبائی $2b$ ہے جو نقاط $(0, \pm b)$ کے بیچ لکیر ہے۔ عدد a از خود نصف اکبر محور جبکہ عدد نصف اصغر محور کہلاتے ہیں۔ مساوات 10.3 سے عدد c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

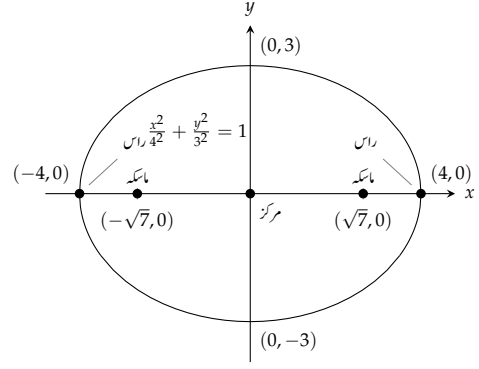
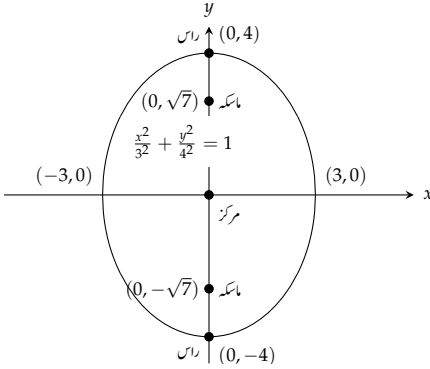
حاصل ہوتا ہے جو مرکز تا ماسکہ فاصلہ ہے۔

مثال 10.2: افقی اکبر محور
درج ذیل ترخیم

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{10.5}$$

جس کو شکل 10.7 میں دکھایا گیا ہے کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$a = \sqrt{16} = 4$	نصف اکبر محور
$b = \sqrt{9} = 3$	نصف اصغر محور
$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$	ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ
$(\pm c, 0) = (\pm 7, 0)$	ماسکے
$(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$	راس
$(0, 0)$	مرکز

□

شکل 10.8: اکبر محور عمودی ہے۔ (مثال 10.3)

شکل 10.7: اکبر محور افقی ہے۔ (مثال 10.2)

مثال 10.3: عمودی اکبر محور
مساوات 10.5 میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر درج ذیل ترخیم حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \tag{10.6}$$

جس کو شکل 10.8 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

نصف اکبر محور	$a=\sqrt{16}=4$
نصف اصغر محور	$b=\sqrt{9}=3$
ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ	$c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$
ماسکے	$(0,\pm c)=(0,\pm 7)$
راس	$(0,\pm a)=(0,\pm 4)$
مرکز	$(0,0)$

□

مساوات 10.5 اور مساوات 10.6 کو سمجھنے میں کبھی دشواری پیش نہیں آتی ہے۔ ہم محددی محور پر نقطہ قطع معلوم کر کے لمبی محور کو اکبر محور چنتے ہیں۔ مرکز ان صورتوں میں مبدا پر ہو گا اور ماسکہ اکبر محور پر پائے جائیں گے۔

---

[11] major axis
[12] minor axis

مبدا پر مرکز والے ترخیم کے معیاری مساوات

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$	x محور پر ماسکہ
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ
$(\pm c, 0)$	ماسکے
$(\pm a, 0)$	راس

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$	y محور پر ماسکہ
$c=\sqrt{a^2-b^2}$	مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ
$(0, \pm c)$	ماسکے
$(0, \pm a)$	راس

دونوں صورتوں میں نصف اکبر محور a اور نصف اصغر محور b ہیں۔

قطع زائد

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہو، ان تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع زائد**[13] کہتے ہیں۔ یہ دو مقررہ نقطے قطع زائد کے **ماسکہ** کہلاتے ہیں۔

□

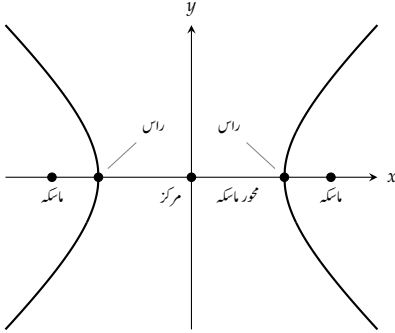
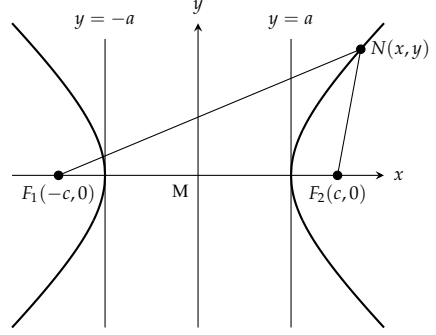
اگر ماسکے $F_1(-c,0)$ اور $(F_2(c,0))$ ہوں (شکل 10.9) اور مستقل فرق $2a$ ہو تب نقطہ (x,y) صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا جب درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{10.7}$$

اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذر کو دائیں ہاتھ منتقل کر کے دونوں ہاتھ کا مربع لے کر جذر کو ایک ہاتھ رکھ کر دوبارہ دونوں ہاتھ کا مربع لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{10.8}$$

---

[13] hyperbola

شکل 10.9: قطع زائد کے دائیں بازو کے لئے $NF_1 - NF_2 = 2a$ جبکہ بائیں بازو کے لئے $NF_2 - NF_1 = 2a$ ہو گا۔

شکل 10.10: قطع مکافی کے محور ماسکہ پر نقطے۔

اب تک یہ مساوات بالکل ترخیم کی مساوات کی طرح ہے۔ البتہ اب چونکہ تکون NF_1F_2 کے دو اضلاع کا فرق $2a$ ہے جو تیسرے ضلع $2c$ سے کم ہو گا لہٰذا $a^2 - c^2$ منفی قیمت ہے۔

ہم مساوات 10.8 کے حصول کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ N جو $0 < a < c$ کے لئے اس طرز کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو، مساوات 10.7 کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا اگر اس کے محدد مساوات 10.8 کو مطمئن کرتے ہوں۔

اگر ہم $c^2 - a^2$ کے مثبت جذر کو b سے ظاہر کریں،

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{10.9}$$

تب $a^2 - c^2 = -b^2$ ہو گا اور مساوات 10.8 درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.10}$$

قطع زائد کی مساوات 10.10 اور ترخیم کی مساوات 10.4 میں فرق منفی علامت کا اور درج ذیل نئے تعلق کا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{مساوات 10.9 سے حاصل کیا گیا}$$

ترخیم کی طرح قطع زائد بھی مبدا اور محددی محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ x محور کو نقطہ $(\pm a, 0)$ پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{مساوات 10.10 سے حاصل کیا گیا}$$

ہے لہٰذا یہاں مماس عمودی ہوں گے۔

تعریف: قطع زائد کے ماسکوں کے بیچ لکیر کو **محور ماسکہ**[14] کہتے ہیں جس کے وسطی نقطہ کو قطع مکافی کا **مرکز**[15] کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ اور قطع مکافی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں، انہیں **راس**[16] کہتے ہیں (شکل 10.10)۔

□

قطع زائد کے متقارب؛ ترسیم کا عمل

قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.11}$$

کے دو **متقارب**[17] درج ذیل لکیریں ہیں۔

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

متقارب کی مدد سے ہم قطع زائد کو جلدی ترسیم کر پاتے ہیں۔ متقارب کی مساوات حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ مساوات 10.11 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کر کے y کے لئے حل کرنا ہے:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{قطع زائد}} \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{1 کی جگہ 0}} \implies \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{متقارب}}$$

---

[14] focal axis
[15] center
[16] vertices
[17] asymptotes

مرکز پر مبدا والے قطع زائد کی معیاری مساواتیں

محور x پر ماسکے ہیں	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
ماسکے	$(\pm c,0)$
راس	$(\pm a,0)$
متقارب	$y=\pm\frac{b}{a}x$

محور y پر ماسکے ہیں	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
ماسکے	$(0,\pm c)$
راس	$(0,\pm a)$
متقارب	$y=\pm\frac{a}{b}x$

دھیان رہے کہ پہلی صورت میں متقارب کی مساوات میں $\frac{b}{a}$ اور دوسری صورت میں $\frac{a}{b}$ ہیں۔

قطع زائد ترسیم کرنے کا عمل

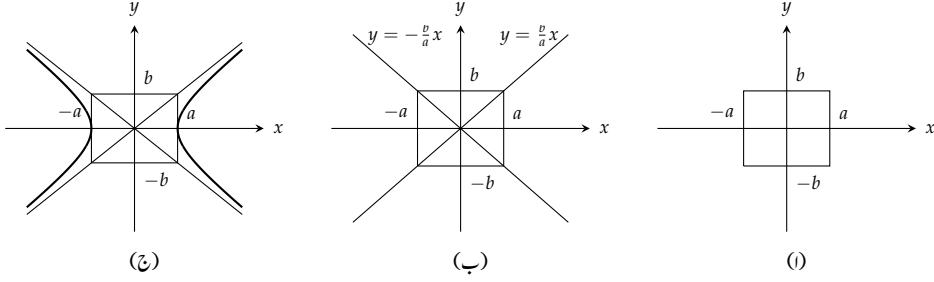
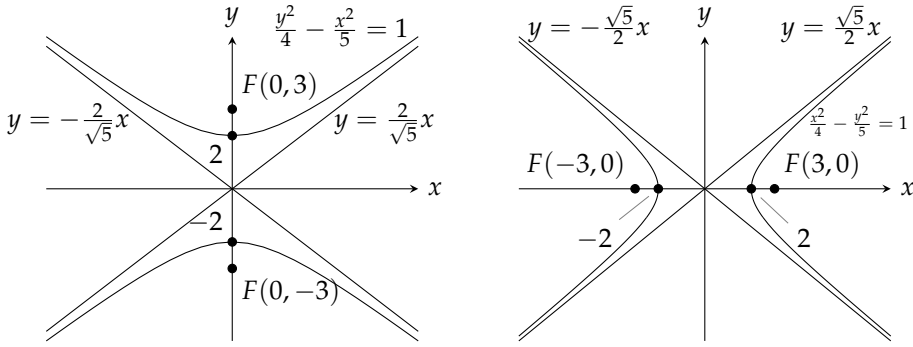
قطع زائد $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ ترسیم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں (شکل 10.11)۔

ا. نقاط $(\pm a,0)$ اور $0,\pm b$ کو ترسیم کرتے ہوئے اس مستطیل کو مکمل کریں جن کے اضلاع میں یہ نقطے پائے جاتے ہوں۔

ب. مستطیل کے وتر کو بڑھا کر متقارب ترسیم کریں۔

ج. مستطیل اور متقارب کو راہ بر لیتے ہوئے قطع زائد ترسیم کریں۔

مثال 10.4: محور x پر ماسکے
درج ذیل قطع زائد کی مساوات ہے (شکل 10.12)

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

شکل 10.11: متقارب کی مدد سے قطع زائد کی ترسیم۔

شکل 10.12: قطع زائد (مثال 10.4)

شکل 10.13: قطع زائد (مثال 10.5)

جس میں $a^2=4$ اور $b^2=5$ ہیں (مساوات 10.10)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ $\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+5}=3$

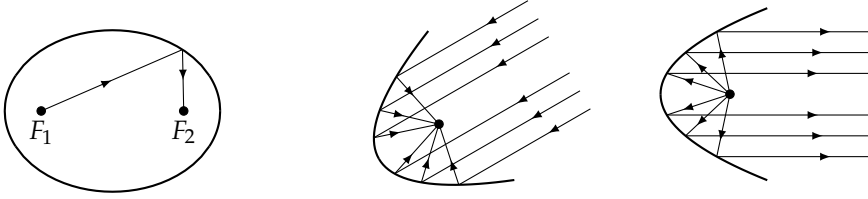
ماسکے $\quad (\pm c,0)=(\pm 3,0)$

راس $\quad (\pm a,0)=(\pm 2,0)$

متقارب $\quad y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

□

مثال 10.5: درج ذیل قطع زائد کو مثال 10.4 کے قطع زائد میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر حاصل کیا گیا ہے۔

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$$

شکل 10.14: قطع مکافی آئینہ کے ماسکہ سے نکلتا شعاع انعکاس کے بعد محور کے متوازی ہو گا۔

شکل 10.15: قطع مکافی عاکس پر آمد شعاع ماسکہ پر پہنچتا ہے۔

شکل 10.16: ترخیم کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔

اس قطع زائد کے راس عمودی محور پر پائے جائیں گے (شکل 10.13)۔ اب بھی $a^2 = 4$ اور $b^2 = 5$ ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$
ماسکے	$(0, \pm c) = (0, \pm 3)$
راس	$(0, \pm a) = (0, \pm 2)$
مرکز	$(0, 0)$
متقارب	$y = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} x$

□

عکسی خواص

قطع مکافی کا اہم ترین استعمال بطور شعاع اور ریڈیو امواج کا عاکس ہے۔ قطع مکافی کے ماسکہ سے خارج شعاع، قطع مکافی کے محور کے متوازی منعکس ہوتا ہے (شکل 10.14)۔ یہ خاصیت ہاتھ بتی اور گاڑیوں کی اگلی بتیوں میں بروئے کار لایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ خرد امواج نشر کرنے کے لئے بھی قطع مکافی اینٹینا استعمال کیا جاتا ہے جو نقطہ منبع سے خارج برقناطیسی امواج کو ایک محدود شعاع کی صورت میں خارج کرتا ہے۔ اس کے برعکس قطع مکافی عاکس کے محور کے متوازی آمد برقناطیسی امواج عاکس کے ماسکہ پر مرکوز کیے جاتے ہیں (شکل 10.15)۔اس خاصیت کی بنا ٹیلی وژن کا ڈش اینٹینا یا ریڈیو دوربین کمزور اشارات کو اکٹھے کر کے زیادہ طاقتور اشارہ حاصل کرتا ہے۔ اسی طرح سورج کی روشنی کو ایک نقطہ پر مرتکز کیا جا سکتا ہے۔

ایک ترخیم کو اس کے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جا سکتا ہے جو **ترخیمی سطح**[18] کہلاتا ہے۔اس کی اندرونی سطح پر چاندی کی تہہ لگا کر

---
[18] ellipsoid

آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔ ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر منعکس ہو گا (شکل 10.16 اور سوال 10.112)۔ ترخیمی سطح اسی طرح آواز کو بھی ایک ماسکہ سے دوسرے ماسکہ منتقل کرتا ہے۔ اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جا سکتا ہے جس میں ایک ماسکہ پر بیٹھا شخص دوسرے ماسکہ پر بیٹھے شخص کے ساتھ سرگوشی سے باتیں کر سکتا ہے۔ کمرہ سرگوشی میں موجود باقی لوگ ان کی باتیں سننے سے قاصر ہوں گے۔ ہوائی جہازوں کی کارکردگی پر ہوائی سرنگ میں غور کیا جاتا ہے۔ جہاز کے شور پر غور کرتے ہوئے نقطہ غور کو ترخیمی سطح کے ایک ماسکہ پر رکھا جاتا ہے جبکہ مائکروفون کو اس کی دوسرے ماسکہ پر رکھا جاتا ہے۔ دیگر نقطوں سے پیدا شور کے اثر کو یوں بہت کم کرنا ممکن ہوتا ہے۔

قطع زائد آئینہ کے ایک ماسکہ پر آمد شعاع کو آئینہ دوسرے ماسکہ پر بھیجتا ہے۔ قطع مکافی سطح، ترخیمی سطح اور قطع مکافی سطحوں کے خواص کو استعمال کرتے ہوئے جدید دور بین تیار کیے جاتے ہیں۔

سوالات

ترسیم کی پہچان

سوال 10.1 تا سوال 10.4 میں دی گئی قطع مکافی کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x$$

اس کے بعد قطع مکافی کے ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔

سوال 10.1: شکل 10.17-ا
جواب: $y^2 = 8x$، ماسکہ $F(2,0)$ اور ناظمہ $x = -2$

سوال 10.2: شکل 10.17-ب

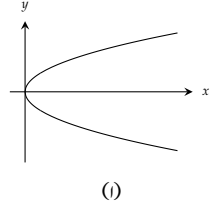
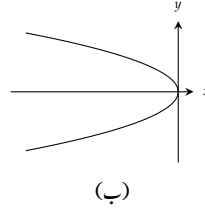
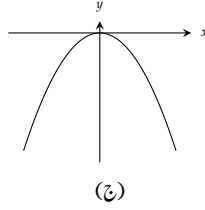
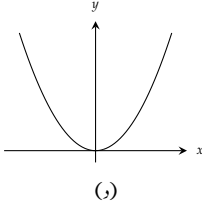
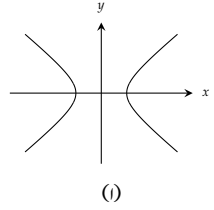
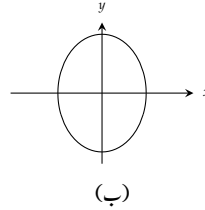
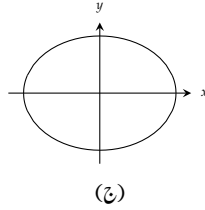
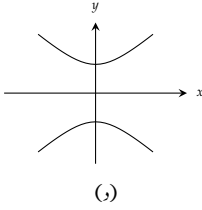
سوال 10.3: شکل 10.17-ج
جواب: $x^2 = -6y$، ماسکہ $F(0,-\frac{3}{2})$ اور ناظمہ $y = \frac{3}{2}$

سوال 10.4: شکل 10.17-د

سوال 10.5 تا سوال 10.8 میں دیے گئے مخروط کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور راس تلاش کریں۔ اگر قطع زائد دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔

سوال 10.5: ترسیم شکل 10.18-ا میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$، ماسکے $F(\pm\sqrt{13},0)$، راس $V(\pm 2,0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$

شکل 10.17: ترسیم برائے سوال 10.1 تا سوال 10.4

شکل 10.18: ترسیمات برائے سوال 10.5 تا سوال 10.8

سوال 10.6: ترسیم شکل 10.18-ب میں دیا گیا ہے۔

سوال 10.7: ترسیم شکل 10.18-ج میں دیا گیا ہے۔
جواب: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ، ماسکے $F(\pm 1,0)$ ، راس $V(\pm\sqrt{2},0)$

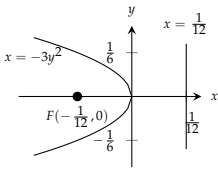
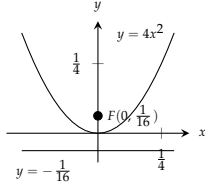
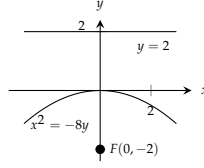
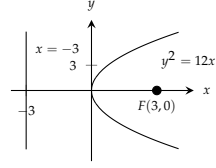
سوال 10.8: ترسیم شکل 10.18-د میں دیا گیا ہے۔

قطع مکافی

سوال 10.9 تا سوال 10.16 میں دیے گئے قطع مکافی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔

سوال 10.9: $y^2=12x$
جواب: شکل 10.19

سوال 10.10: $x^2=6y$

سوال 10.11: $x^2=-8y$
جواب: شکل 10.20

شکل 10.19 شکل 10.20 شکل 10.21 شکل 10.22

سوال 10.12: $y^2 = -2x$

سوال 10.13: $y = 4x^2$
جواب: شکل 10.21

سوال 10.14: $y = -8x^2$

سوال 10.15: $x = -3y^2$
جواب: شکل 10.22

سوال 10.16: $x = 2y^2$

ترخیم

سوال 10.17 تا سوال 10.24 میں دیے گئے ترخیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کریں۔ ترسیم پر ماسکے دکھائیں۔

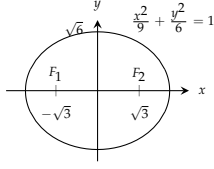
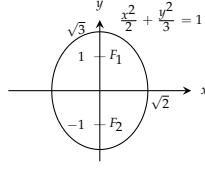
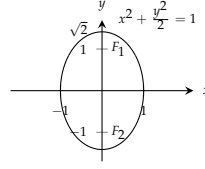
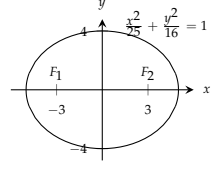
سوال 10.17: $16x^2 + 25y^2 = 400$
جواب: شکل 10.23

سوال 10.18: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال 10.19: $2x^2 + y^2 = 2$
جواب: شکل 10.24

سوال 10.20: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال 10.21: $3x^2 + 2y^2 = 6$
جواب: شکل 10.25

سوال 10.22: $9x^2 + 10y^2 = 90$

شکل 10.26 شکل 10.25 شکل 10.24 شکل 10.23

سوال 10.23: $6x^2+9y^2=54$
جواب: شکل 10.26

سوال 10.24: $169x^2+25y^2=4225$

سوال 10.25 اور سوال 10.26 میں xy مستوی میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس دیے گئے ہیں۔ ترخیم کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.25: ماسکے $(\pm\sqrt{2},0)$ اور راس $(\pm 2,0)$
جواب: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

سوال 10.26: ماسکے $(0,\pm 4)$ اور راس $(0,\pm 5)$

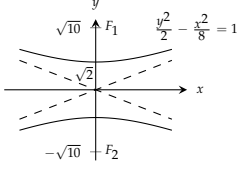
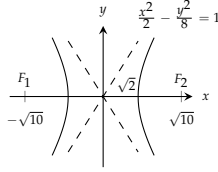
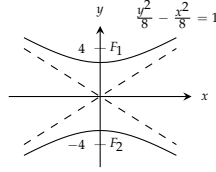
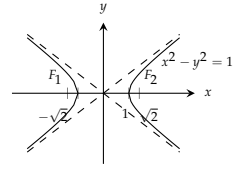
قطع زائد

سوال 10.27 تا سوال 10.34 میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ کھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی دکھائیں۔

سوال 10.27: $x^2-y^2=1$
جواب: متقارب $y=\pm x$ اور شکل 10.27

سوال 10.28: $9x^2-16y^2=144$

سوال 10.29: $y^2-x^2=8$
جواب: متقارب $y=\pm x$ اور شکل 10.28

سوال 10.30: $y^2-x^2=4$

شکل 10.30 شکل 10.29 شکل 10.28 شکل 10.27

سوال 10.31: $8x^2 - 2y^2 = 16$
جواب: متقارب $y = \pm 2x$ اور شکل 10.29

سوال 10.32: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال 10.33: $8y^2 - 2x^2 = 16$
جواب: متقارب $y = \pm \frac{x}{2}$ اور شکل 10.30

سوال 10.34: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال 10.35 تا سوال 10.38 میں xy مستوی پر پائے جانے والے قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز xy مستوی کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

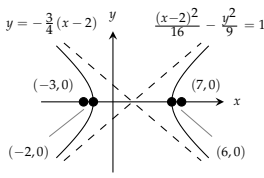
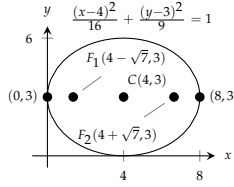
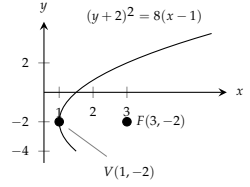
سوال 10.35: ماسکے $(0, \pm\sqrt{2})$ اور متقارب $y = \pm x$
جواب: $y^2 - x^2 = 1$

سوال 10.36: ماسکے $(\pm 2, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x$

سوال 10.37: راس $(\pm 3, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{4}{3} x$
جواب: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

سوال 10.38: راس $(0, \pm 2)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{2} x$

مخروطی حصوں کا انتقال

سوال 10.39: قطع مکافی $y^2 = 8x$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکافی $(y+2)^2 = 8(x-1)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔
جواب: (الف) راس $(1, -2)$، ماسکہ $(3, -2)$، ناظمہ $x = -1$؛ (ب) شکل 10.31

شکل 10.33 شکل 10.32 شکل 10.31

سوال 10.40: قطع مکافی $x^2=-4y$ کو 1 اکائی بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے قطع مکافی $(x+1)^2=-4(y-3)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال 10.41: ترخیم $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ کو 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔
جواب: (الف) ماسکے $(4\pm\sqrt{7},3)$، راس $(8,3)$ اور $(0,3)$، مرکز $(4,3)$؛ (ب) شکل 10.32

سوال 10.42: ترخیم $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ کو 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال 10.43: قطع زائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کر کے قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نئے مرکز، ماسکے، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔
جواب: (الف) مرکز $(2,0)$، ماسکے $(7,0)$ اور $(-3,0)$، راس $(6,0)$ اور $(-2,0)$، متقارب $y=\pm\frac{3}{4}(x-2)$؛ (ب) شکل 10.33

سوال 10.44: قطع زائد $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتے ہوئے قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نیا مرکز، ماسکے اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال 10.45 تا سوال 10.48 میں قطع مکافی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکافی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

سوال 10.45: $y^2 = 4x$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں نیچے۔
جواب: $(y+3)^2 = 4(x+2)$ ، راس $V(-2,-3)$ ، ماسکہ $F(-1,-3)$ ، ناظمہ $x=-3$

سوال 10.46: $y^2 = -12x$ ، 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال 10.47: $x^2 = 8y$ ، 1 اکائی دائیں اور 7 اکائیاں نیچے۔
جواب: $(x-1)^2 = 8(y+7)$ ، راس $V(1,-7)$ ، ماسکہ $F(1,-5)$ ، ناظمہ $y=-9$

سوال 10.48: $x^2 = 6y$ ، 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے۔

سوال 10.49 تا سوال 10.52 میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

سوال 10.49: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 1 اکائی نیچے۔
جواب: $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ، $F(-2, \pm\sqrt{3}-1)$ ، $V(-2, \pm 3 - 1)$ ، $C(-2,-1)$

سوال 10.50: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، 3 اکائیاں دائیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

سوال 10.51: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ، 2 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔
جواب: $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$ ، $F(3,3)$ اور $F(1,3)$ ، $V(\pm\sqrt{3}+2, 3)$ ، $C(2,3)$

سوال 10.52: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، 43 اکائیاں بائیں اور 5 اکائیاں نیچے۔

سوال 10.53 تا سوال 10.56 میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

سوال 10.53: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ دائیں 2 اکائیاں اور اوپر 2 اکائیاں۔
جواب: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ، $C(2,2)$ ، $F(5,2)$ اور $F(-1,2)$ ، $V(4,2)$ اور $V(0,2)$ ،
متقارب $y-2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

سوال 10.54: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ بائیں 5 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی۔

سوال 10.55: $y^2 - x^2 = 1$ بائیں 1 اکائی اور نیچے 1 اکائی۔
جواب: $(y+1)^2 - (x+1)^2 = 1$ ، $C(-1,-1)$ ، $F(-1,\sqrt{2}-1)$ اور $F(-1,-\sqrt{2}-1)$ ، $V(-1,0)$ ، $V(-1,-2)$ ، متقارب $y+1 = \pm(x+1)$

سوال 10.56: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ دائیں 1 اکائی اور اوپر 3 اکائیاں۔

سوال 10.57 تا سوال 10.68 میں دیے گئے مخروط حصوں کا (جیسا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

سوال 10.57: $x^2 + 4x + y^2 = 12$
جواب: $C(-2,0)$ ، $a = 4$

سوال 10.58: $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 144$

سوال 10.59: $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$
جواب: $V(-1,1)$ ، $F(-1,0)$

سوال 10.60: $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

سوال 10.61: $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$
جواب: ترخیم $\frac{(x+2)^2}{5} + y^2 = 1$ ، $C(-2,0)$ ، $F(0,0)$ اور $F(-4,0)$ ، $V(\sqrt{5}-2,0)$ اور $V(-\sqrt{5}-2,0)$

سوال 10.62: $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

سوال 10.63: $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$
جواب: ترخیم $\frac{(x-1)^2}{5} + (y-1)^2 = 1$ ، $C(1,1)$ ، $F(2,1)$ اور $F(0,1)$ ، $V(\sqrt{2}+1,1)$ اور $V(-\sqrt{2}+1,1)$

سوال 10.64: $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

سوال 10.65: $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$
جواب: قطع زائد $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$ ، $C(1,2)$ ، $F(1+\sqrt{2},2)$ اور $F(1-\sqrt{2},2)$ ، $V(2,2)$ اور $V(0,2)$ ، متقارب $y-2 = \pm(x-1)$

سوال 10.66: $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

شکل 10.34

شکل 10.35

شکل 10.36

سوال 10.67: $2x^2 - y^2 + 6y = 3$
جواب: قطع زائد، $\frac{(y-3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$ ، $C(0,3)$ ، $F(0,6)$ اور $F(0,0)$ ، $V(0,\sqrt{6}+3)$ اور $V(0,-\sqrt{6}+3)$ ، متقارب $y = \sqrt{2}x + 3$ اور $y = -\sqrt{2}x + 3$

سوال 10.68: $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

عدم مساوات

سوال 10.69 تا سوال 10.74 میں ایک خطہ کو مطمئن کرنے والی عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ xy مستوی میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

سوال 10.69: $9x^2 + 16y^2 \leq 144$
جواب: ترسیم شکل 10.34 میں دی گئی ہے۔

سوال 10.70: $4x^2 + y^2 \leq 4$ اور $x^2 + y^2 \geq 1$

سوال 10.71: $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ اور $x^2 + 4y^2 \geq 4$
جواب: ترسیم شکل 10.35 میں دی گئی ہے۔

سوال 10.72: $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$

سوال 10.73: $4y^2 - x^2 \geq 4$
جواب: ترسیم شکل 10.36 میں دی گئی ہے۔

سوال 10.74: $\left|x^2 - y^2\right| \leq 1$

شکل 10.37: جسم طواف برائے سوال 10.75

شکل 10.38: خطے برائے سوال 10.81

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.75: قطع مکافی ٹھوس جسم کے حجم کا کلیہ آرشمیدسی
قطع مکافی $y = \frac{4h}{b^2}x^2$ اور لکیر $y = h$ میں گھیرے ہوئے خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس جسم کا حجم مطابقتی مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنا ہو گا (شکل 10.37)۔

سوال 10.76: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لٹکی ہوتی ہیں۔
ایک معلق پل کی کمیت m کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر مبدا پر رسی کا افقی تناو H ہو تب رسی کی منحنی درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{H}x$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ $x = 0$ پر $y = 0$ ابتدائی معلومات ہے۔

سوال 10.77: نقاط $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ اور $(2, 2)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔
جواب: $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$

سوال 10.78: نقاط $(2, 3)$ ، $(3, 2)$ اور $(-4, 3)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.79: ایک دائرہ جس کا مرکز $(-2, 1)$ پر ہے نقطہ $(1, 3)$ سے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ $(1.1, 2.8)$ اس دائرے پر، اس کے اندر یا اس کے باہر پایا جاتا ہے؟
جواب: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$ نقطہ دائرے کے اندر ہے۔

سوال 10.80: جہاں دائرہ $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ محددی محوروں کو قطع کرتا ہے وہاں اس دائرے کے مماس معلوم کریں۔

سوال 10.81: قطع مکافی $y^2=kx, k>0$ پر نقطہ N سے محددی محور کے متوازی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان لکیروں اور محددی محوروں کے کے بیچ مستطیل خطہ کو قطع مکافی دو حصوں A اور B میں تقسیم کرتا ہے (شکل 10.38)۔ (الف) دکھائیں کہ ان خطوں کو y محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت $4:1$ ہے۔ (ب) ان خطوں کو x محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت کیا ہو گی؟
جواب: (ب) $1:1$

سوال 10.82: دکھائیں کہ لکیر $x=-p$ پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2=4px$ پر دو مماس، آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال 10.83: ترخیم $x^2+4y^2=4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے مستطیل کے اضلاع معلوم کریں۔ مستطیل کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہیں۔
جواب: لمبائی $2\sqrt{2}$، چوڑائی $\sqrt{2}$، رقبہ 4

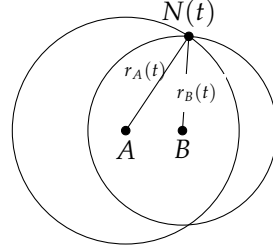
سوال 10.84: ترخیم $9x^2+4y^2=36$ کو (الف) x محور، (ب) y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم معلوم کریں۔

سوال 10.85: ربع اول میں x محور، لکیر $x=4$ اور قطع زائد $9x^2-4y^2=36$ کے بیچ تکونی خطہ کو x محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔
جواب: 24π

سوال 10.86: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور y، دایاں سرحد قطع زائد $x^2-y^2=1$ جبکہ اس کا نچلا اور بالائی سرحد لکیر $y=\pm 3$ ہیں۔ اس خطہ کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 10.87: محور x کے بالائی اور ترخیم $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ کے نیچے خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔
جواب: $(0, \frac{16}{3\pi})$

سوال 10.88: قطع زائد $y^2-x^2=1$ کے بالائی شاخ $y=\sqrt{x^2+1}, 0\leq x\leq\sqrt{2}$ کو x محور کر گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 10.89: پانی کی سطح کو پہلے A اور بعد میں B پر چھو کر شکل 10.39 میں دکھائے گئے امواج پیدا کئے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پھیلتے ہیں، ان کا نقطہ قطع ایک منحنی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہو گا؟ یہ جاننے کے لئے ہم A اور B پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔

شکل 10.39: امواج برائے سوال 10.89

شکل 10.40: قطع مکافی میں انعکاس (سوال 10.90)

لمحہ t پر نقطہ N مرکز A سے $r_A(t)$ اور B سے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہو گا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رفتار (موج کی رفتار) سے بڑھتے ہیں لہٰذا $\frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_B}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ اس سے اخذ کریں کہ $r_A - r_B$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا N اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ A اور B ہیں۔

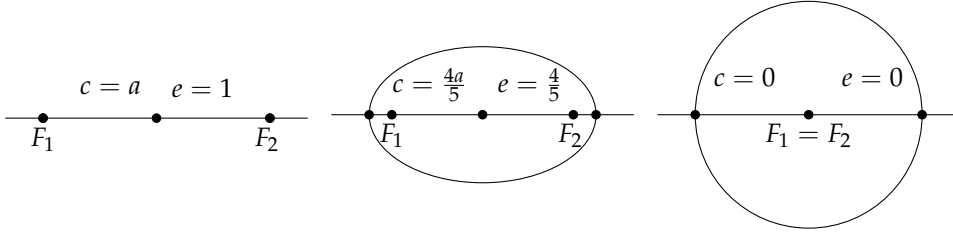
سوال 10.90: قطع مکافی کے خواص انعکاس
قطع مکافی $y^2 = 4px$ پر عمومی نقطہ $N(x_0, y_0)$ کو شکل 10.40 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر لکیر L اس قطع مکافی کا مماس ہے۔ قطع مکافی کا ماسکہ $F(p, 0)$ ہے۔ نقطہ N سے دائیں منعکس شعاع L' ، محور x کے متوازی ہے۔ ہم دکھاتے ہیں کہ F سے خارج، N پر پہنچتا شعاع انعکاس کے بعد L' کا ہم مکان ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ $\beta = \alpha$ ہو گا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

ا. دکھائیں کہ $\tan\beta = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0 - p}$ ہو گا۔

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\tan\alpha = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔ چونکہ α اور β دونوں زاویہ حادہ ہیں لہٰذا $\tan\beta = \tan\alpha$ یعنی $\beta = \alpha$ ہو گا۔

شکل 10.41: اگر c کو 0 سے بڑھا کر a کیا جائے تب ترخیم کی صورت دائرہ سے لکیر کی ہو جاتی ہے۔

10.2 سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی

ہم ہر مخروط حصہ کے ساتھ ایک عدد منسلک کر سکتے ہیں جس کو مخروط حصے کا سنک کہتے ہیں۔ سنک سے مخروط حصے کی قسم (دائرہ، ترخیم، قطع مکافی یا قطع زائد) معلوم کی جا سکتی ہے۔ ترخیم اور قطع زائد کی صورت میں یہ عدد مخروط کی عمومی جسامت کی معلومات بھی فراہم کرتا ہے۔

سنک

اگرچہ مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ c درج ذیل مساوات میں نہیں پایا جاتا ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

ترخیم کے لئے ہم c کو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر a کو مستقل رکھ کر c کو وقفہ $0 \leq c \leq a$ پر تبدیل کیا جائے تب حاصل ترخیم کی صورت بھی تبدیل ہو گی (شکل 10.41)۔ اگر $c = 0$ (یعنی $a = b$) ہو تب یہ دائرہ ہو گا جبکہ c بڑھانے سے یہ چپٹا ہو گا۔ اگر $c = a$ ہو تب راس اور ماسکے ایک دوسرے کے اوپر ہوں گے اور ترخیم ایک سیدھی لکیر کی صورت اختیار کرے گا۔

ہم c اور a کی نسبت سے ترخیم کی صورت بیان کرتے ہیں۔ یہ نسبت ترخیم کی **سنک** کہلاتی ہے۔

تعریف: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ کی **سنک**[19] درج ذیل ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

□

[19] eccentricity

جدول 10.2: سورج کے گرد سیاروں کے مداروں کی سنک

عطارد	زہرہ	زمین	مریخ	مشتری	زحل	یورانس	نیپچون	پلوٹو
0.21	0.01	0.02	0.09	0.05	0.06	0.05	0.01	0.25

نظام شمسی میں سورج کے گرد سیاروں کا مدار ترخیمی ہے۔ جیسا جدول 10.2 میں ان مدار کی سنک سے دیکھا جا سکتا ہے یہ زیادہ تر تقریباً دائری ہیں۔ پلوٹو کا مدار بہت سنکی ہے اور اس کی سنک $e = 0.21$ ہے۔اسی طرح عطارد کی سنک 0.21 ہے۔ نظام شمسی کے دیگر ارکان کے مدار مزید زیادہ سنکی ہیں۔مثال کے طور پر سیارچہ آئکارس جو تقریباً 1.4 کلومیٹر چوڑا اور سورج کے گرد 409 زمینی دنوں میں ایک چکر کاٹتا ہے کی سنک 0.83 ہے۔

مثال 10.6: دم دار ستارہ ہالی کا مدار 36.18 فلکیاتی اکائیاں لمبا اور 9.12 فلکیاتی اکائیاں چوڑا ہے۔ فلکیاتی اکائی سے مراد زمین کے مدار کے نصف اکبر محور کی لمبائی ہے جو $149\,597\,870$ کلومیٹر ہے۔ اس کی سنک

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(36.18/2)^2 + (9.12/2)^2}}{36.18/2} \approx 0.97$$

□

قطع مکافی کا ایک ماسکہ اور ایک ناظمہ ہوتے ہیں جبکہ ترخیم کے دو ماسکے اور دو ناظمہ ہوتے ہیں جو محور اکبر کے متوازی، مرکز سے $\frac{a}{e}$ فاصلے پر ہوتے ہیں۔ قطع مکافی کی ایک خاصیت درج ذیل ہے

$$NF = 1 \cdot ND \tag{10.12}$$

یعنی ترخیم پر کسی بھی نقطہ N کا ماسکہ سے فاصلہ اور N کا ناظمہ پر قریبی نقطہ D سے فاصلہ ایک جیسا ہو گا۔ ترخیم کے لئے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مساوات 10.12 کی جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \qquad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{10.13}$$

یہاں e سنک ہے، N ترخیم پر کوئی نقطہ ہے، F_1 اور F_2 ماسکے ہیں اور ناظمہ پر N کے قریب ترین نقطے D_1 اور D_2 ہیں (شکل 10.42)۔

مساوات 10.13 کے دونوں اجزاء میں ماسکہ اور ناظمہ میں مطابقت لازمی ہے، یعنی، اگر ہم N سے F_1 تک فاصلہ لیں تب ہم N سے ناظمہ تک فاصلہ لیتے ہوئے ترخیم کا وہ ناظمہ لیں گے جو ترخیم کے اسی ہاتھ ہو۔ ناظمہ $x = -\frac{a}{e}$ اور ماسکہ $F_1(-c, 0)$ مطابقت رکھتے ہیں جبکہ ناظمہ $x = \frac{a}{e}$ اور ناظمہ $F_2(c, 0)$ مطابقت رکھتے ہیں۔

قطع زائد کی سنک بھی $e = \frac{c}{a}$ ہے، البتہ اب c کی قیمت $\sqrt{a^2 + b^2}$ نا کہ $\sqrt{a^2 - b^2}$ ہو گی۔ مزید ترخیم کی سنک کے برعکس، قطع زائد کی سنک ہر صورت 1 سے زیادہ ہو گی۔

شکل 10.42: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ناظمہ اور ماسکے۔ ناظمہ 1 کا مطابقتی ماسکہ F_1 ہے جبکہ ناظمہ 2 کا مطابقتی ماسکہ F_2 ہے۔

شکل 10.43: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ماسکے اور ناظمہ۔ قطع زائد پر ہر N کے لئے $NF_1 = e \cdot ND_1$ اور $NF_2 = e \cdot ND_2$ ہوں گے۔

تعریف: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کی سنک درج ذیل ہو گی۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

□

ترخیم اور قطع زائد دونوں میں ماسکوں کے بیچ فاصلہ اور راس کے بیچ فاصلہ کا نسبت، سنک کے برابر ہو گا۔

$$\text{سنک} = \frac{\text{فاصلہ بیچ کے ماسکوں}}{\text{فاصلہ بیچ کے راس}}$$

ترخیم میں راس دور اور ماسکے قریب ہوتے ہیں اور ان کی نسبت 1 سے کم ہوتی ہے۔ قطع مکافی میں ماسکے دور اور راس قریب ہوتے ہیں لٰہذا سنک 1 سے زیادہ ہوتا ہے۔

مثال 10.7: ایک ترخیم کی سنک 0.8 اور ماسکے $(0, \pm 7)$ ہیں۔ اس کے راس تلاش کریں۔

حل: چونکہ $e = \frac{c}{a}$ ہے لٰہذا راس $(0, \pm a)$ پر ہوں گے جہاں

$$a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$$

یعنی $(0, \pm 8.75)$ ہو گا۔ □

مثال 10.8: قطع زائد $9x^2 - 16y^2 = 144$ کی سنک معلوم کریں۔

حل: ہم قطع زائد کی مساوات کے دونوں اطراف کو 144 سے تقسیم کر کے معیاری مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1, \quad \implies \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

یوں $a^2 = 16$ اور $b^2 = 9$ ہیں لہٰذا $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

□

ترخیم کی طرح یہاں بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ لکیریں $x = \pm\frac{a}{e}$ قطع زائد کے ناظمہ ہوں گے، یعنی:

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \quad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{10.14}$$

یہاں قطع زائد پر N کوئی نقطہ ہے، F_1 اور F_2 ماسکے ہیں جبکہ ناظمہ پر N کے قریب ترین نقطے D_1 اور D_2 ہیں (شکل 10.43)۔

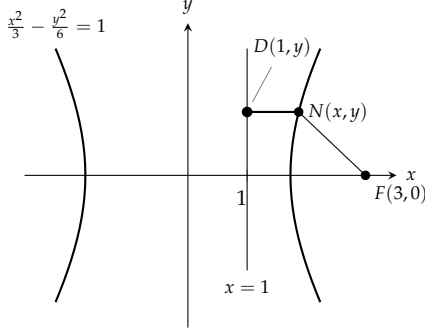
تصویر مکمل کرنے کی خاطر ہم قطع مکافی کی سنک کی تعریف $e = 1$ لیتے ہیں۔ مساوات 10.12 تا مساوات 10.14 کو یوں ایک ہی روپ $NF = e \cdot ND$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

تعریف: قطع مکافی کی سنک $e = 1$ ہے۔

□

ماسکہ اور ناظمہ کی مساوات $NF = e \cdot ND$ ، قطع مکافی، ترخیم اور قطع زائد کو ایک دوسرے کے ساتھ درج ذیل طریقہ سے ملاتی ہے۔ فرض کریں نقطہ N سے کسی مقررہ لکیر (ناظمہ) تک فاصلہ ضرب e اس نقطے سے کسی مقررہ نقطہ F (ماسکہ) کے فاصلہ کے برابر ہو یعنی:

$$NF = e \cdot ND \tag{10.15}$$

جہاں e ایک مستقل ہے۔ تب N درج ذیل راہ کھینچے گا۔

شکل 10.44: قطع زائد برائے مثال 10.9

ا. قطع مکافی اگر $e=1$ ہو،

ب. ترخیم اگر $1>$ ہو،

ج. قطع زائد اگر $e>1$ ہو۔

مساوات 10.15 ظاہری طور پر زیادہ دلچسپ نظر نہیں آتی ہے۔ اس میں کوئی محدد نہیں پائے جاتے ہیں اور اس کو محددی روپ میں لکھنے سے، e کی قیمت پر منحصر، مختلف مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ کم از کم کارتیسی محدد میں ایسا ہوتا ہے۔ البتہ جیسا ہم حصہ 10.8 میں دیکھیں گے، قطبی محدد میں، e کی قیمت سے قطع نظر، مساوات $NF=e\cdot ND$ کی ترجمانی ایک ہی انتہائی سادہ مساوات کرتی ہے جو تقریباً 300 سالوں سے فلکی سائنسدانوں کی پسندیدہ مساوات رہی ہے۔

ایک قطع مکافی جس کا مرکز مبدا پر ہو کا x محور پر ماسکہ اور مطابقتی ناظمہ جانتے ہوئے ہم شکل سے e کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ سنک e کی قیمت جانتے ہوئے ہم کارتیسی نظام میں قطع زائد کی مساوات کو، اگلی مثال کی طرح، مساوات $NF=e\cdot ND$ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل 10.42 کی مدد سے اس ترخیم کی مساوات بھی کارتیسی محدد میں حاصل کر سکتے ہیں جس کا مرکز مبدا پر اور ماسکے x محور پر ہوں۔

مثال 10.9: ایک قطع زائد جس کا مرکز مبدا پر ہے کا ماسکہ $(3,0)$ اور مطابقتی ناظمہ $x=1$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم شکل 10.43 کو دیکھ کر اس کی سنک معلوم کرتے ہیں۔ چونکہ ماسکہ $(c,0)=(3,0)$ ہے لہٰذا $c=3$ ہو گا۔ ناظمہ درج ذیل لکیر ہو گی

$$x=\frac{a}{e}=1$$

لہٰذا $a = e$ ہو گا۔ سنک کی مساوات $e = \frac{c}{a}$ کے ساتھ ملا کر $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$ لہٰذا $e^2 = 3$ یعنی $e = \sqrt{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ سنک e جانتے ہوئے ہم شکل 10.44 کو دیکھ کر $NF = e \cdot ND$ سے مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} NF &= e \cdot ND && \text{مساوات } 10.15 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}|x-1| && e = \sqrt{3} \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\ 2x^2 - y^2 &= 6 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1 \end{aligned}$$

□

سوالات

ترخیم

سوال 10.91 تا سوال 10.98 میں ترخیم کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد ترخیم کے ماسکے اور ناظمہ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

سوال 10.91: $16x^2 + 25y^2 = 400$
جواب: $e = \frac{3}{5},\ F(\pm 3, 0),\ x = \pm\frac{25}{3}$

سوال 10.92: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال 10.93: $2x^2 + y^2 = 2$
جواب: $e = \frac{1}{\sqrt{2}},\ F(0, \pm 1),\ y = \pm 2$

سوال 10.94: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال 10.95: $3x^2 + 2y^2 = 6$
جواب: $e = \frac{1}{\sqrt{3}},\ F(0, \pm 1),\ y = \pm 3$

سوال 10.96: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال 10.97: $6x^2 + 9y^2 = 54$
جواب: $e = \frac{\sqrt{3}}{3},\ F(\pm\sqrt{3}, 0),\ x = \pm 3\sqrt{3}$

سوال 10.98: $169x^2+25y^2=4225$

سوال 10.99 تا سوال 10.102 میں ترخیم کے ماسکے یا راس اور سنک دیا گیا ہے۔ ترخیم xy مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ان میں ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال 10.99: ماسکے $(0,\pm 3)$ اور سنک 0.5
جواب: $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$

سوال 10.100: ماسکے $(\pm 8,0)$ اور سنک 0.2

سوال 10.101: راس $(0,\pm 70)$ اور سنک 0.1
جواب: $\frac{x^2}{4851}+\frac{y^2}{4900}=1$

سوال 10.102: راس $(\pm 10,0)$ اور سنک 0.24

سوال 10.103 تا سوال 10.106 میں ترخیم کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ ترخیم xy مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ شکل 10.42 کو دیکھ کر ترخیم کی سنک معلوم کریں۔ اس کے بعد ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال 10.103: ماسکہ $(\sqrt{5},0)$ ، ناظمہ $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$
جواب: $e=\frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

سوال 10.104: ماسکہ $(4,0)$ ، ناظمہ $x=\frac{16}{3}$

سوال 10.105: ماسکہ $(-4,0)$ ، ناظمہ $x=-16$
جواب: $e=\frac{1}{2},\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

سوال 10.106: ماسکہ $(-\sqrt{2},0)$ ، ناظمہ $x=-2\sqrt{2}$

سوال 10.107: ایک ترخیم جس کی سنک $\frac{4}{5}$ ہو کو ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال 10.108: سیارہ پلوٹو (جس کی سنک 0.25 ہے) کا مدار ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال 10.109: ایک ترخیم کے آخری سر $(1,1)$ ، $(3,4)$ ، $(1,7)$ اور $(-1,4)$ ہیں۔ اس ترخیم کا خاکہ کھینچیں، اس کی معیاری مساوات، ماسکے، سنک اور ناظمہ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1,\ F(1,4\pm\sqrt{5}),\ e=\frac{\sqrt{5}}{3},\ y=4\pm\frac{9\sqrt{5}}{5}$

سوال 10.110: ایک ترخیم کی سنک $\frac{2}{3}$ جبکہ لکیر $x=9$ اس کی ناظمہ اور $(4,0)$ مطابقتی ماسکہ ہے۔ اس ترخیم کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.111: درج ذیل ترخیم a ، b اور c کی کن قیمتوں کے لئے مبدا پر x محور کے متوازی ہو گا اور نقطہ $(-1,2)$ سے گزرے گا؟

$$4x^2+y^2+ax+by+c=0$$

اس ترخیم کی سنک کیا ہے؟
جواب: $a=0,\ b=-4,\ c=0,\ e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 10.112: ترخیم کی خاصیت انعکاس
ایک ترخیم کو اس کے محور اکبر کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ترخیمی جسم کی اندرونی سطح پر چاندی لگا کر ترخیمی آئینہ بنایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس ترخیمی آئینہ کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔ صدا بھی اسی راہ کو اپناتا ہے۔ اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جاتا ہے۔ (اشارہ: ترخیم کو xy مستوی پر معیاری مقام پر رکھ کر دکھائیں کہ کسی بھی نقطہ N سے دونوں ماسکوں تک لکیر، N پر ترخیم کے مماس کے ساتھ ایک جیسے زاویے بناتے ہیں۔)

قطع زائد

سوال 10.113 تا سوال 10.120 میں قطع زائد کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد قطع زائد کے ماسکہ اور ناظمہ معلوم کر کے ترسیم کریں۔

سوال 10.113: $x^2-y^2=1$
جواب: $e=\sqrt{2},\ F(\pm\sqrt{2},0),\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

سوال 10.114: $9x^2-16y^2=144$

سوال 10.115: $y^2-x^2=8$
جواب: $e=\sqrt{2},\ F(0,\pm4),\ y=\pm2$

سوال 10.116: $y^2-x^2=4$

سوال 10.117: $8x^2 - 2y^2 = 16$
جواب: $e = \sqrt{5},\ F(\pm\sqrt{10}, 0), x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

سوال 10.118: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال 10.119: $8y^2 - 2x^2 = 16$
جواب: $e = \sqrt{5},\ F(0, \pm\sqrt{10}),\ y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

سوال 10.120: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال 10.121 تا سوال 10.124 میں قطع زائد کی سنک اور راس یا ماسکے دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد xy مستوی میں پائے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان قطع زائد کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.121: سنک 3 راس $(0, \pm 1)$
جواب: $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

سوال 10.122: سنک 2 راس $(\pm 2, 0)$

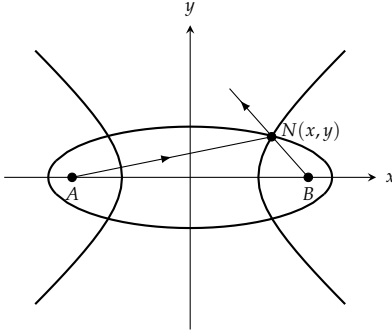
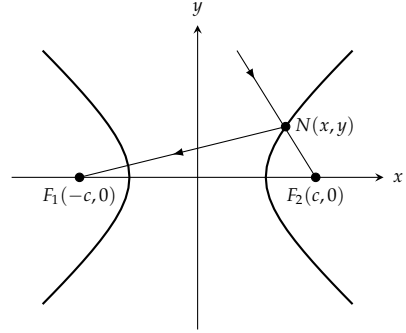
سوال 10.123: سنک 3 ماسکے $(\pm 3, 0)$
جواب: $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

سوال 10.124: سنک 1.25 ماسکے $(0, \pm 5)$

سوال 10.125 تا سوال 10.128 میں قطع زائد کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد xy مستوی میں پائے جاتے ہیں اور ان کا مرکز مبدا پر پایا جاتا ہے۔ قطع زائد کی سنک اور معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.125: ماسکہ $(4, 0)$، ناظمہ $x = 2$
جواب: $e = \sqrt{2},\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

سوال 10.126: ماسکہ $(\sqrt{10}, 0)$، ناظمہ $x = \sqrt{2}$

سوال 10.127: ماسکہ $(-2, 0)$، ناظمہ $x = -\frac{1}{2}$
جواب: $e = 2,\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

شکل 10.46: قطع زائد اور ترخیم برائے سوال 10.132

شکل 10.45: قطع زائد برائے سوال 10.131

سوال 10.128: ماسکہ $(-6,0)$، ناظمہ $x=-2$ ، $2-=$

سوال 10.129: ایک قطع زائد کی سنک $\frac{3}{2}$ اور ایک ماسکہ $(1,-3)$ ہے۔ اس کا مطابقتی ناظمہ لکیر $y=2$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔
جواب: $\frac{(y-6)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{45}=1$

سوال 10.130: سنک کی قطع زائد کی صورت پر اثر
سنک بڑھانے سے قطع زائد کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ یہ جاننے کے لئے مساوات $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ کو a اور b کی بجائے a اور e کی صورت میں لکھیں۔ مختلف e کی قیمتوں کے لئے قطع زائد ترسیم کریں (a مستقل لیں)۔

سوال 10.131: قطع زائد کی خاصیت انعکاس
دکھائیں کہ قطع زائد کے ایک ماسکہ کی طرف گامزن شعاع، قطع زائد سے انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے (شکل 10.45)۔ (اشارہ: دکھائیں کہ نقطہ N پر قطع زائد کا مماس قطع NF_1 اور NF_2 کے بیچ زاویہ کو نصف میں تقسیم کرتا ہے۔)

سوال 10.132: ہم ماسکہ ترخیم اور قطع زائد
دکھائیں کہ ایک ترخیم اور قطع زائد جن کے ایک جیسے ماسکے A اور B ہوں، ایک دوسرے کو 90 درجہ پر قطع کرتے ہیں (شکل 10.46)۔ (اشارہ: ماسکہ A سے خارج شعاع قطع زائد کے نقطہ N پر پہنچ کر قطع زائد سے یوں منعکس ہو گا جیسا یہ شعاع ماسکہ B سے خارج ہوا ہو (سوال 10.131)۔ یہی شعاع ترخیم سے منعکس ہو کر ماسکہ B پر پہنچتا ہے (سوال 10.112)۔)

10.3 دو درجی مساوات اور گھومنا

ہم اس حصہ میں تحلیلی جیومیٹری کی اس حیرت کن نتیجہ پر غور کریں گے کہ درج ذیل مساوات کی کارتیسی ترسیم

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10.16}$$

جہاں A ، B ، C اور D بیک وقت تمام صفر نہ ہوں، تقریباً ہر بار مخروطی حصہ ہو گا۔ ایسا تب نہیں ہوتا جب یا ترسیم ہی نہ پائی جاتی ہو اور یا جب ترسیم دو متوازی لکیروں پر مشتمل ہو۔ مساوات 10.16 کی تمام ترسیمات، چاہیں وہ قوسی ہو یا نہیں، **دو درجی منحنیات**[20] کہلاتی ہیں۔

جزو Bxy

آپ نے دیکھا کہ حصہ 10.1 میں مخروطی حصوں کی مساواتوں میں جزو Bxy نہیں پایا جاتا، چونکہ ان کے محور، محددی نظام کے محور کے متوازی (بلکہ ہم مکان) ہیں۔

مخروط حصہ کے محور، محددی محور کے غیر متوازی ہونے کی صورت کو دیکھنے کی خاطر ہم ایک قطع زائد کی مساوات حاصل کرتے ہیں جس کا $a = 3$ ہو اور جس کے ماسکے $F_1(-3,-3)$ اور $F_2(3,3)$ ہوں (شکل 10.47)۔ مساوات $|NF_1 - NF_2| = 2a$ اب $|NF_1 - NF_2| = 2(3) = 6$ یا

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

روپ اختیار کرتا ہے۔ ہم ایک جذر کو دوسرے ہاتھ منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذر کو اکیلے ایک طرف رکھ کر دونوں اطراف کا مربع لے کر

$$2xy = 9 \tag{10.17}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات 10.16 کی ایک روپ ہے جس میں جزو Bxy پایا جاتا ہے۔ مساوات 10.17 میں دیے گئے قطع زائد کے متقارب x اور y محور ہیں، جبکہ اس کا محور ماسکہ مثبت x محور کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہے۔ اس مثال کی طرح مساوات 10.16 میں جزو Bxy صرف اس صورت پایا جاتا ہے جب مخروط کے محور ترچھے ہوں۔

محددی محور گھمانے سے جزو Bxy سے نجات

مخروط کی مساوات سے جزو Bxy ہٹانے کی خاطر ہم محددی محور کر گھما کر مخروط کے محور کو محددی محور کے متوازی بناتے ہیں۔ گھمانے کی مساواتوں کو ہم درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل 10.48 میں گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، مبدا کے گرد زاویہ α گھمانا دکھایا گیا ہے۔اس شکل سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} x &= OM = ON\cos(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\cos\alpha - ON\sin\theta\sin\alpha \\ y &= MN = ON\sin(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\sin\alpha + ON\sin\theta\cos\alpha \end{aligned} \tag{10.18}$$

---

[20] quadratic curves

شکل 10.47: قطع زائد $2xy = 9$ کا محور ماسکہ، مثبت x محور کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ زاویہ بناتا ہے۔

شکل 10.48: مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ محور کو α زاویہ گھمانا۔

چونکہ

$$ON\cos\theta = OM' = x'$$

اور

$$ON\sin\theta = M'N = y'$$

ہیں لہٰذا مساوات 10.18 درج ذیل دیں گے۔

محددی محور مبدا کے گرد گھمانے کی مساواتیں

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \tag{10.19}$$

مثال 10.10: مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، x اور y محور کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن گھمایا جاتا ہے۔ قطع زائد $2xy = 9$ کا ان نئے محور میں مساوات تلاش کریں۔

حل: چونکہ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ لہٰذا ہم مساوات 10.19 سے

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

شکل 10.49: نئے محور x' اور y' میں قطع زائد کی مساوات (مثال 10.10)

شکل 10.50: مخروط کو $\frac{\pi}{6}$ زاویہ گھڑی کے الٹ رخ گھمایا گیا ہے (مثال 10.11)

کو $2xy = 9$ میں پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل 10.49)۔

$$2\Big(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\Big)\Big(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\Big) = 9$$
$$x'^2 - y'^2 = 0$$
$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} = 1$$

□

دو درجی مساوات 10.16 پر مساوات 10.19 لاگو کرنے سے درج ذیل نئی دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{10.20}$$

جہاں پرانے اور نئے مستقلوں کے رشتے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha\\
B' &= B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha\\
C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha\\
D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha\\
E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha\\
F' &= F
\end{aligned} \tag{10.21}$$

یہ مساوات دیگر معلومات کے ساتھ ہمیں $B'=0$ کے حصول کا طریقہ بھی دیتے ہیں۔یوں Bxy جزو والی مساوات سے شروع کر کے ہم اس کو زاویہ α گھما کر ایسی دو درجی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جس میں $B'xy$ کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ ایسا زاویہ جاننے کے لئے ہم مساوات 10.21 میں $B'=0$ لے کر α کے حاصل مساوات

$$B\cos 2\alpha+(C-A)\sin 2\alpha=0$$

کو α کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں ہمیں در حقیقت مندرجہ ذیل دو مساوات میں سے کسی ایک کا حل درکار ہو گا۔

$$\cot 2\alpha=\frac{A-C}{B},\quad \tan 2\alpha=\frac{B}{A-C} \tag{10.22}$$

مثال 10.11: درج ذیل دو درجی مساوات میں $\sqrt{3}xy$ کے جزو کے خاتمہ کے لئے محددی محور کو زاویہ α گھمایا جاتا ہے۔ اس زاویہ کو تلاش کریں۔

$$2x^2+\sqrt{3}xy+y^2-10=0$$

نئی مساوات تلاش کریں اور اس کو پہچانیں۔

حل: دی گئی مساوات میں $A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ اور $C=1$ ہیں۔ مساوات 10.22 میں ان قیمتوں کو پر کر کے α معلوم کرتے ہیں۔

$$\cot 2\alpha=\frac{A-C}{B}=\frac{2-1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\implies 2\alpha=\frac{\pi}{3}$$

یوں $\alpha=\frac{\pi}{6}$ ، $A=2$ ، $B=\sqrt{3}$ ، $C=1$ ، $D=E=0$ اور $F=-10$ کو مساوات 10.21 میں پر کر کے

$$A'=\frac{5}{2},\, B'=0,\, C'=\frac{1}{2},\, D'=E'=0,\, F'=-10$$

حاصل ہوں گے اور مساوات 10.20 درج ذیل دے گا۔

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{20}=1 \quad \text{یا} \quad \frac{5}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2-10=0$$

یہ منحنی ترخیم ہے جس کے ماسکے نئی y' محور پر پائے جاتے ہیں (شکل 10.50)۔ □

دو درجی مساوات کے ممکنہ ترسیمات

ہم اب عمومی دو درجی مساوات کی ترسیمات پر آتے ہیں۔

چونکہ محور کو گھما کر Bxy طرز کے جزو کو ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا ہم تصور کرتے ہیں کہ یہی کرتے ہوئے درج ذیل عمومی دو درجی مساوات حاصل کی گئی ہے

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10.23}$$

جہاں A' تا F' کو بالترتیب A تا F لکھا گیا ہے۔ مساوات 10.23 درج ذیل کو ظاہر کرتی ہے۔

ا. جب $A = C \neq 0$ ہو تب دائرہ (مخصوص حالات میں یہ نقطہ مانند ہو سکتا ہے یا اس کی کوئی ترسیم نہیں ہو گی۔)

ب. اگر مساوات 10.23 ایک متغیر میں خطی اور دوسرے میں دو درجی ہو تب یہ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

ج. اگر A اور C دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب یہ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔(مخصوص حالات میں یہ دائرہ، واحد نقطہ دے سکتی ہے یا اس کی کوئی ترسیم نہیں ہو سکتی ہے۔)

د. اگر A اور C کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہوں تب یہ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔(مخصوص حالات میں یہ دو منقطع لکیروں کو ظاہر کر سکتی ہے۔)

ھ. اگر A اور C دونوں صفر ہوں جبکہ D اور E میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو تب یہ سیدھی لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔

و. اگر مساوات 10.23 کے بائیں ہاتھ کو دو خطی اجزاء کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب یہ ایک یا دو سیدھی لکیروں کو ظاہر کرتی ہے۔

دو درجی ترسیمات کی مثالوں کے لئے صفحہ 1236 پر جدول 10.3 دیکھیں۔

ممیز پرکھ

درج ذیل مساوات کی قسم جاننے کے لئے ہمیں اس کا جزو Bxy ہٹانے کی ضرورت نہیں۔

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{10.24}$$

اگر ہمیں یہی معلومات درکار ہو تب ہم درج ذیل پرکھ بروئے کار لا سکتے ہیں۔

جیسا ہم دیکھ چکے، $B \neq 0$ کی صورت میں ہم محددی محور کو مبدا کے گرد α زاویہ گھما کر جہاں α درج ذیل مساوات

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \tag{10.25}$$

کو مطمئن کرتا ہو، مساوات 10.24 کو درج ذیل روپ میں بدلتا ہے

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x'E'y' + F' = 0 \tag{10.26}$$

جس میں Bxy طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

اب مساوات 10.26 کی ترسیم (حقیقی یا انحطاطی) درج ذیل ہو سکتی ہیں۔

ا. اگر $A' = 0$ یا $C' = 0$ یعنی $A'C' = 0$ ہو تب قطع مکافی،

ب. اگر A' اور C' کی علامتیں ایک دوسری جیسی ہوں یعنی اگر $A'C' > 0$ ہو تب ترخیم،

ج. اور اگر A' اور C' کی علامتیں ایک دوسری کی الٹ ہوں یعنی اگر $A'C' < 0$ ہو تب قطع زائد۔

مساوات 10.21 سے کسی بھی زاویہ کے لئے

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' \tag{10.27}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں محددی محور گھمانے سے مقدار $B^2 - 4AC$ تبدیل نہیں ہوتی ہے البتہ مساوات 10.25 کو مطمئن کرتا زاویہ α سے محور گھمانے سے B' صفر اور درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

چونکہ $A'C' = 0$ کی صورت میں ترسیم قطع مکافی، $A'C' > 0$ کی صورت میں ترخیم اور $A'C' < 0$ کی صورت میں قطع زائد ہو گی لہٰذا $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترسیم لازمی طور پر قطع مکافی، $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں ترخیم اور $B^2 - 4AC > 0$ کی صورت میں قطع زائد۔ عدد $B^2 - 4AC$ کو مساوات 10.24 کا **ممیز**[21] کہتے ہیں۔

ممیز پرکھ

یہ جانتے ہوئے کہ کبھی کبھار انحطاطی صورت پائی جائے گی، درج ذیل دو قدری مساوات

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ا. $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترخیم،

ب. $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں قطع مکافی اور

ج. $B^2 - 4AC > 0$ کی صورت میں قطع زائد کو ظاہر کرے گی۔

---

[21] discriminant

جدول 10.3: دو درجی منحنیات کی مثالیں۔

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

	A	B	C	D	E	F	مساوات	رائے
دائرہ	1		1			-4	$x^2+y^2=4$	$A=C;F<0$
قطع مکافی			1	-9			$y^2=9x$	y میں دو درجی، x میں خطی
ترخیم	4		9			-36	$4x^2+9y^2=36$	A ، C یکساں علامت، $A\neq C$ ؛ $F<0$
زائد قطع	1		-1			-1	$x^2-y^2=1$	A ، C الٹ علامت
ایک لکیر	1						$x^2=0$	y محور
مقطع لکیریں		1		1	-1	-1	$xy+x-y-1=0$	$(y+1)(x-1)=0$ لہٰذا $x=1$ ، $y=-1$
متوازی لکیریں	1			-3		2	$x^2-3x+2=0$	$(x-2)(x-1)=0$ لہٰذا $x=1$ ، $x=2$
نقطہ	1		1				$x^2+y^2=0$	مبدا
بلا ترسیم	1					1	$x^2=-1$	ترسیم نہیں کیا جا سکتی ہے

□

مثال 10.12: (الف) درج ذیل کی بنا $3x^2-6xy+3y^2+2x-7=0$ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2-4AC=(-6)^2-4(3)(3)=36-36=0$$

(ب) درج ذیل کی بنا $x^2+xy+y^2-1=0$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔

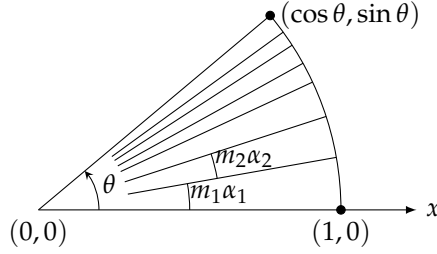
$$B^2-4AC=(1)^2-4(1)(1)=-3<0$$

(ج) درج ذیل کی بنا $xy-y^2-5y+1=0$ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2-4AC=(1)^2-4(0)(-1)=1>0$$

□

فنیات

بعض کیلکولیٹر گھمانے کی عمل سے سائن اور کوسائن معلوم کرتا ہے۔ یہ عمل درج ذیل ہے۔

شکل 10.51: سائن اور کوسائن حاصل کرنے کا عمل۔

ا. کیلکولیٹر میں تقریباً 10 زاویے محفوظ ہوتے ہیں مثلاً

$$\alpha_1 = \sin^{-1}(10^{-1}), \quad \alpha_2 = \sin^{-1}(10^{-2}), \quad \cdots, \quad \alpha_{10} = \sin^{-1}(10^{-10})$$

ب. اسی طرح اس میں α_1 تا α_{10} کے سائن اور کوسائن بھی محفوظ ہوتے ہیں۔

کسی بھی زاویہ θ کا سائن یا کوسائن معلوم کرنے کی خاطر ہم کیلکولیٹر میں θ ریڈیئن داخل کرتے ہیں۔ کیلکولیٹر 2π کا مضرب θ کے ساتھ جمع کر کے 0 اور 2π کے بیچ زاویہ حاصل کرتا ہے جس کا سائن اور کوسائن وہی ہو گا جو اصل زاویہ θ کا ہو گا (لہٰذا ہم اس نئے زاویہ کو θ ہی کہتے ہیں)۔ اب θ سے تجاوز کئے بغیر کیلکولیٹر θ کو α_1 کا مضرب جمع α_2 کا مضرب اور اسی طرح چلتے ہوئے، جمع α_{10} کا مضرب لکھتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_{10}\alpha_{10}$$

اس کے بعد کیلکولیٹر نقطہ $1,0$ کو m_1 گنّا α_1 زاویہ گھماتا ہے۔ اس کے بعد m_2 گنّا α_2 زاویہ گھماتا ہے، اور اسی طرح چلتے ہوئے، m_{10} گنّا α_{10} زاویہ گھماتا ہے۔ اکائی دائرہ پر پائے جانے والے نقطہ $(1,0)$ کے آخری مقام کے محدد $(\cos\theta, \sin\theta)$ ہوں گے (شکل 10.51)۔

سوالات

ممیز کا استعمال
ممیز $B^2 - 4AC$ استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں آیا سوال 10.133 تا سوال 10.148 میں دی گئی مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 10.133: $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$
جواب: قطع زائد

سوال 10.134: $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$

سوال 10.135: $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1$
جواب: ترخیم

سوال 10.136: $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

سوال 10.137: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$
جواب: قطع مکافی

سوال 10.138: $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$

سوال 10.139: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$
جواب: قطع مکافی

سوال 10.140: $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$

سوال 10.141: $xy + y^2 - 3x = 5$
جواب: قطع زائد

سوال 10.142: $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$

سوال 10.143: $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$
جواب: قطع زائد

سوال 10.144: $2x^2 - 4.9xy + 3y^2 - 4x = 7$

سوال 10.145: $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$
جواب: ترخیم

سوال 10.146: $25x^2 + 21xy + 4y^2 - 350x = 0$

سوال 10.147: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$
جواب: ترخیم

سوال 10.148: $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

محددی محور گھمانا

سوال 10.149 تا سوال 10.158 میں محددی محور کو گھما کر دی گئی مساوات سے Bxy طرز کا جزو ختم کریں۔ اس کے بعد مساوات کی ترسیم کو پہچانیں۔(نئی مساوات گھمانے کے رخ اور مقدار پر منحصر ہو گی۔)

سوال 10.149: $xy = 2$
جواب: $x'^2 - y'^2 = 4$ قطع زائد

سوال 10.150: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال 10.151: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$
جواب: $4x'^2 + 16y'^2 = 0$ قطع مکافی

سوال 10.152: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$

سوال 10.153: $x^2 - 2xy + y^2 = 2$
جواب: $y'^2 = 1$ متوازی لکیریں

سوال 10.154: $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$

سوال 10.155: $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$
جواب: $2\sqrt{2}x'^2 + 8\sqrt{2}y'^2 = 0$ قطع مکافی

سوال 10.156: $xy - y - x + 1 = 0$

سوال 10.157: $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$
جواب: $4x'^2 + 2y'^2 = 19$ ترخیم

سوال 10.158: $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7$

سوال 10.159: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر Bxy طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات معلوم نہ کریں۔

$$14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26370y - 17 = 0$$

جواب: $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ یا $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

سوال 10.160: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر Bxy طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات حاصل نہ کریں۔

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$$

کیلکولیٹر

سوال 10.161 تا سوال 10.166 میں وہ زاویہ α دریافت کریں جس پر محددی محور کو گھما کر جزو Bxy کو مساوات سے ہٹایا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\sin\alpha$ اور $\cos\alpha$ کو 2 اعشاریہ درست دریافت کریں۔ مساوات 10.21 استعمال کرتے ہوئے نئی مساوات کے عددی سر ایک اعشاریہ تک تلاش کریں۔ اب بتائیں آیا مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال 10.161: $x^2 - xy + 3y^2 + x - y - 3 = 0$

جواب: $A' = 0.88,\ B' = 0.00,\ C' = 3.10,\ D' = 0.74,\ E' = -1.20,\ F' = -3$

$0.88x'^2 + 3.01y'^2 + 0.74x' - 1.20y' - 3 = 0$ ترخیم

سوال 10.162: $2x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 7 = 0$

سوال 10.163: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5 = 0$

جواب: $A' = 0.00,\ B' = 0.00,\ C' = 5.00,\ D' = 0,\ E' = 0,\ F' = -5$

$5.00y'^2 - 5 = 0$ یا $y' = \pm 1$ متوازی لکیریں

سوال 10.164: $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 49 = 0$

سوال 10.165: $3x^2 + 5xy + 2y^2 - 8y - 1 = 0$

جواب: $A' = 5.05,\ B' = 0.00,\ C' = -0.05,\ D' = -5.07,\ E' = -6.18,\ F' = -1$

$5.05x'^2 - 0.05y'^2 - 5.07x' - 6.18y' - 1 = 0$ قطع زائد

سوال 10.166: $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x - 86 = 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.167: مبدا کے گرد 90° گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

جواب: (الف) $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ ، (ب) $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$ ، (ج) $x'^2 + y'^2 = a^2$ ، (د) $y' = -\frac{1}{m}x'$
(ہ) $y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{b}{m}$

سوال 10.168: مبدا کے گرد $180°$ گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

سوال 10.169: قطع زائد $xy = a$ سائنس اور ریاضیات میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ایک صورت $xy = 1$ ہے۔

ا. محددی محور کو $45°$ زاویہ گھما کر مساوات $xy = 1$ کی ایسی صورت تلاش کریں جس میں Bxy طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ اس نئی مساوات کو حاصل کریں۔

ب. مساوات $xy = a$ کے لئے بھی یہی کریں۔

جواب: (الف) $x'^2 - y'^2 = 2$ ، (ب) $x'^2 - y'^2 = 2a$

سوال 10.170: قطع زائد $xy = 2$ کی سنک دریافت کریں۔

سوال 10.171: کیا $AC < 0$ کی صورت میں مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10.172: کیا کسی بھی غیر انحطاطی مخروط حصہ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ میں درج ذیل تمام خواص پائے جاتے ہیں؟

ا. یہ مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

ب. یہ نقطہ $(1,0)$ سے گزرتا ہے۔

ج. یہ نقطہ $(-2,1)$ پر لکیر $y = 1$ کو مماس ہے۔

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10.173: دکھائیں کہ مبدا کے گرد محور کو گھمانے کی مساوات 10.19 میں ہر زاویہ α کے لئے $x^2 + y^2 = a^2$ سے $x'^2 + y'^2 = a^2$ حاصل ہو گا۔

سوال 10.174: دکھائیں کہ جب بھی $A = C$ ہو، محور کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن گھمانے سے مساوات 10.16 کا Bxy جزو ختم ہوتا ہے۔

سوال 10.175:

ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $2y = -x - 3$ ہے۔

جواب: (الف) قطع مکافی

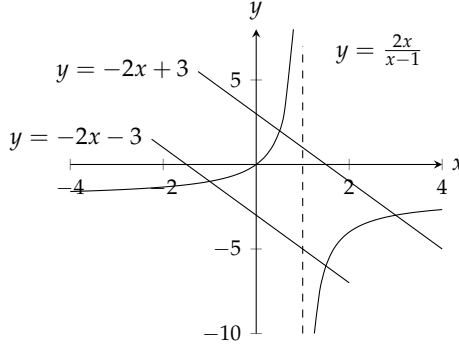
سوال 10.176:

ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$9x^2 + 6xy + y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $y = -3x + 2$ ہے۔

سوال 10.177: (الف) منحنی $xy + 2x - y = 0$ کس قسم کا مخروط حصہ ہے؟ (ب) مساوات $xy + 2x - y = 0$ کو y کے لئے حل کر کے اس کو x کے ناطق تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ (ج) اس منحنی کے عمودی اور لکیر $y = -2x$ کے متوازی لکیروں کی مساواتیں معلوم کریں۔ ان لکیروں کو بھی ترسیم کا حصہ بنائیں۔
جواب: (الف) قطع زائد، (ب) شکل 10.52، (ج) $y = -2x - 3$ ، $y = -2x + 3$

سوال 10.178: ترسیم $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کے بارے میں درج ذیل فقروں کو ثابت کریں یا ان کے مخالف فقرے تلاش کریں۔

شکل 10.52: ترسیمات برائے سوال 10.177

ا. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم ترخیم ہو گا۔

ب. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

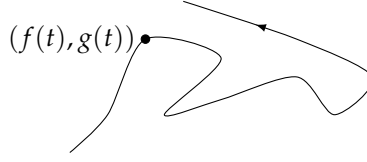
ج. اگر $AC < 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

سوال 10.179: جب $B^2 - 4AC$ منفی ہو تب مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر اس ترخیم کے نصف محور a اور b ہوں تب اس کا رقبہ πab ہو گا (معیاری کلیہ)۔ دکھائیں کہ اس رقبہ کو $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ (اشارہ: محور کو گھما کر جزو Bxy ہٹا کر مساوات 10.27 استعمال کریں۔)

سوال 10.180: ہم مبدا کے گرد محور گھما کر $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ کی بات کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا ممیز **غیر متغیر** ہے۔ مساوات 10.21 کی مدد لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدد (الف) $A + C$ اور (ب) $D^2 + E^2$ بھی غیر متغیر ہیں، یعنی:

$$A' + C' = A + C, \quad D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$$

حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مبدا کے گرد محور گھمانے کے بعد حاصل عددی سروں کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ انہیں حقائق کو استعمال کرتے ہوئے A' سے C' اور D' سے E' کی قیمتیں جلد معلوم کی جا سکتی ہیں۔

سوال 10.181: مبدا کے گرد محور کو کسی بھی زاویہ گھمانے کے بعد $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ ثابت کرنے کے لئے مساوات 10.21 کی مدد لیں۔ یہ ثابت کرتے ہوئے کچھ دیر ضرور لگے گی۔

شکل 10.53: مستوی xy میں ضروری نہیں کہ ذرے کی راہ x یا y کا تفاعل ہو۔

10.4 مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول

جب ایک ذرہ شکل 10.53 میں دکھائی گئی راہ پر چلتا ہو، ہم اس کی حرکت کو کارتیسی کلیہ کی صورت میں لکھنے کی توقع نہیں کر سکتے ہیں جو y کو بلا واسطہ x کی صورت میں یا x کو بلا واسطہ y کی صورت میں پیش کرتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم ذرے کی راہ کے ہر محدد کو وقت t کا تفاعل لکھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات $x = f(x)$ ، $y = g(t)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ چونکہ یہ مساوات ہر لمحہ t پر ذرے کا مقام دیتے ہیں لہٰذا حرکت پر غور کے لئے یہ مساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔

تعریف: اگر t کے ایک وقفہ پر x اور y استمراری تفاعل

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ہوں تب نقاط $(x, y) = (f(t), g(t))$ کا سلسلہ، جن کی تعریف مذکورہ بالا مساوات پیش کرتی ہیں، محددی مستوی میں ایک منحنی ہو گی۔ ان مساوات کو اس منحنی کی **مقدار معلوم مساوات**[22] کہتے ہیں۔ متغیر t منحنی کا **مقدار معلوم**[23] ہے اور اس کا وقفہ I **مقدار معلوم وقفہ**[24] کہلاتا ہے۔ اگر I بند وقفہ $a \le t \le b$ ہو تب نقطہ $(f(a), g(a))$ منحنی کا **ابتدائی نقطہ**[25] اور نقطہ $(f(b), g(b))$ اس کا **اختتامی نقطہ**[26] ہو گا۔ منحنی کو **مقدار معلوم روپ دینے**[27] سے مراد مستوی میں منحنی کی مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔

□

بہت سارے مواقع پر t وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دیگر مواقع پر یہ کسی اور متغیر مثلاً زاویہ (اگلی مثال) کو ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال 10.13: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$
درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

---

[22] parametric equations
[23] parameter
[24] parameter interval
[25] initial point
[26] terminal point
[27] parametrization

شکل 10.54: گھڑی کے الٹ رخ حرکت (مثال 10.13)

شکل 10.55: گھڑی کے رخ حرکت (مثال 10.14)

بڑھتے t کے لئے دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک ذرہ کا مقام $N(x, y)$ ظاہر کرتے ہیں (شکل 10.54)۔

چونکہ ہر t کے لئے

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ یہ ذرہ اس دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ دائرے کے کتنے حصہ پر ذرہ حرکت کرتا ہے۔

یہ جاننے کے لئے ہم t کو 0 تا 2π کر کے ذرے کی مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ مقدار معلوم t کی ناپ ریڈیئن میں ہے جو ON اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ ہے۔ یہ ذرہ $t = 0$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ سے شروع کر کے اوپر اور بائیں چلتے ہوئے $t = \frac{\pi}{2}$ پر $(x, y) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ پہنچتا ہے۔ یہاں سے یہ بائیں اور نیچے چلتے ہوئے $t = \pi$ پر $(x, y) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ پہنچتا ہے۔ اس کے بعد ذرہ نیچے اور دائیں چل کر $(0, -1)$ پہنچ کر یہاں سے اوپر اور دائیں چل کر آخر کار $t = 2\pi$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$ پر واپس آن پہنچتا ہے۔ یوں $0 \leq t \leq 2\pi$ کرنے سے یہ ذرہ ٹھیک ایک بار دائرہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے۔ □

مثال 10.14: نصف دائرہ
درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ایک ذرے کا مقام دیتے ہیں جو t کو 0 سے بڑھا کر π کرنے سے بڑھانے سے گھڑی کے رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت کرتا ہے (شکل 10.55)۔

چونکہ مذکورہ بالا مقدار معلوم مساوات سے حاصل محدد دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ یہ جاننے کے لئے کہ دائرے کے کتنے حصے پر ذرہ حرکت کرتا ہے، ہم t کو 0 تا π کرتے ہوئے ذرہ کے مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$

پر مذکورہ بالا مساوات سے $(x,y)=(1,0)$ ملتا ہے جو ذرے کا ابتدائی مقام ہے۔ البتہ اب t بڑھانے سے x کی قیمت گھٹتی ہے جبکہ y کی قیمت منفی ہو کر -1 تک پہنچ کر $t=\pi$ پر واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $t=\pi$ وقفے کا اختتامی نقطہ ہے لہٰذا ذرہ یہیں رہتا ہے۔ یوں ذرہ دائرے کے نچلے نصف حصے پر سفر کرتا ہے۔ □

مثال 10.15: نصف قطع مکافی
مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x,y)$ درج ذیل مقدار مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x=\sqrt{t},\quad y=t,\quad t\geq 0$$

اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x=\sqrt{t}$ اور $y=t$ سے t خارج کرتے ہوئے راہ کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اگر ہماری قسمت اچھی ہو، ایسا کرنے سے کوئی جانی پہچانی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔

$$y=t=(\sqrt{t})^2=x^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ ذرے کے مقام کے محدد مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ یہ کہنا غلط ہو گا کہ یہ ذرہ پورے قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔ یہ ذرہ حقیقت میں نصف قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ ذرے کے مقام کا x محدد کبھی بھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ لمحہ $t=0$ پر ذرہ $(0,0)$ سے شروع کرتے ہوئے t بڑھنے سے ربع اول میں رہ کر اوپر بڑھتا جاتا ہے (شکل 10.56)۔ □

مثال 10.16: مکمل قطع مکافی راہ
مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x,y)$ درج ذیل مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

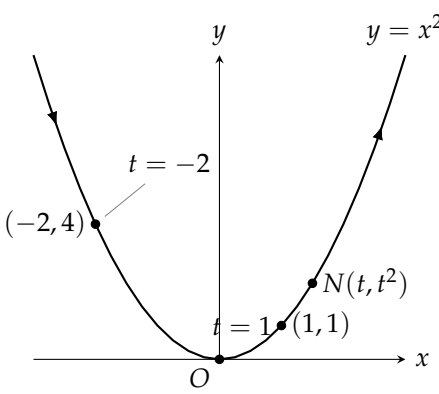
$$x=t,\quad y=t^2,\quad -\infty<t<\infty$$

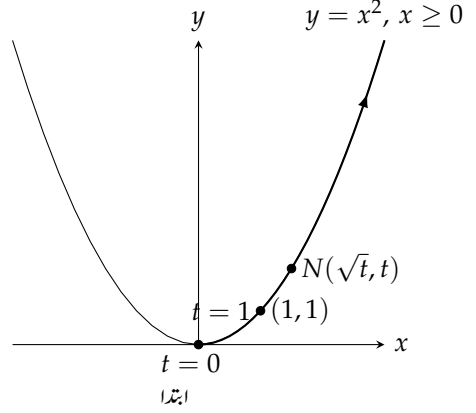
اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x=t$ اور $y=t^2$ سے t خارج کر کے x اور y کے بیچ مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y=(t)^2=x^2$$

ذرے کا مقام مساوات $y=x^2$ کو مطمئن کرتی ہے لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y=x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ اب مثال 10.15 کے برعکس ذرہ مکمل قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ جیسے جیسے t کی قیمت $-\infty$ سے بڑھ کر ∞ پہنچتی ہے، ذرہ بائیں سے نیچے آتے ہوئے مبدا سے گزر کر اوپر دائیں حرکت کرتا ہے (شکل 10.57)۔ □

شکل 10.56: نصف قطع مکافی راہ (مثال 10.15)

شکل 10.57: مکمل قطع مکافی راہ (مثال 10.16)

جیسا ہم نے مثال 10.16 میں دیکھا، کسی بھی منحنی $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ ہو گی۔ یہ اتنی سادہ صورت ہے کہ اس کو ہم حقیقت میں استعمال نہیں کرتے ہیں لیکن اس سے نظریہ باآسانی سمجھ آتا ہے۔

مثال 10.17: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر $N(x, y)$ درج ذیل دیتے ہیں۔

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس ذرے کی حرکت کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $\cos t = \frac{x}{a}$ اور $\sin t = \frac{y}{b}$ سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

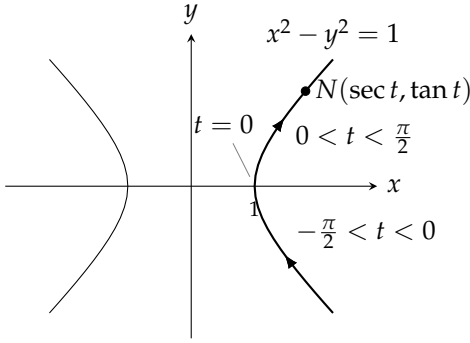
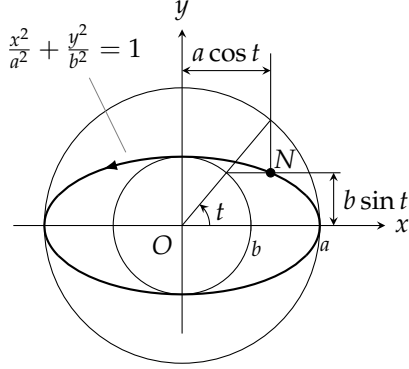
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \implies \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ذرے کا مقام مساوات ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ ذرہ ترخیم پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرے کے مقام کے محدد

$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0$$

ہوں گے لہٰذا یہ ابتدائی نقطہ $(a, 0)$ سے حرکت شروع کرتا ہے۔ t بڑھانے سے ذرہ اوپر اور بائیں گھڑی کے الٹ رخ حرکت کرتا ہے۔ یہ قطع مکافی کے گرد ایک بار چل کر لمحہ $t = 2\pi$ پر واپس نقطہ $(a, 0)$ پہنچ کر رک جاتا ہے (شکل 10.58)۔ □

مثال 10.18: درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ، جو مثال 10.17 میں $b = a$ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں،

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

شکل 10.59: قطع زائد راہ (مثال 10.19)

شکل 10.58: ترخیمی راہ (مثال 10.17)

دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ □

مثال 10.19: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر درج ذیل مقدار معلوم مساوات دیتے ہیں۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل: ہم درج ذیل مساوات

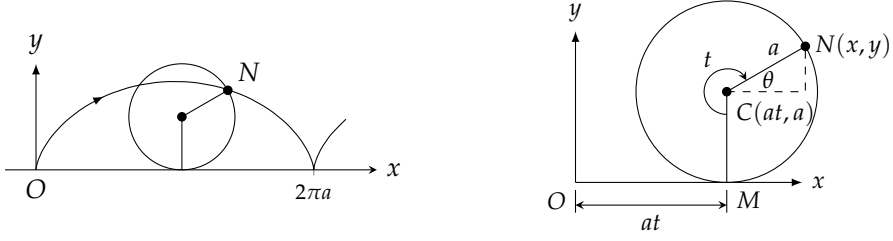
$$\sec t = x, \quad \tan t = y$$

سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ ایسا مماثل $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$\sec^2 t - \tan^2 t = x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے مقام کے محدد (x, y) مساوات $x^2 - y^2 = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔ متغیر t کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر $\frac{\pi}{2}$ تک پہنچنے سے $x = \sec t$ کی قیمت مثبت اور $y = \tan t$ کی قیمت $-\infty$ سے ∞ پہنچتی ہے لہٰذا N قطع زائد کے دایاں نصف حصہ پر رہے گا (شکل 10.59)۔ □

مثال 10.20: تدویر
ایک پہیا جس کا رداس a ہے افقی لکیر پر چل رہا ہے۔ اس کے محیط پر نقطہ N کی راہ کے مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ اس راہ کو **تدویر**[28] کہتے ہیں۔

[28] cycloid

شکل 10.60: پہیے کے محیط پر نقطے کا مقام اور تدویر۔

حل: ہم x محور کو وہ لکیر لیتے ہیں جس پر پہیا چل رہا ہے اور لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N کو مبدا پر لیتے ہیں۔ ہم زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہیں جو پہیا گھومنے کا زاویہ ہے اور اس کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 10.60 میں پہیے کو کچھ دیر بعد دکھایا گیا ہے جہاں اس کا قاعدہ، مبدا سے at فاصلہ پر ہے۔ پہیے کا مرکز (at, a) پر ہو گا اور N کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta$$

زاویہ θ کو t کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے ہم شکل سے

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

ہوں گے۔ درکار مساوات

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

ہیں جنہیں عموماً

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{10.28}$$

لکھا جاتا ہے۔ شکل 10.60 میں اس تدویر کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ □

کمتر وقتی منحنی اور یکساں وقتی منحنی

اگر ہم شکل 10.60 کی تدویر کو الٹ کریں، مساوات 10.28 اس پر بھی لاگو ہو گی (شکل 10.61) جہاں مثبت y نیچے رخ ہے۔ حاصل سر نیچے منحنی کے دو اہم خواص ہیں۔ پہلی خاصیت مبدا O اور پہلی قوس میں سب سے گہرا نقطہ B سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک بلا رگڑ گیند

جس پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہو، ان دو نقطوں کو جوڑنے والی تمام منحنیات میں سب سے جلد اس تدویر پر چلتے ہوئے O سے B پہنچتا ہے۔ یوں اس تدویر کو **کمتر وقتی منحنی** کہتے ہیں۔ اس کی دوسری خاصیت یہ ہے کہ اگر گیند کو O کی بجائے کسی دوسرے نقطہ سے چلنے دیا جائے یہ گیند B تک پہنچتے ہوئے اتنا ہی وقت لے گا جو یہ O سے B تک پہنچتے ہوئے لیتا ہے۔ یوں اس کو تدویر کو **یکساں وقتی منحنی** بھی کہتے ہیں۔

کیا O اور B کے بیچ اس کے علاوہ بھی کوئی کمتر وقت کی منحنی پائی جاتی ہے؟ ہم اس کو بطور ریاضیاتی پیش کر سکتے ہیں: ابتدا میں چونکہ گیند کی رفتار صفر ہے لہٰذا اس کی حرکی توانائی صفر ہو گی۔ مبدا $(0,0)$ سے کسی بھی نقطہ (x,y) تک گیند کو پہنچانے کی خاطر mgy کام ثقلی کشش کو کرنا ہو گا اور یہ توانائی لازماً حرکی توانائی میں تبدیلی کے برابر ہو گی، یعنی:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

یوں (x,y) پر پہنچ کر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2gy}$$

ہو گی جس کو

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

گیند کی راہ پر چلتے ہوئے $\mathrm{d}s$ تفرقی فاصلہ ہے

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی مخصوص راہ $y = f(x)$ پر O سے $B(a\pi, 2a)$ تک چلتے ہوئے درکار وقت T_f درج ذیل ہو گا۔

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{10.29}$$

اس وقت (تکمل کی قیمت) کو کونسی منحنی $y = f(x)$ کمتر کرتی ہے؟

پہلی نظر میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسا O سے B تک سیدھی لکیر (جو یقیناً کمتر فاصلہ ہے) پر گیند کمتر وقت میں O سے B تک پہنچے گا لیکن کیا ایسا ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ شروع میں گیند کو سیدھا نیچے گرنے دینے سے جلد زیادہ رفتار حاصل کیا جا سکتا ہے جس کی بنا نسبتاً لمبی راہ بھی کم قوت میں طے کی جا سکتی ہو۔ حقیقت میں یہی درست جواب ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (ثبوت کو پیش نہیں کیا جائے گا) کہ O سے B تک تدویر O اور B کے بیچ واحد کمتر وقتی منحنی ہے۔ اگرچہ تدویر کو O اور B کے بیچ واحد کم وقتی منحنی ثابت کرنا اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ تدویر یکساں وقتی منحنی ہے۔ تدویر کے لئے مساوات 10.29 درج ذیل صورت اختیار

شکل 10.61: سر نیچے تدویر پر کشش ثقل کی بنا حرکت۔

شکل 10.62: سر نیچے تدویر پر کسی بھی نقطہ سے B تک پہنچنے کے لئے ایک جیسا وقت درکار ہوتا ہے۔

کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
T_{\text{تدویر}} &= \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{2gy}} \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(1-\cos t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}
$$

مساوات 10.28 سے
$\mathrm{d}x = a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$ ،
$\mathrm{d}y = a\sin t\,\mathrm{d}t$ اور
$y = a(1-\cos t)$ ہوں گے

یوں بے رگڑ گیند کو تدویر پر چلتے ہوئے O سے B تک پہنچنے کے لئے $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ وقت درکار ہو گا۔

فرض کریں ہم O کی بجائے تدویر پر نقطہ (x_0, y_0) سے گیند کو چلنے دیں جس کی مطابقتی مقدار معلوم قیمت $t_0 > 0$ ہے۔ تدویر پر اس کے بعد کسی نقطہ (x, y) پر گیند کی سمتی رفتار

$$
v = \sqrt{2g(y-y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)} \qquad (y = (1-\cos t))
$$

ہو گی۔ یوں (x_0, y_0) سے B تک پہنچنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{(2\cos^2\frac{t_0}{2}-1)-(2\cos^2\frac{t}{2}-1)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t_0}^{\pi}\frac{\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2\frac{t_0}{2}-\cos^2\frac{t}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}}\int_{t=t_0}^{t=\pi}\frac{-2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad [u=\cos(t/2),\ c=\cos(t_0/2)] \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{u}{c}\right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[-\sin^{-1}\frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)}\right]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}}(-\sin^{-1}0+\sin^{-1}1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}$$

یہ ٹھیک اتنا ہی وقت ہے جو گیند کو O سے B تک پہنچتے ہوئے درکار ہوتا ہے۔ نقطہ B تک پہنچنے کے لئے درکار وقت پر ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں شکل 10.62 میں O ، A اور C سے ابتدا کرتے ہوئے تینوں گیند B تک ایک جتنے وقت میں پہنچیں گے۔

معیاری مقدار معلوم روپ

دائرہ	ترخیم
$x^2+y^2=a^2$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
$x=a\cos t$	$x=a\cos t$
$y=a\sin t$	$y=b\sin t$
$0\le t\le 2\pi$	$0\le t\le 2\pi$

رداس a کے دائرہ کا پیدا کردہ تدویر

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

سوالات

مقدار معلوم مساوات سے کارتیسی مساوات کا حصول

سوال 10.182 تا سوال 10.205 میں xy مستوی میں ایک ذرہ کی حرکت کی مقدار معلوم مساوات دی گئی ہیں۔ اس ذرے کی راہ کی کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہوئے راہ کو پہچانیے۔ کارتیسی مساوات کو ترسیم کرتے ہوئے اس پر ذرے کی راہ اور رخ دکھائیں۔

سوال 10.182: $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
جواب: شکل 10.63

سوال 10.183: $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 10.184: $x = \sin(2\pi(1-t)), \quad y = \cos(2\pi(1-t)), \quad 0 \le t \le 1$
جواب: شکل 10.64

سوال 10.185: $x = \cos(\pi - t), \quad y = \sin(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 10.186: $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
جواب: شکل 10.65

سوال 10.187: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 10.188: $x = 4\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
جواب: شکل 10.66

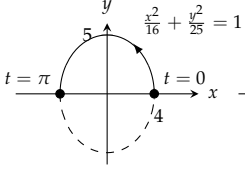
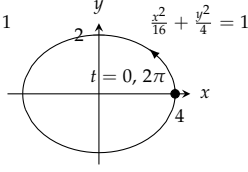
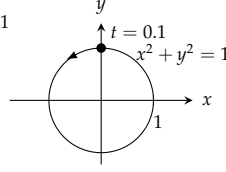
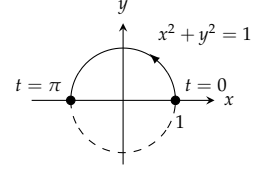
سوال 10.189: $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 10.190: $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$
جواب: شکل 10.67

سوال 10.191: $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$

سوال 10.192: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$
جواب: شکل 10.68

سوال 10.193: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال 10.194: $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
جواب: شکل 10.69

شکل 10.66 شکل 10.65 شکل 10.64 شکل 10.63

سوال 10.195: $x=\csc t,\quad y=\cot t,\quad 0<t<\pi$

سوال 10.196: $x=2t-5,\quad y=4t-7,\quad -\infty<t<\infty$
جواب: شکل 10.70

سوال 10.197: $x=1-t,\quad y=1+t,\quad -\infty<t<\infty$

سوال 10.198: $x=t,\quad y=1-t,\quad 0\le t\le 1$
جواب: شکل 10.71

سوال 10.199: $x=3-3t,\quad y=2t,\quad 0\le t\le 1$

سوال 10.200: $x=t,\quad y=\sqrt{1-t^2},\quad -t\le t\le 0$
جواب: شکل 10.72

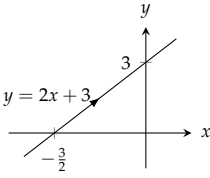
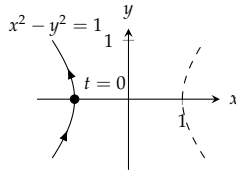
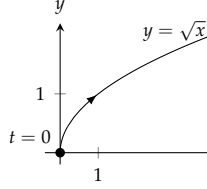
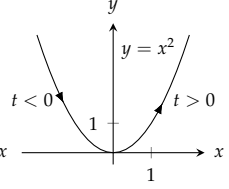
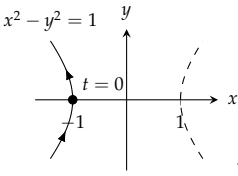
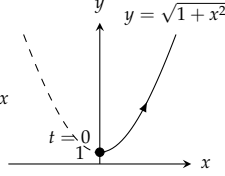
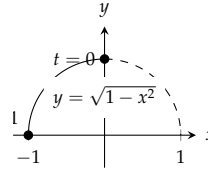
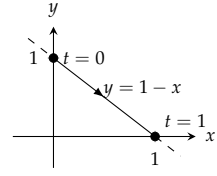
سوال 10.201: $x=t,\quad y=\sqrt{4-t^2},\quad 0\le t\le 2$

سوال 10.202: $x=t^2,\quad y=\sqrt{t^4+1},\quad t\ge 0$
جواب: شکل 10.73

سوال 10.203: $x=\sqrt{t+1},\quad y=\sqrt{t},\quad t\ge 0$

سوال 10.204: $x=-\cosh t,\quad y=\sinh t,\quad -\infty<t<\infty$
جواب: شکل 10.74

سوال 10.205: $x=2\sinh t,\quad y=2\cosh t,\quad -\infty<t<\infty$

مقدار معلوم مساوات کا حصول

شکل 10.67 شکل 10.68 شکل 10.69 شکل 10.70

شکل 10.71 شکل 10.72 شکل 10.73 شکل 10.74

سوال 10.206: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

جواب: (ا) $x = a\cos t,\ y = -a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$، (ب) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$، (ج) $x = a\cos t,\ y = -a\sin t,\ 0 \le t \le 4\pi$، (د) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 4\pi$

سوال 10.207: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

سوال 10.208: درج ذیل نصف دائرے کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے (x, y) پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان $t = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو مقدار معلوم لیں۔

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

جواب: $x = \frac{-at}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ -\infty < t < \infty$

سوال 10.209: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر نقطہ $(a, 0)$ سے نقطہ (x, y) تک گھڑی کے الٹ رخ فاصلہ s کو مقدار معلوم لیتے ہوئے اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

شکل 10.75: ترسیم برائے سوال 10.210

شکل 10.76: اکائی دائرے کا در پیچیدہ (سوال 10.211)

سوال 10.210: ایک دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0,1)$ ہو کو شکل 10.75 میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی لکیر $y=2$ بھی دکھائی گئی ہے۔ اس لکیر پر کوئی نقطہ A لیں اور اس کو مبدا O کے ساتھ سیدھی لکیر سے ملائیں۔ خط OA اکائی دائرہ کو نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ نقطہ A کو لکیر $y=2$ پر چلانے سے نقطہ N جس راہ پر چلتا ہے اس کو مریا اگنیسی کی چڑیل کہتے ہیں۔ مریا اگنیسی کی چڑیل کی مقدار معلوم مساوات اور اس کا مقدار معلوم وقفہ تلاش کریں۔ قطع OA اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ t کو مقدار معلوم لیں جہاں t کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔درج ذیل مساوات فرض کرنے سے آپ کو مدد مل سکتی ہے۔

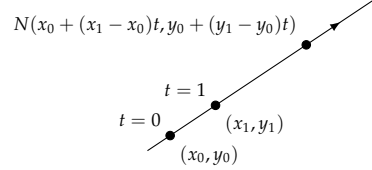
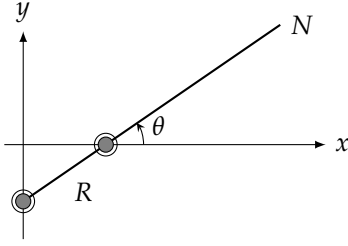
$$x=AQ, \quad y=2-AB\sin t, \quad AB\cdot OA=(AQ)^2$$

جواب: $x=2\cos t,\ y=2\sin^2 t,\ 0<t<\pi$

سوال 10.211: دائرے کا در پیچیدہ
ایک غیر تغیر پذیر دائرہ کے گرد لپٹے گئے دھاگے کو تان کر، دائرے کی مستوی میں رہتے ہوئے، کھولنے سے دھاگے کا سر N جس راہ پر چلتا ہے، اس کو دائرے کا **در پیچیدہ**[29] کہتے ہیں۔ شکل 10.211 میں دائرہ $x^2+y^2=1$ اور ابتدائی نقطہ $(1,0)$ ہے۔ کھولا گیا دھاگہ Q پر دائرے کا مماس ہے۔ قطع OQ اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ t ہے۔ نقطہ $N(x,y)$ کے محدد x اور y کو t کی روپ میں لکھ کر در پیچیدہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ در پیچیدہ کی مقدار معلوم کا وقفہ $t\geq 0$ لیں۔

سوال 10.212: مستوی میں لکیروں کی مقدار معلوم روپ
(الف) دکھائیں کہ درج ذیل ایک ایسی لکیر کو ظاہر کرتی ہیں جو نقطہ (x_0,y_0) اور (x_1,y_1) سے گزرتی ہے (شکل 10.77)۔

$$x=x_0+(x_1-x_0)t, \quad y=y_0+(y_1-y_0)t, \quad -\infty<t<\infty$$

(ب)اسی مقدار معلوم وقفہ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ (x_1,y_1) اور مبدا سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔ (ج) اسی مقدار معلوم وقفہ کے لئے $(-1,0)$ اور $(0,1)$ سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ شکل 10.77 میں تیر کا نشان بڑھتے t کا رخ ظاہر کرتا ہے۔
جواب: (ب) $x=x_1t,\ y=y_1t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے، (ج) $x=-1+t,\ y=t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے۔

شکل 10.77: مستوی میں سیدھی لکیر (سوال 10.212)۔

شکل 10.78: آرشمیدسی روک برائے سوال 10.213

سوال 10.213: آرشمیدسی روک
آرشمیدسی روک کو شکل 10.78 میں دکھایا گیا ہے جو ایک مضبوط سلاخ جس کی لمبائی L ہو پر **مشتمل** ہے۔ محور x اور y کے ساتھ اس کو پہیوں کے ساتھ منسلک کیا گیا ہے۔ اس سلاخ کا آزاد سر N ہے۔ سلاخ اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ θ ہے۔

ا. مقدار معلوم θ کی صورت میں N کی راہ کی مساوات تلاش کریں۔

ب. N کی راہ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے اس کی ترسیم کو پہچانیں۔

سوال 10.214: فلک تدویر
ایک غیر تغیر پذیر دائرے کے محیط کی اندرون پر چلتے ہوئے دائرہ کی محیط پر کسی بھی نقطہ N کی راہ **فلک تدویر**[30] کہلاتی ہے۔ غیر تغیر پذیر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ لیں جبکہ دوسرے دائرے کا رداس b ہے۔ N کا ابتدائی مقام نقطہ $A(a, 0)$ لیں۔ دونوں دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط اور مثبت x محور کے بیچ زاویہ θ ہے۔ فلک تدویر کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں جہاں مقدار معلوم θ ہے۔ بالخصوص $b = \frac{a}{4}$ کی صورت میں فلک تدویر درج ذیل **ستارہ نم**[31] ہو گا (شکل 10.79)۔

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

جواب: $x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right), y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

سوال 10.215: تدویر پر مزید معلومات
ایک دائرہ جس کا رداس $2a$ ہے کے اندر دوسرا دائرہ جس کا رداس a ہے شکل 10.80 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ دائرے آپس میں ملتے ہیں۔ اندرونی دائرہ بیرونی دائرے کے اندر محیط پر چلتا ہے۔ نقطہ N کے مقام کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.216: نقطہ N لکیر $y = a$ پر چلتا ہے (شکل 10.81)۔ نقطہ P یوں حرکت کرتا ہے کہ $OP = MN$ ہو۔ زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہوئے نقطہ P کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ لکیر ON اور y محور کے بیچ زاویہ t ہے۔
جواب: $x = a\sin^2 t\tan t, y = a\sin^2 t$

---

[29] involute
[30] hypocycloid
[31] stroid

شکل 10.79: ستارہ نما۔ سوال 10.214

شکل 10.80: تدویر برائے سوال 10.215

شکل 10.81: ترسیمات برائے سوال 10.216

سوال 10.217: ایک پہیا جس کا رداس a ہے ایک سیدھی لکیر پر بغیر پھسلے چل رہا ہے۔ پہیے کے مرکز سے b اکائی دور نقطہ N کی راہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ پہیا جتنا زاویہ (θ) گھومتا ہے، اس کو مقدار معلوم لیں۔

مقدار معلوم مساوات سے فاصلے کا حصول

سوال 10.218: قطع مکافی $x=t,\ y=t^2,\ -\infty<t<\infty$ پر $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)
جواب: $(1,1)$

سوال 10.219: ترخیم $x=2\cos t,\ y=\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ پر $\left(\frac{3}{4},0\right)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

کمپیوٹر کا استعمال

درج ذیل مقدار معلوم مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

سوال 10.220: ترخیم $x=4\cos t,\ y=2\sin t$ وقفہ (ا) $0\le t\le 2\pi$ ، (ب) $0\le t\le\pi$ ، (ج) $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

سوال 10.221: قطع زائد $x=\sec t,\ y=\tan t$ کا ایک بازو وقفہ (ا) $-1.5\le t\le 1.5$ ، (ب) $-0.5\le t\le 0.5$ ، (ج) $-0.1\le t\le 0.1$

سوال 10.222: قطع مکافی $x = 2t + 3,\ y = t^2 - 1$ وقفہ $-2 \le t \le 2$

سوال 10.223: تدویر $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $0 \le t \le 4\pi$ ، (ج) $\pi \le t \le 3\pi$

سوال 10.224: ستارہ نما $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال 10.225: ایک خوبصورت منحنی یا **مثلثی**[32]
اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 2 کی جگہ -2 ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال 10.226: مزید خوبصورت منحنی
اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 3 کی جگہ -3 ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال 10.227: گولا
توپ کے گولے کا مدار درج ذیل ہے۔

$$x = (64\cos\alpha)t, \quad y = -4.9t^2 + (64\sin\alpha)t, \quad 0 \le t \le 4\sin\alpha$$

توپ کے مدار کو زاویہ (ا) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، (ب) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ اور (د) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال 10.228: تین خوبصورت منحنیات

ا. بر تدویر:

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\sin t - \sin 9t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ب. فلک تدویر:

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\sin t - 2\sin 4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

---
[32] deltoid

ج. زیر تدویر:

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

سوال 10.229: خوبصورت ترین منحنیات

ا. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

ب. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

ج. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

د. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 4t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

10.5 احصاء اور مقدار معلوم منحنیات

اس حصہ میں مقدار معلوم منحنیات کے ساتھ وابستہ ڈھلوان، لمبائی اور سطحی رقبے کی تلاش پر غور کیا جائے گا۔

مقدار معلوم منحنیات کی ڈھلوان

تعریف: نقطہ $t = t_0$ پر مقدار معلوم منحنی $x = f(t), y = g(t)$ اس صورت **قابل تفرق** ہو گی جب $t = t_0$ پر f اور g قابل تفرق ہوں۔ یہ منحنی تب **قابل تفرق** ہو گی جب ہر مقدار معلوم قیمت پر یہ قابل تفرق ہو۔ یہ منحنی اس صورت **ہموار**[33] ہو گی جب f' اور g' استمراری ہوں اور دونوں بیک وقت صفر نہ ہوں۔

□

ایک قابل تفرق منحنی پر اس نقطہ پر جہاں x کے لحاظ سے بھی y قابل تفرق تفاعل ہو، تفرقات $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا تعلق درج ذیل زنجیری قاعدہ دیتا ہے:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

[33] smooth

اگر $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو $\frac{dx}{dt}$ سے تقسیم کر کے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{10.30}$$

$\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ سے $\frac{dy}{dx}$ کا حصول $(\frac{dx}{dt} \neq 0)$

مثال 10.21: نقطہ $(\sqrt{2}, 1)$ جہاں $t = \frac{\pi}{4}$ ہے پر درج ذیل قطع زائد کے دائیں بازو کے مماس کی مساوات معلوم کریں (شکل 10.82)۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل: اس منحنی کی t پر ڈھلوان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad \text{مساوات } 10.30$$

ہے جس میں $t = \frac{\pi}{4}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\sec(\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

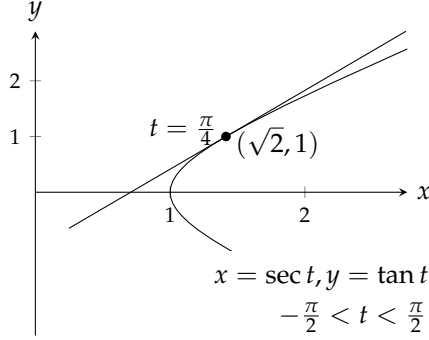
حاصل ہو گا۔ مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}x - 1\end{aligned}$$

□

مقدار معلوم کلیہ برائے $\frac{d^2y}{dx^2}$

اگر ایک مقدار معلوم مساوات y کو x کا دوگنا قابل تفرق تفاعل پیش کرتی ہو، ہم $\frac{d^2y}{dx^2}$ کو t کا تفاعل درج ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \qquad \text{مساوات 10.30 میں } y \text{ کی جگہ } y' \text{ لیا گیا ہے}$$

شکل 10.82: مثال 10.21 کا قطع زائد بازو۔

یوں $y' = \frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dt}$ سے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کے حصول کا کلیہ درج ذیل ہو گا جہاں $0 \neq \frac{dx}{dt}$ ہے۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{10.31}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ کو t کی صورت میں لکھنے کے لئے درج ذیل اقدام لیں۔

ا. $y' = \frac{dy}{dx}$ کو t کے لحاظ سے لکھیں۔

ب. $\frac{dy'}{dt}$ معلوم کریں۔

ج. $\frac{dy'}{dt}$ کو $\frac{dx}{dt}$ سے تقسیم کریں۔ ان کا حاصل تقسیم $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہو گا۔

مثال 10.22: $x = t - t^2$ اور $y = t - t^3$ کی صورت میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

حل: قدم ا: y' کو t لے لحاظ سے لکھیں:

مساوات 10.30 میں $x = t - t^2$ اور $y = t - t^3$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

قدم ب: t کے لحاظ سے y' کا تفرق لیں:

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1-3t^2}{1-2t}\Big) = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}$$

قدم ج: $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ سے تقسیم کریں۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-t^2) = 1-2t \qquad (x = t - t^2)$$

ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t} = \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3} \qquad \text{مساوات } 10.31$$

□

مقدار معلوم منحنیات کی لمبائیاں

ہم ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ کی لمبائی کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ 6.5 کے تکمل $L = \int \mathrm{d}s$ کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$L = \int_{t=a}^{t=b} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_a^b \sqrt{\Big(\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}t)^2} + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}t)^2}\Big)\,\mathrm{d}t^2} = \int_a^b \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big)^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big)^2}\,\mathrm{d}t$$

درج بالا متکمل استمراری ہونے کے علاوہ ضروری ہے کہ جب t کی قیمت a سے b تک بڑھتی ہو تب نقطہ $N(x,y) = N(f(t), g(t))$ ، منحنی کے کسی بھی حصہ پر ایک سے زیادہ مرتبہ نہ گزرتا ہو۔

لمبائی

اگر t کی قیمت a تا b کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس

منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{10.32}$$

حصہ 6.5 میں لمبائی کے کلیات مساوات 10.32 کی مخصوص صورتیں ہیں (سوال 10.264 اور سوال 10.265)۔

اعلٰی احصاء کہتی ہے کہ منحنی کی ایک سے زائد مقدار معلوم مساوات سے حاصل لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہوں گی۔ پس انہیں مساوات 10.32 سے قبل دیے گئے شرائط پر پورا اترنا ہو گا۔

مثال 10.23: ستارہ نما $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$ کی لمبائی معلوم کریں (شکل 10.83)۔

حل: محددی محور کے لحاظ سے منحنی کی تشاکلی کی بنا کل منحنی کی لمبائی کسی ایک ربع میں اس کی لمبائی کے چار گنّا ہو گی۔ ہم ربع اول میں لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ ہمارے پاس

$$\begin{aligned}
x&=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t\\
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2&=[3\cos^2 t(-\sin t)]^2=9\cos^4 t\sin^2 t\\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2&=[3\sin^2 t(\cos t)]^2=9\sin^4 t\cos^2 t\\
\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}&=\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\qquad \cos^2 t+\sin^2 t=1\\
&=\sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t}\\
&=3|\cos t\sin t|\\
&=3\cos t\sin t
\end{aligned}$$

ہے جہاں آخری قدم میں $0\le t\le\frac{\pi}{2}$ پر $\cos t\sin t\ge 0$ ہے۔ یوں ربع اول میں لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{\pi/2}3\cos t\sin t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,\mathrm{d}t\\
&=-\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ستارہ نما کی لمبائی چار گنّا ہو گی: $4(3/2)=6$ □

شکل 10.83: ستارہ نما برائے مثال 10.23

شکل 10.84: ستارہ نما کا وسطانی مرکز۔

مثال 10.24: ربع اول میں مثال 10.23 کے ستارہ نما کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔

حل: ہم منحنی کی کثافت $\delta = 1$ لے کر حصہ 6.7 کی طرح اس کی کمیت اور محددی محور کے لحاظ سے معیار اثر معلوم کرتے ہیں۔

لکیر $x = y$ کے لحاظ سے کمیت کا تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{y} = \bar{x}$ ہو گا۔ منحنی کے کسی عمومی قطع کی کمیت درج ذیل ہو گی (شکل 10.84)۔

$$\mathrm{d}m = 1 \cdot \mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t \qquad \text{مثال 10.23 دیکھیں}$$

یوں منحنی کی کمیت

$$M = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} \qquad \text{مثال 10.23 دیکھیں}$$

ہو گی۔ محور x کے لحاظ سے منحنی کا معیار اثر

$$\begin{aligned} M_x = \int \bar{y}\,\mathrm{d}m &= \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= 3\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \,\mathrm{d}t = 3 \cdot \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

ہو گا۔ یوں

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}$$

اور وسطانی نقطہ $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ہو گا۔ □

سطح طواف کا رقبہ

ہموار مقدار معلوم منحنیات کے لئے لمبائی کے کلیہ (مساوات 10.32) سے، حصہ 6.6 میں کارتیسی کلیات کی طرح، سطح طواف کے درج ذیل کلیات اخذ ہوتے ہیں۔

سطحی رقبہ

اگر t کی قیمت a تا b کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس منحنی کو محددی محور کے گرد گھمانے سے پیدا سطح طواف کے رقبے درج ذیل ہوں گے۔

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(10.33)}$$
محور x کے گرد ($y \ge 0$)

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(10.34)}$$
محور y کے گرد ($x \ge 0$)

لمبائی کی طرح ہم سطح طواف کی کسی بھی مقدار معلوم مساوات، جو درکار شرائط مطمئن کرتی ہو، سے سطح طواف کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال 10.25: مستوی xy میں رداس 1 کا دائرہ جس کا مرکز $(0,1)$ پر ہو کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہیں۔

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس دائرے کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ درج بالا مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے پیدا سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t && \text{مساوات } 10.33\\
&= \int_0^{2\pi} 2\pi(1+\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t && \sin^2 t + \cos^2 t = 1\\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\,\mathrm{d}t\\
&= 2\pi\left[t - \cos t\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2
\end{aligned}$$

□

سوالات

مقدار معلوم منحنیات کے مماس

سوال 10.230 تا سوال 10.241 میں t پر مقدار معلوم منحنی کے مماس کی مساوات دریافت کریں گے۔ اس نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ بھی معلوم کریں۔

سوال 10.230: $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

جواب: $y = -x + 2\sqrt{2}, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\sqrt{2}$

سوال 10.231: $x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -\frac{1}{6}$

سوال 10.232: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

جواب: $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

سوال 10.233: $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = \frac{2\pi}{3}$

سوال 10.234: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = \frac{1}{4}$

جواب: $y = x + \frac{1}{4}, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -2$

سوال 10.235: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\frac{\pi}{4}$

سوال 10.236: $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \frac{\pi}{6}$

جواب: $y = 2x - \sqrt{3}, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -3\sqrt{3}$

سوال 10.237: $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

سوال 10.238: $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

جواب: $y = x - 4, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2}$

سوال 10.239: $x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$

سوال 10.240: $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \frac{\pi}{3}$

جواب: $y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2, \ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -4$

سوال 10.241: $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$

خفی مقدار معلوم مساوات

سوال 10.242 تا سوال 10.245 میں x اور y بطور قابل تفرق خفی مقدار معلوم تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ دیے گئے ہیں۔ دیے گئے t پر منحنی $x = f(t), t = g(t)$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال 10.242: $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$
جواب: 0

سوال 10.243: $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \ln y, \quad t = 1$

سوال 10.244: $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$
جواب: -6

سوال 10.245: $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

منحنیات کی لمبائیاں

سوال 10.246 تا سوال 10.251 میں منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

سوال 10.246: $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$
جواب: 4

سوال 10.247: $x = t^3, \quad y = \frac{3t^2}{2}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال 10.248: $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \le t \le 4$
جواب: 12

سوال 10.249: $x = \frac{(2t+3)^{3/2}}{3}, \quad y = t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \le t \le 3$

سوال 10.250: $x = 8\cos t + 8t \sin t, y = 8 \sin t - 8t\cos t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
جواب: π^2

سوال 10.251: $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, y = \cos t, 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

سطحی رقبے

سوال 10.252 تا سوال 10.255 میں دیے گئے محور کے گرد منحنی گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 10.252: محور x ؛ $x = \cos t, \quad y = 2 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
جواب: $8\pi^2$

سوال 10.253: محور y ؛ $x = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال 10.254: محور y ؛ $x = t + \sqrt{2}, \quad y = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$
جواب: $\frac{52\pi}{3}$

سوال 10.255: محور x ؛ $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

سوال 10.256: مخروط مقطوع
نقطہ $(0,1)$ اور $(2,2)$ کے بیچ لکیر کو محور x کے گرد گھما کر مخروط مقطوع کا سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم مساوات $x = 2t, y = t+1, 0 \le t \le 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ نتیجہ کا جیومیٹری کے کلیہ $S = \pi(r_1 + r_2)(\text{ترچھا قد})$ کے ساتھ موازنہ کریں۔
جواب: $3\pi\sqrt{5}$

سوال 10.257: مخروط
مبدا اور نقطہ (h,r) کے بیچ قطع کو محور x کے گرد گھما کر مخروط سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کے قاعدے کا رداس r اور قد h ہوں گے۔ مقدار معلوم مساوات $x = ht, y = rt, 0 \le t \le 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کا موازنہ جیومیٹری کے کلیہ $S = \pi r(\text{ترچھا قد})$ کے ساتھ کریں۔

وسطانی مراکز

سوال 10.258: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

(ب) یہ منحنی شکل 10.76 میں دکھائی گئی در پیچیدہ کا حصہ ہے۔ اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔
جواب: (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{12}{\pi} - \frac{24}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2} - 2)$ ، (ب) وسطانی مرکز $(1.4, 0.4)$

سوال 10.259: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = e^t\cos t, \quad y = e^t\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال 10.260: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔
جواب: (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{3}, \pi - \frac{4}{3}\right)$

سوال 10.261: تکمل کی قیمت
وسطانی مراکز کے مسائل کو عموماً کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔درج ذیل منحنی کا وسطانی مرکز 2 اعشاریہ تک کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کریں۔

$$x = t^3,\ y = \tfrac{3}{2}t^2,\ 0 \le t \le \sqrt{3}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.262: لمبائی کا دارومدار مقدار معلوم مساوات پر نہیں ہوتا ہے۔
نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ کی لمبائی درج ذیل مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

ا. $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ب. $x = \sin \pi t,\ y = \cos \pi t,\ -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$

آپ دیکھیں گے کہ دونوں جوابات یکساں ہیں۔
جواب: (ا) π، (ب) π

سوال 10.263: ترخیمی تکمل
ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی درج ذیل ہے

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

جہاں e ترخیم کی سنک ہے۔ ماسوائے $e = 0$ یا $e = 1$ یہ تکمل، جو **ترخیمی تکمل**[34] کہلاتا ہے، غیر بنیادی ہے۔

ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ لے کر $a = 1$ اور $e = \frac{1}{2}$ کے لئے اس ترخیم کی لمبائی کا اندازہ لگائیں۔

[34] elliptic integral

ب. تفاعل $f(t)=\sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ کے دو گنا تفرق کی قیمت 1 سے کم ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے جزو-ا میں حاصل قیمت میں خلل کا بالائی حد تلاش کریں۔

سوال 10.264: جیسا حصہ 10.4 میں ذکر کیا گیا، وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے ترسیم کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گی۔

$$x=x,\quad y=f(x),\quad a\le x\le b$$

یہاں x از خود مقدار معلوم ہے۔

اس مقدار معلوم روپ کے لئے دکھائیں کہ مقدار معلوم لمبائی

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

درج ذیل کارتیسی صورت اختیار کرتی ہے جس کو حصہ 6.5 میں حاصل کیا گیا۔

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

یوں کارتیسی کلیہ در حقیقت مقدار معلوم کلیہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔

سوال 10.265: دکھائیں کہ منحنی $x=g(y),\ c\le y\le d$ کی لمبائی کا کارتیسی کلیہ (مساوات 6.11)

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

در حقیقت درج ذیل مقدار معلوم کلیہ کی مخصوص صورت ہے۔

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

سوال 10.266: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta)$$

(اشارہ: $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ استعمال کریں۔)

جواب: $3\pi a^2$

شکل 10.85: ترسیم سوال 10.270

شکل 10.86: ترسیم سوال 10.271

سوال 10.267: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کی لمبائی معلوم کریں۔

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

سوال 10.268: تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کی ایک محراب کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔
جواب: $\frac{64\pi}{3}$

سوال 10.269: محور x اور تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کے ایک محراب کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ: $\mathrm{d}H = \pi y^2\,\mathrm{d}x = \pi y^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$)

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 10.270 اور سوال 10.270 میں **لساجس اشکال**[35] دکھائی گئی ہیں۔ دونوں سوالات میں ربع اول میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں منحنی کا مماس افقی ہو۔ مبدا پر دو مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.270: ترسیم شکل 10.85 میں دی گئی ہے۔
جواب: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ ، $t = 0$ پر $y = 2x$ ، $t = \pi$ پر $y = -2x$

سوال 10.271: ترسیم شکل 10.86 میں دی گئی ہے۔

سوال 10.272 تا سوال 10.278 میں تفاعل کو اپنی مرضی کے مقدار معلوم وقفہ پر ترسیم کریں۔ یہ ترسیمات لساجس اشکال ہیں جن کا عمومی کلیہ درج ذیل ہے

$$x = a\sin(mt + d), \quad y = b\sin nt$$

---

[35] Lissajous figures

جہاں m اور n عدد صحیح ہیں۔

سوال 10.272: $x = \sin 2t, \quad y = \sin t$

سوال 10.273: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 4t$

سوال 10.274: $x = \sin t, \quad y = \sin 4t$

سوال 10.275: $x = \sin t, \quad y = \sin 5t$

سوال 10.276: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 5t$

سوال 10.277: $x = \sin(3t + \pi/2), \quad y = \sin 5t$

سوال 10.278: $x = \sin(3t + \pi/4), \quad y = \sin 5t$

سوال 10.279 تا سوال 10.284 میں دیے مقدار معلوم منحنیات پر کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. منحنی کو t کے دیے گئے وقفہ پر ترسیم کریں۔

ب. نقطہ t_0 پر $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر منحنی کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کی ترسیم پر اس مماس کو دکھائیں۔

د. منحنی کی لمبائی دیے گئے وقفہ پر معلوم کریں۔

سوال 10.279: $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = \frac{1}{2}$

سوال 10.280: $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = \frac{3}{2}$

سوال 10.281: $x = e^t - t^2, \quad y = t + e^{-t}, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

سوال 10.282: $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 10.283: $x = e^t + \sin 2t, \quad y = e^t + \cos(t^2), \quad -\sqrt{2}\pi \le t \le \pi/4, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

سوال 10.284: $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال 10.285 اور سوال 10.286 میں x اور y کو t کا خفی مقدار معلوم تفاعل دیا گیا ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. پہلی مساوات کو x کے لئے اور دوسری مساوات کو y کے لئے حل کر کے $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ معلوم کریں۔

ب. نقطہ t_0 پر منحنی $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر منحنی کے مماس کی مساوات معلوم کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور نقطہ t_0 پر مماس ترسیم کریں۔

سوال 10.285: $x^2 - 2tx + 3t^2 = 4, \quad y^3 - 2t^2 = 7, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

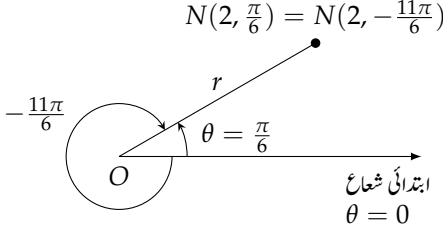
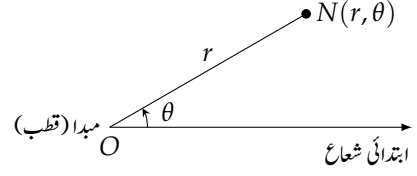
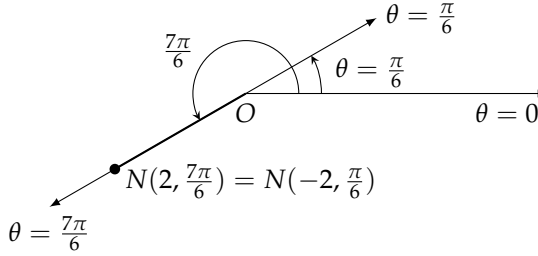
سوال 10.286: $x^2 \cos t + 2x = t, \quad t \sin t + 2\sqrt{y} = y, \quad -2\pi \le t \le 2\pi, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

10.6 قطبی محدد

اس حصہ میں ہم قطبی محدد اور کارتیسی محدد کے ساتھ ان کے تعلق پر غور کریں گے۔ اگرچہ مستوی پر ایک نقطہ کے صرف ایک جوڑی کارتیسی محدد ہوتے ہیں، اسی نقطہ کے قطبی محدد کی جوڑیوں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، ترسیم پر اس کے دلچسپ اثرات مرتب ہوتے ہیں۔

قطبی محدد کی تعریف

قطبی محدد متعارف کرنے کی خاطر ہم ایک **مبدا**[36] O جو **قطب**[37] کہلائے گا اور O سے ایک **ابتدائی شعاع** مقرر کرتے ہیں (شکل 10.87)۔ اب ہر نقطہ N کے مقام کو **قطبی محددی جوڑی** (r, θ) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں O سے N تک فاصلہ r اور ابتدائی شعاع سے ON تک زاویہ θ ہوں گے۔

تکونیات کی طرح یہاں بھی گھڑی کے الٹ رخ θ کو مثبت جبکہ گھڑی کے رخ اس کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔ کسی ایک نقطہ کے ساتھ منسلک زاویہ یکتا نہیں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مبدا سے 2 اکائی دور شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ پر واقع نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اسی نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = -\frac{11\pi}{6}$ بھی ہوں گے (شکل 10.88)۔

شکل 10.88: قطبی محدد یکتا نہیں ہیں۔

شکل 10.87: قطبی محدد کی تعریف کے لئے ہم مبدا اور ابتدائی شعاع لیتے ہیں۔

شکل 10.89: قطبی محدد میں r منفی ہو سکتا ہے۔

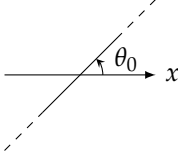
r کی منفی قیمتیں

بعض اوقات ہم r کو منفی رکھنا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقطہ $N(2,\frac{7\pi}{6})$ تک پہنچنے کے لئے ہم ابتدائی شعاع سے گھڑی کے الٹ رخ $\frac{7\pi}{6}$ گھوم کر آگے رخ 2 اکائیاں چلتے ہیں۔ اسی نقطہ تک پہنچنے کی خاطر ہم گھڑی کے الٹ رخ $\frac{\pi}{6}$ گھوم کر پیچھے رخ 2 اکائیاں چلیں گے (شکل 10.89)۔ یوں اس نقطے کے قطبی محدد $r=-2$ ، $\theta=\frac{\pi}{6}$ بھی ہوں گے۔

مثال 10.26: نقطہ $N(2,\frac{\pi}{6})$ کے قطبی محدد تلاش کریں۔

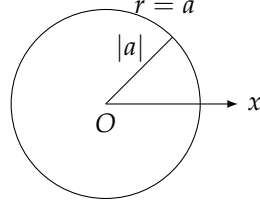
حل: ہم قطبی محدد کا مبدا اور ابتدائی شعاع ترسیم کرتے ہیں۔ ابتدائی شعاع کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ زاویے پر شعاع ترسیم کر کے اس پر مبدا سے 2 اکائیاں فاصلہ پر نقطہ $N(2,\frac{\pi}{6})$ ہو گا۔ ہم اب $r=2$ اور $r=-2$ لیتے ہوئے اس نقطہ کے لئے دیگر قطبی محدد تلاش کرتے ہیں۔

$r=2$ کے لئے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{6}\pm 2\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 4\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 6\pi,\quad \cdots$$

---

[36] origin
[37] pole

شکل 10.90: قطبی محدد پر $r = a$ دائرہ ہو گا۔

شکل 10.91: قطبی محدد پر $\theta = \theta_0$ سیدھی لکیر ہے۔

$r = -2$ کے لئے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \quad \cdots$$

یوں N کے مطابقتی محددی جوڑیاں

$$(2, \tfrac{\pi}{6} + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

اور

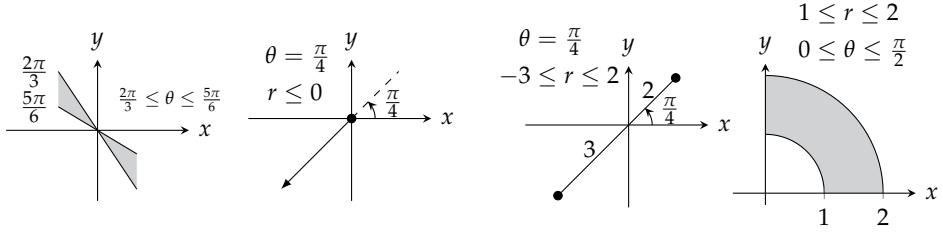
$$(-2, -\tfrac{5\pi}{6} + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ہوں گی۔ یہ کلیات $n = 0$ کے لئے $(2, \frac{\pi}{6})$ اور $(-2, -\frac{5\pi}{6})$ دیتے ہیں۔ اسی طرح $n = 1$ کے لئے یہ کلیات $(2, \frac{13\pi}{6})$ اور $(-2, \frac{7\pi}{6})$ دیتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ یوں نقطہ $N(2, \frac{\pi}{6})$ کی لامتناہی قطبی محددی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ □

بنیادی محددی مساوات اور عدم مساوات

اگر ہم r کو کسی مقررہ قیمت $r = a \neq 0$ پر رکھیں تب نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے $|a|$ فاصلہ پر ہو گا۔ زاویہ θ کو وقفہ 0 تا 2π پر تبدیل کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے رداس $|a|$ کے دائرہ پر چلے گا (شکل 10.90)۔

اگر ہم θ کو مقررہ قیمت $\theta = \theta_0$ پر رکھ کر r کو $-\infty$ تا ∞ کریں تب $N(r, \theta)$ مبدا سے گزرتی ہوئی اس سیدھی لکیر پر حرکت کرے گا جو ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ θ_0 بناتی ہے (شکل 10.91)۔

مساوات	ترسیم
$r = a$	رداس $\lvert a\rvert$ کا دائرہ جس کا مرکز O ہے
$\theta = \theta_0$	ابتدائی شعاع کے ساتھ θ_0 زاویے کی لکیر

شکل 10.92: ترسیمات برائے مثال 10.28

مثال 10.27: (ا) $r = 1$ اور $r = -1$ رداس 1 کے دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے۔
(ب) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ اور $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ اس سیدھی لکیر کی مساوات ہے جو مبدا سے گزرتی ہے اور ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{6}$ بناتی ہے۔ □

مساوات $r = a$ اور $\theta = \theta_0$ کو جوڑ کر دیگر قطعات، حصے اور شعاع بیان کیے جا سکتے ہیں۔

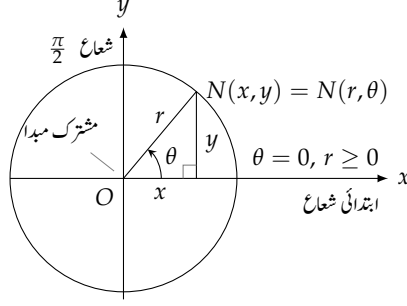
مثال 10.28: ان نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں جن کے قطبی محدد درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

ا. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ اور $1 \leq r \leq 2$

ب. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $-3 \leq r \leq 2$

ج. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $r \leq 0$

د. $-\infty < r < \infty$ اور $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

حل: ترسیمات کو شکل 10.92 میں دکھایا گیا ہے۔ □

شکل 10.93: کارتیسی اور قطبی محدد کے تعلقات معلوم کرنے کا عمومی طریقہ۔

کارتیسی بالمقابل قطبی محدد

ایک مستوی میں بیک وقت کارتیسی اور قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے ہم دونوں محدد کے مبدا ایک ہی نقطہ پر رکھتے ہیں اور ابتدائی شعاع کو مثبت x محور پر رکھتے ہیں۔ یوں شعاع $r > 0$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ مثبت y محور ہو گا (شکل 10.93)۔ اب ان محددی نظام کے تعلقات درج ذیل ہوں گے۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\theta \tag{10.35}$$

ہم مساوات 10.35 استعمال کرتے ہوئے قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات اور کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 10.29:

کارتیسی مساوات	قطبی مساوات
$x = 2$	$r\cos\theta = 2$
$xy = 4$	$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$
$x^2 - y^2 = 1$	$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$
$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$	$r = 1 + 2r\cos\theta$
$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$	$r = 1 - \cos\theta$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بعض اوقات کارتیسی اور بعض اوقات قطبی مساوات زیادہ سادہ ہوتے ہیں۔ □

مثال 10.30: دائرہ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ کی قطبی مساوات معلوم کریں۔

حل:

$$x^2+y^2-6y+9=0 \qquad \text{مساوات کی سادہ صورت}$$
$$x^2+y^2-6y=0$$
$$r^2-6r\sin\theta=0 \qquad x^2+y^2=r^2$$
$$r=0 \quad \text{یا} \quad r-6\sin\theta=0$$
$$r=6\sin\theta$$

مخروط حصوں کی قطبی مساوات پر حصہ 10.8 میں غور کیا جائے گا۔ □

مثال 10.31: دی گئی قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات حاصل کر کے ترسیم کو پہچانئے۔

ا. $r\cos\theta=-4$

ب. $r^2=4r\cos\theta$

ج. $r=\frac{4}{2\cos\theta-\sin\theta}$

حل: ہم $r\cos\theta=x$ ، $r\sin\theta=y$ اور $r^2=x^2+y^2$ استعمال کرتے ہیں۔

ا.

$$\underbrace{r\cos\theta}_{x}=-4$$
$$x=-4$$

ترسیم: انتصابی لکیر جو x محور کو $x=-4$ پر قطع کرتی ہے۔

ب.

$$r^2=4r\cos\theta$$
$$x^2+y^2=4x$$
$$x^2-4x+y^2=0$$
$$x^2-4x+4+y^2=4$$
$$(x-2)^2+y^2=4$$

ترسیم: ایک دائرہ جس کا مرکز $(2,0)$ اور رداس 2 ہے۔

ج.

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \sin\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

ترسیم: ایک سیدھی لکیر جس کی ڈھلوان $m = 2$ ہے اور جو y محور کو $y = -4$ پر قطع کرتی ہے۔

□

سوالات

قطبی محددی جوڑیاں

سوال 10.287: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(3, 0)$ ج. $(2, \frac{2\pi}{3})$ ہ. $(-3, \pi)$ ز. $(-3, 2\pi)$

ب. $(-3, 0)$ د. $(2, \frac{7\pi}{3})$ و. $(2, \frac{\pi}{3})$ ح. $(-2, -\frac{\pi}{3})$

جواب: ا اور ہ؛ ب اور ز؛ ج اور ح؛ د اور و

سوال 10.288: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(-2, \frac{\pi}{3})$ ج. (r, θ) ہ. $(-r, \theta)$ ز. $(-r, \theta + \pi)$

ب. $(2, -\frac{\pi}{3})$ د. $(r, \theta + \pi)$ و. $(2, -\frac{2\pi}{3})$ ح. $(-2, \frac{2\pi}{3})$

سوال 10.289: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(2, \frac{\pi}{2})$ ب. $(2, 0)$ ج. $(-2, \frac{\pi}{2})$ د. $(-2, 0)$

جواب: شکل 10.94
(ا) $(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ اور $(-2, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi)$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

(ب) $(2,2n\pi)$ اور $(-2,(2n+1)\pi)$ جہاں n عدد صحیح ہے۔
(ج) $(2,\frac{3\pi}{2}+2n\pi)$ اور $(-2,\frac{3\pi}{2}+(2n+1)\pi)$ جہاں n عدد صحیح ہے۔
(د) $(2,(2n+1)\pi)$ اور $(-2,2n\pi)$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

سوال 10.290: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(3,\frac{\pi}{4})$ ب. $(-3,\frac{\pi}{4})$ ج. $(3,-\frac{\pi}{4})$ د. $(-3,-\frac{\pi}{4})$

قطبی سے کارتیسی محدد

سوال 10.291: ان نقطوں کے کارتیسی محدد معلوم کریں جنہیں سوال 10.287 میں پیش کیا گیا ہے۔
جواب: (ا) $(3,0)$، (ب) $(-3,0)$، (ج) $(-1,\sqrt{3})$، (د) $(1,\sqrt{3})$، (ہ) $(3,0)$، (و) $(1,\sqrt{3})$، (ز) $(-3,0)$، (ح) $(-1,\sqrt{3})$

سوال 10.292: درج ذیل نقطے قطبی محدد میں دیے گئے ہیں۔ ان کی کارتیسی محدد تلاش کریں۔

ا. $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ ج. $(0,\frac{\pi}{2})$ ھ. $(-3,\frac{5\pi}{6})$ ز. $(-1,7\pi)$

ب. $(1,0)$ د. $(-\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ و. $(5,\tan^{-1}(\frac{4}{3}))$ ح. $(2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$

قطبی مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم

سوال 10.293 تا سوال 10.308 میں دیے مساوات اور عدم مساوات کو مطمئن کرنے والے نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں۔

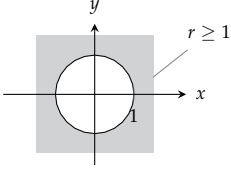
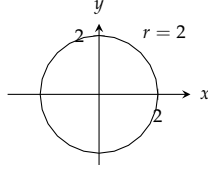
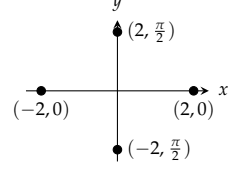
سوال 10.293: $r=2$
جواب: شکل 10.95

سوال 10.294: $0\le r\le 2$

سوال 10.295: $r\ge 1$
جواب: شکل 10.96

سوال 10.296: $1\le r\le 2$

سوال 10.297: $0\le\theta\le\frac{\pi}{6},\quad r\ge 0$
جواب: شکل 10.97

سوال 10.298: $\theta=\frac{2\pi}{3},\quad r\le -2$

شکل 10.94

شکل 10.95

شکل 10.96

سوال 10.299: $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad -1 \leq r \leq 3$
جواب: شکل 10.98

سوال 10.300: $\theta = \frac{11\pi}{4}, \quad r \geq -1$

سوال 10.301: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \geq 0$
جواب: شکل 10.99

سوال 10.302: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \leq 0$

سوال 10.303: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = 1$
جواب: شکل 10.100

سوال 10.304: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = -1$

سوال 10.305: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 1$
جواب: شکل 10.101

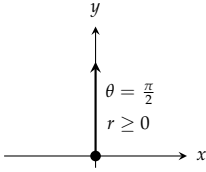
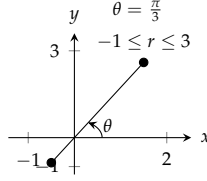
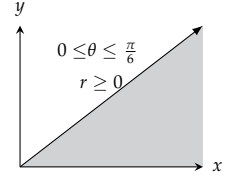
سوال 10.306: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad -1 \leq r \leq 1$

سوال 10.307: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq r \leq 2$
جواب: شکل 10.102

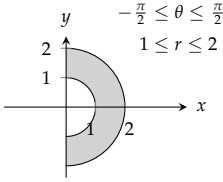
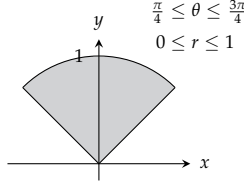
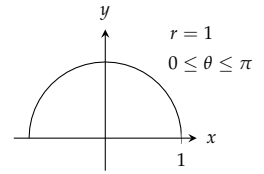
سوال 10.308: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq |r| \leq 2$

قطبی سے کارتیسی مساوات

سوال 10.309 تا سوال 10.334 میں مطابقتی کارتیسی مساوات دریافت کریں۔ اس کے بعد ترسیم کو پہچانئے۔

سوال 10.309: $r \cos\theta = 2$
جواب: $x = 2$ ، نقطہ $(2, 0)$ سے گزرتی انتصابی خط

شکل 10.97

شکل 10.98

شکل 10.99

شکل 10.100

شکل 10.101

شکل 10.102

سوال 10.310: $r\sin\theta = -1$

سوال 10.311: $r\sin\theta = 0$

جواب: $y = 0$ ، x محور

سوال 10.312: $r\cos\theta = 0$

سوال 10.313: $r = 4\csc\theta$

جواب: $y = 4$ ، نقطہ $(0,4)$ سے گزرتی افقی خط

سوال 10.314: $r = -3\sec\theta$

سوال 10.315: $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

جواب: $x + y = 1$ ، لکیر، جہاں $m = -1$ اور $b = 1$ ہیں۔

سوال 10.316: $r\sin\theta = r\cos\theta$

سوال 10.317: $r^2 = 1$

جواب: $x^2 + y^2 = 1$ ، دائرہ، رداس 1 ، مرکز $(0,0)$

سوال 10.318: $r^2 = 4r\sin\theta$

سوال 10.319: $r=\frac{5}{\sin\theta-2\cos\theta}$
جواب: $y-2x=5$ ، لکیر، $m=2$ ، $b=5$

سوال 10.320: $r^2\sin 2\theta=2$

سوال 10.321: $r=\cot\theta\csc\theta$
جواب: $y^2=x$ ، قطع مکافی، راس $(0,0)$ ، دائیں کھلتا ہے۔

سوال 10.322: $r=4\tan\theta\sec\theta$

سوال 10.323: $r=\csc\theta e^{r\cos\theta}$
جواب: $y=e^x$ ، قدرتی قوت نمائی تفاعل۔

سوال 10.324: $r\sin\theta=\ln r+\ln\cos\theta$

سوال 10.325: $r^2+2r^2\cos\theta\sin\theta=1$
جواب: $x+y=\pm 1$ ، دو متوازی سیدھی لکیریں جن کی ڈھلوان $m=-1$ اور $b=\pm 1$ ہیں۔

سوال 10.326: $\cos^2\theta=\sin^2\theta$

سوال 10.327: $r^2=-4r\cos\theta$
جواب: $(x+2)^2+y^2=4$ ، دائرہ، رداس 2 ، مرکز $(-2,0)$

سوال 10.328: $r^2=-6r\sin\theta$

سوال 10.329: $r=8\sin\theta$
جواب: $x^2+(y-4)^2=16$ ، دائرہ، رداس 4 ، مرکز $(0,4)$

سوال 10.330: $r=3\cos\theta$

سوال 10.331: $r=2\cos\theta+2\sin\theta$
جواب: $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ ، دائرہ، رداس $\sqrt{2}$ ، مرکز $(1,1)$

سوال 10.332: $r=2\cos\theta-\sin\theta$

سوال 10.333: $r\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=2$
جواب: $\sqrt{3}y+x=4$

سوال 10.334: $r\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)=5$

کارتیسی سے قطبی مساوات

سوال 10.335 تا سوال 10.348 میں کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کریں۔

سوال 10.335: $x = 7$
جواب: $r\cos\theta = 7$

سوال 10.336: $y = 1$

سوال 10.337: $x = y$
جواب: $\theta = \frac{\pi}{4}$

سوال 10.338: $x - y = 3$

سوال 10.339: $x^2 + y^2 = 4$
جواب: $r = 2$ یا $r = -2$

سوال 10.340: $x^2 - y^2 = 1$

سوال 10.341: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
جواب: $4r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta = 36$

سوال 10.342: $xy = 2$

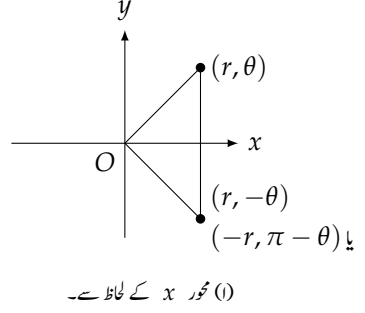
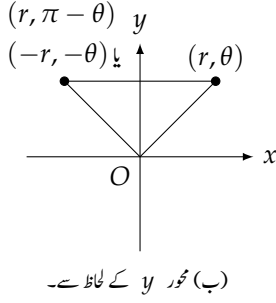
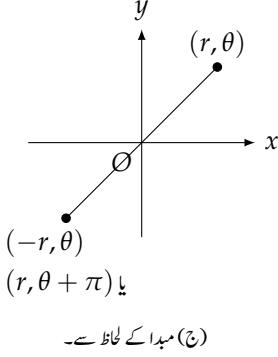
سوال 10.343: $y^2 = 4x$
جواب: $r\sin^2\theta = 4\cos\theta$

سوال 10.344: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال 10.345: $x^2 + (y-2)^2 = 4$
جواب: $r = 4\sin\theta$

سوال 10.346: $(x-5)^2 + y^2 = 25$

سوال 10.347: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
جواب: $r^2 = 6r\cos\theta - 2r\sin\theta - 6$

سوال 10.348: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$

شکل 10.103: تشاکلی کے تین پرکھ۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.349: مبدا کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔
جواب: $(0,\theta)$ جہاں θ زاویہ ہے۔

سوال 10.350: افقی اور انتصابی خط

ا. دکھائیں کہ xy مستوی میں ہر انتصابی خط کی قطبی مساوات کو $r = a\sec\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔

ب. xy مستوی میں ہر افقی خط کی قطبی مساوات کس صورت کی ہو گی؟

10.7 قطبی محدد میں ترسیم

اس حصہ میں مساوات کو قطبی محدد میں ترسیم کرنے کے تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

تشاکلی

قطبی محدد میں تشاکلی کا معیاری پرکھ شکل 10.103 میں دکھایا گیا ہے۔

قطبی ترسیمات کے پرکھ تشاکل

ا. محور x کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,-\theta)$ یا $(-r,\pi-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ا)۔

ب. محور y کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,\pi-\theta)$ یا $(-r,-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ب)۔

ج. مبدا کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(-r,\theta)$ یا $(r,\theta+\pi)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل 10.103-ج)۔

ڈھلوان

قطبی منحنی $r=f(\theta)$ کی ڈھلوان $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ہے ناکہ $r'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$۔ اس کی وجہ سمجھنے کی خاطر f کی ترسیم کو درج ذیل مقدار معلوم مساوات کی ترسیم فرض کریں۔

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

اگر f متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب x اور y بھی θ کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور جب $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\neq 0$ ہو تب ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو درج ذیل مقدار معلوم کلیہ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\theta} && \text{مساوات 10.30}\\
&=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)}\\
&=\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta-f(\theta)\sin\theta} && \text{تفرق کا کلیہ ضرب}
\end{aligned}$$

منحنی $r=f(\theta)$ کی ڈھلوان جہاں (r,θ) پر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\neq 0$ ہونا ضروری ہے۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)}=\frac{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta}\tag{10.36}$$

اگر مبدا پر منحنی $r=f(\theta)$ کا زاویہ $\theta=\theta_0$ ہو تب $f(\theta_0)=0$ ہو گا اور مساوات 10.36 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)}=\frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0}=\tan\theta_0$$

اگر مبدا پر $r=f(\theta)$ کا زاویہ θ_0 ہو تب مبدا پر منحنی کی ڈھلوان $\tan\theta_0$ ہو گی۔ مبدا پر ڈھلوان کی بات کرتے ہوئے ہم کہتے ہیں "$(0,\theta)$ پر ڈھلوان" نا کہ "مبدا پر ڈھلوان" کیونکہ قطبی منحنی مبدا سے کئی بار گزر سکتی ہے اور θ کی مختلف قیمتوں کے لئے یہاں ڈھلوان مختلف ہو گی۔

مثال 10.32: قلب نما[38]
منحنی $r=1-\cos\theta$ ترسیم کریں۔

حل: درج ذیل کی بنا یہ منحنی محور x کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned}(r,\theta)\ \text{منحنی پر ہے}\quad &\implies r=1-\cos\theta\\ &\implies r=1-\cos(-\theta)\qquad\qquad \cos\theta=\cos(-\theta)\\ &\implies (r,-\theta)\ \text{بھی ترسیم پر ہے}\end{aligned}$$

جیسے جیسے θ کی قیمت 0 سے π تک بڑھتی ہے، $\cos\theta$ کی قیمت 1 سے -1 تک گھٹتی ہے اور $r=1-\cos\theta$ کی قیمت کم سے کم قیمت 0 سے بڑھ کر زیادہ سے زیادہ قیمت 2 تک پہنچتی ہے۔ θ کی قیمت π سے 2π تک بڑھانے سے $\cos\theta$ کی قیمت -1 سے واپس 1 تک پہنچتی ہے اور r کی قیمت 2 سے واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $\cos\theta$ کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا $\theta=2\pi$ کے بعد یہی منحنی دوبارہ حاصل ہو گی۔

یہ منحنی مبدا سے $\tan(0)=0$ ڈھلوان پر نکلتی ہے اور مبدا پر $\tan(2\pi)=0$ ڈھلوان پر پہنچتی ہے۔

ہم $\theta=0$ تا $\theta=\pi$ کی مختلف قیمتوں کے لئے r کی قیمتیں

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

معلوم کر کے ان نقطوں کو ترسیم کرتے ہیں جس کا مماس مبدا پر افقی ہو گا۔ محور x میں اس کا عکس لیتے ہوئے ہم ترسیم مکمل کرتے ہیں (شکل 10.104)۔ شکل 10.104 میں تیر کا نشان بڑھتی θ کے رخ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ اس منحنی کی شکل قلب کی مانند ہے لہٰذا اس منحنی کو **قلب نما** کہتے ہیں۔ چرخی اور چرخی پر تہہ در تہہ ہموار دھاگہ لپیٹنے کے لئے قلب نما اشکال کے **کیم**[39] استعمال کئے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ کئی ریڈیو اینٹینا کی شعاع بھی قلب نما ہوتی ہے۔ □

---

[38] cardioid
[39] cam

شکل 10.104: قلب نما (مثال 10.32)

شکل 10.105: ترسیم برائے (مثال 10.33)

مثال 10.33: منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ ترسیم کریں۔

حل: مساوات $r^2 = \cos\theta$ کے لئے ضروری ہے کہ $\cos\theta \ge 0$ ہو لہٰذا پورا ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم θ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں رکھتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا یہ منحنی محور x کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے } &\implies r^2 = 4\cos\theta \\
&\implies r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\implies \text{ نقطہ } (r,-\theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے }
\end{aligned}
$$

یہ ترسیم مبدا کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے } &\implies r^2 = 4\cos\theta \\
&\implies (-r)^2 = 4\cos\theta \\
&\implies \text{ نقطہ } (-r,\theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے }
\end{aligned}
$$

مذکورہ بالا دو تشاکلی کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور y کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہو گا۔

یہ ترسیم $\theta = -\frac{\pi}{2}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کے لئے مبدا سے گزرتی ہے۔چونکہ ان زاویوں پر $\tan\theta$ کی قیمت لامتناہی ہے لہٰذا مبدا پر ترسیم کا مماس انتصابی ہو گا۔ وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں ہر θ کے لئے کلیہ $r^2 = 4\cos\theta$ متغیر r کی درج ذیل دو قیمتیں دیتا ہے۔

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

ہم اس وقفہ میں مختلف نقطے

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
r	±2	±1.9	±1.7	±1.4	0

معلوم کر کر انہیں ترسیم کر کے ہموار منحنی سے آپس میں جوڑتے ہیں۔ مماس اور تشاکلی کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل منحنی حاصل کی جاتی ہے (شکل 10.105)۔ □

تیزی سے ترسیم کا حصول

قطبی مساوات $r=f(\theta)$ کو ترسیم کرنے کے لئے کہ ہم (r,θ) کی قیمتوں کا جدول بنا کر ان نقطوں کو ترسیم کر کے بڑھتے θ رخ انہیں ہموار لکیر سے ملاتے ہیں۔ اگر ہمارے پاس اتنے زیادہ نقطے ہوں کہ قطبی ترسیم کا ہر گھیرا اور جھکاو صاف نظر آتا ہو تب یوں ترسیم کرنا ٹھیک ہے۔درج ذیل اقدام ترسیم کی ایک دوسری ترکیب بیان کرتے ہیں جو نسبتاً آسان اور تیز ثابت ہوتا ہے۔

ا. پہلے کارتیسی $r\theta$ مستوی میں $r=f(\theta)$ ترسیم کریں (یعنی θ کی قیمتوں کو افقی اور مطابقتی r کی قیمتوں کو انتصابی محور پر رکھیں۔)

ب. اب کارتیسی ترسیم کو بطور جدول اور رہبر لیتے ہوئے قطبی ترسیم حاصل کریں۔

صرف نقطے ترسیم کرنے سے کارتیسی ترسیم اس لئے بہتر ہے کہ کارتیسی ترسیم سے جلد دیکھا جا سکتا ہے کہاں قیمتیں مثبت، منفی یا غیر موجود ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ r کا بڑھنا اور گھٹنا بھی واضح ہوتا ہے۔ ہم $r=1+\cos(\frac{\theta}{2})$ اور $r^2=\sin 2\theta$ کو مثال بنا کر اس ترکیب کو دیکھتے ہیں۔

مثال 10.34: درج ذیل منحنی ترسیم کریں۔

$$r=1+\cos\tfrac{\theta}{2}$$

حل: ہم پہلے r بالمقابل θ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ چونکہ کوسائن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا مکمل ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم θ کا وقفہ 0 تا 2π لیں گے۔کارتیسی مستوی پر محور θ سے ترسیم تک لکیروں کی لمبائی (شکل 10.106-ا) قطبی ترسیم کا رداس r دیتی ہیں (شکل 10.106-ب)۔ □

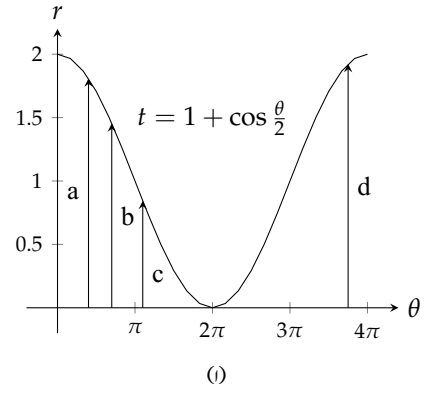
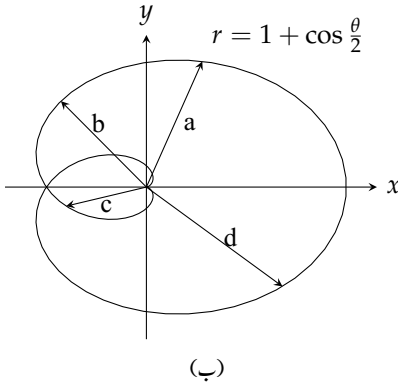
مثال 10.35: دوچشمہ[40] منحنی $r^2=\sin 2\theta$ ترسیم کریں۔

حل: ہم r کی بجائے r^2 بالمقابل θ کو کارتیسی $r^2\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل 10.107-ا) جہاں r^2 کو متغیر تصور کیا گیا ہے جس کی قیمت مثبت کے ساتھ ساتھ منفی بھی ہو سکتی ہے۔ اس کے بعد ہم $r=\pm\sqrt{\sin 2\theta}$ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل 10.107-ا کے نقطہ دار حصے کا جذر نہیں لیا جا سکتا ہے لہٰذا شکل 10.107-ب میں یہ حصے خالی رہتے ہیں جبکہ جذر کی بنا باقی حصے کے مثبت اور منفی حصے پائے جاتے ہیں۔ آخر میں ہم قطبی ترسیم حاصل کرتے ہیں۔ کارتیسی ترسیم (شکل 10.107-ب) دو بار قطبی ترسیم (شکل 10.107-ج) کو ڈھانپتا دیتا ہے۔ ہم کسی ایک گھیرا کو، یا دونوں گھیروں کے بالائی نصف یا دونوں کے گھیروں کے نچلے نصف استعمال کر سکتے تھے۔ البتہ دو بار ڈھانپنے سے کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے اور ہم تفاعل کے رویہ کو بہتر سمجھ پاتے ہیں۔ □

---

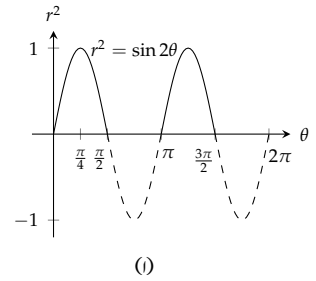
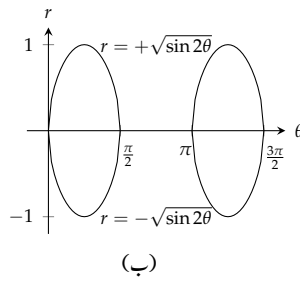
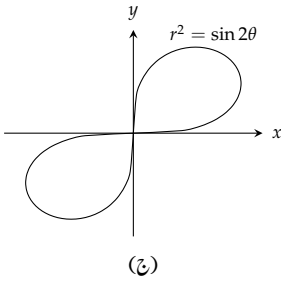
[40] lemniscate

(ب)

(ا)

شکل 10.106: ترسیمات برائے مثال 10.34

(ج)

(ب)

(ا)

شکل 10.107: ترسیم برائے مثال 10.35

قطبی قطب کے نقاط تقاطع کی تلاش

قطبی ترسیم میں ایک نقطہ کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ فیصلہ کرنے کے لئے خصوصی دھیان کرنا ہو گا کہ آیا کسی قطبی مساوات کی ترسیم پر ایک نقطہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح قطبی ترسیمات کے نقاط تقاطع معلوم کرتے ہوئے بھی دھیان رکھنا ضروری ہے۔ عین ممکن ہے کہ نقطہ تقاطع ایک ترسیم کو جن قطبی محدد پر مطمئن کرتا ہو، وہ ان قطبی محدد سے مختلف ہوں جن پر یہی نقطہ تقاطع دوسری قطبی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے تمام نقاط تقاطع دریافت ہوں۔ تمام نقاط تقاطع صرف مساوات ترسیم کر کے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

مثال 10.36: فریبی محدد
دکھائیں کہ نقطہ $(2, \frac{\pi}{2})$ منحنی $r = 2\cos 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

حل: اس نقطہ کو دی گئی مساوات میں پر کرنے سے درج ذیل عدم مساوات

$$2 = 2\cos 2(\tfrac{\pi}{2}) = 2\cos \pi = -2$$

حاصل ہوتی ہے جس سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ یہ نقطہ اس منحنی پر نہیں پایا جاتا ہے۔ یہاں مقدار درست ہے لیکن علامت غلط ہے جس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ اس نقطے کی ایسی محددی جوڑی، مثلاً $(-2, -\frac{\pi}{2})$ ، تلاش کی جائے جو منفی رداس دیتا ہے۔ اس جوڑی کو $r = 2\cos 2\theta$ میں پر کر کے

$$-2 = 2\cos 2(-\tfrac{\pi}{2}) = 2(-1) = -2$$

ملتا ہے لہٰذا مساوات مطمئن ہوتی ہے۔ اس طرح نقطہ $(2, \frac{\pi}{2})$ دی گئی منحنی پر پایا جاتا ہے۔ □

مثال 10.37: مبہم نقطہ تقاطع
درج ذیل منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔

$$r^2 = 4\cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$$

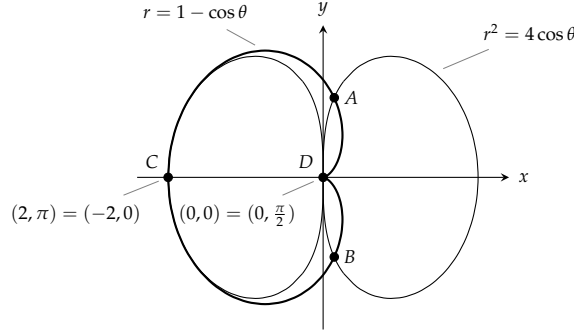
حل: کارتیسی محدد میں دو مساوات کو ایک ساتھ حل کر کے ان کے نقاط تقاطع حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ قطبی محدد میں قصہ کچھ مختلف ہے۔ قطبی محدد میں دو منحنیات کی مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے عین ممکن ہے کہ بعض نقاط تقاطع حاصل ہوں اور بعض حاصل نہ ہوں۔ اس مثال میں مساوات ایک ساتھ حل کر کے چار میں سے صرف دو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں۔ باقی دو ترسیم سے حاصل ہوں گے (سوال 10.399 بھی دیکھیں)۔

اگر ہم $\cos\theta = \frac{r^2}{4}$ کو $r = 1 - \cos\theta$ میں پر کریں تب درج ذیل ملتا ہے۔

$$r = 1 - \cos\theta = 1 - \frac{r^2}{4}$$

$$4r = 4 - r^2$$

$$r^2 + 4r - 4 = 0$$

$$r = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

شکل 10.108: نقطہ تقاطع (مثال 10.37)

ان میں $r = -2 - 2\sqrt{2}$ کی مطلق قیمت اتنی زیادہ ہے کہ یہ دونوں کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ دوسرے جواب $r = -2 + 2\sqrt{2}$ سے θ کی درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\theta &= \cos^{-1}(1-r) && (r = 1-\cos\theta)\\
&= \cos^{-1}(1-(2\sqrt{2}-2)) && (r = 2\sqrt{2}-2)\\
&= \cos^{-1}(3-2\sqrt{2})\\
&= \pm 80^\circ && \text{قریبی درجہ تک پورم پور}
\end{aligned}
$$

اس طرح ہم دو نقاط تقاطع $(r,\theta) = (2\sqrt{2}-2, \pm 80^\circ)$ تلاش کرنے میں کامیاب ہوتے ہیں۔

ہم شکل 10.104 اور شکل 10.105 کی مدد سے مساوات $r^2 = 4\cos\theta$ اور $r = 1 - \cos\theta$ کو ایک ساتھ ترسیم (شکل 10.108) کر کے دیکھتے ہیں کہ یہ نقطہ $(2,\pi)$ اور مبدا پر بھی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ان نقاط کے رداس r کی قیمتیں کیوں مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے حاصل نہیں ہوں پائی؟ اس کا جواب ہے کہ نقاط $(2,\pi)$ اور $(0,0)$ دونوں منحنیات پر بیک وقت نہیں پائے جاتے ہیں۔ ان نقطوں تک پہنچنے کے لئے دنوں منحنیات پر θ کی مختلف قیمتیں درکار ہوتی ہیں۔ منحنی $r = 1 - \cos\theta$ پر نقطہ $(2,\pi)$ تک $\theta = \pi$ پر پہنچا جاتا ہے جبکہ منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ پر اسی نقطہ تک $\theta = 0$ پر پہنچا جاتا ہے جہاں اس نقطہ کو محدد $(2,\pi)$ سے نہیں پہچانا جاتا جو اس مساوات کو مطمئن نہیں کرتے ہیں، بلکہ اس نقطہ کو محدد $(-2,0)$ سے پہچانا جاتا ہے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ اسی طرح قلب نما منحنی مبدا تک $\theta = 0$ پر پہنچتی ہے جبکہ منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ مبدا تک $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر پہنچتی ہے۔ □

سوالات

تشاکل اور قطبی ترسیمات

سوال 10.351 تا سوال 10.362 میں منحنی کی تشاکلی پہچانئے۔ اس کے بعد منحنی ترسیم کریں۔

سوال 10.351: $r = 1 + \cos\theta$
جواب: شکل 10.109

سوال 10.352: $r = 2 - 2\cos\theta$

سوال 10.353: $r = 1 - \sin\theta$
جواب: شکل 10.110

سوال 10.354: $r = 1 + \sin\theta$

سوال 10.355: $r = 2 + \sin\theta$
جواب: شکل 10.111

سوال 10.356: $r = 1 + 2\sin\theta$

سوال 10.357: $r = \sin\frac{\theta}{2}$
جواب: شکل 10.112

سوال 10.358: $r = \cos\frac{\theta}{2}$

سوال 10.359: $r^2 = \cos\theta$
جواب: شکل 10.113

سوال 10.360: $r^2 = \sin\theta$

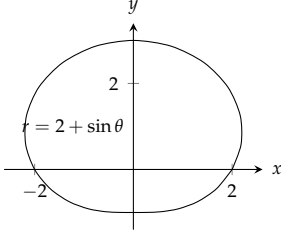
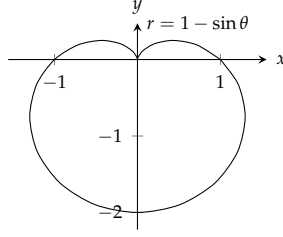
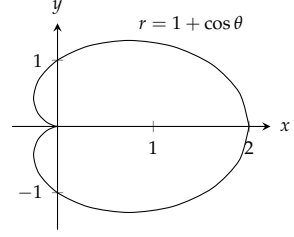
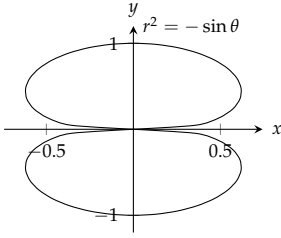
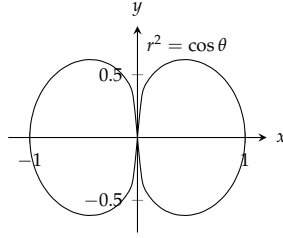
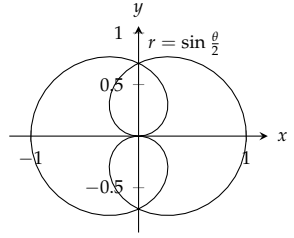
سوال 10.361: $r^2 = -\sin\theta$
جواب: شکل 10.114

سوال 10.362: $r^2 = -\cos\theta$

سوال 10.363 تا سوال 10.366 میں دی گئی دو چشمہ ترسیم کریں۔ان منحنیات کی تشاکلی پہچانئے۔

سوال 10.363: $r^2 = 4\cos 2\theta$
جواب: محور x ، محور y ، مبدا

سوال 10.364: $r^2 = 4\sin 2\theta$

سوال 10.365: $r^2 = -\sin 2\theta$
جواب: مبدا

شکل 10.109 شکل 10.110 شکل 10.111

شکل 10.112 شکل 10.113 شکل 10.114

سوال 10.366: $r^2 = -\cos 2\theta$

قطبی منحنیات کی ڈھلوان

سوال 10.367 تا سوال 10.370 میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان مساوات 10.36 کی مدد سے دریافت کریں۔ منحنی کو ترسیم کر کے ان نقطوں پر مماس بھی کھینچیں۔

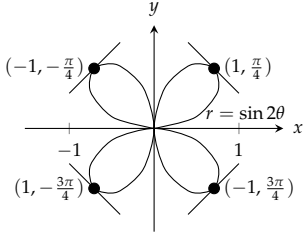
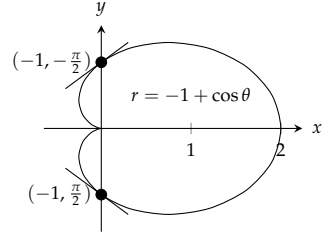
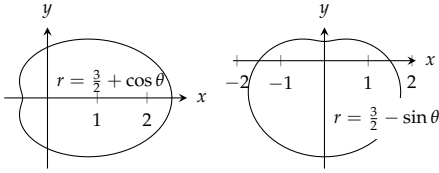
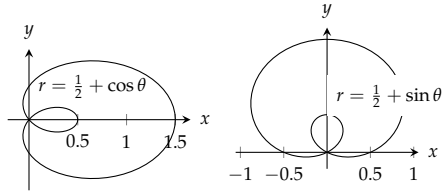
سوال 10.367: قطب نما: $r = -1 + \cos\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

جواب: شکل 10.115، $(-1, \frac{\pi}{2})$ پر ڈھلوان -1 اور $(-1, -\frac{\pi}{2})$ پر 1 ہے۔

سوال 10.368: قطب نما: $r = -1 + \sin\theta$ ؛ $\theta = 0, \pi$

سوال 10.369: چار گل: $r = \sin 2\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$

جواب: شکل 10.116، $(1, \frac{\pi}{4})$ پر -1 ، $(-1, -\frac{\pi}{4})$ پر 1 ، $(-1, \frac{3\pi}{4})$ پر 1 ، $(1, -\frac{3\pi}{4})$ پر -1

سوال 10.370: چار گل: $r = \cos 2\theta$ ؛ $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$

شکل 10.115

شکل 10.116

شکل 10.117

شکل 10.118

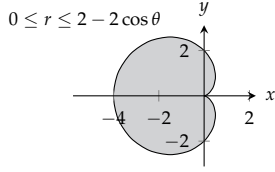
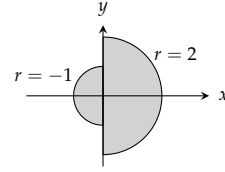
گھونگے

سوال 10.371 تا سوال 10.374 میں دیے گھونگے ترسیم کریں۔ آپ کو اس نام کی سمجھ سوال 10.371 ترسیم کر کے آئے گی۔ گھونوں کی مساوات کی عمومی صورت $r = a \pm b\cos\theta$ یا $r = a \pm b\sin\theta$ ہوتی ہے۔ ان کے چار بنیادی اشکال ہیں۔

سوال 10.371: اندرونی گھیرے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$
جواب: شکل 10.117

سوال 10.372: قلب نما: (ا) $r = 1 - \cos\theta$، (ب) $r = -1 + \sin\theta$

سوال 10.373: ٹوئے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$
جواب: شکل 10.118

سوال 10.374: چپٹے گھونگے: (ا) $r = 2 + \cos\theta$، (ب) $r = -2 + \sin\theta$

شکل 10.120

شکل 10.119

قطبی عدم مساوات کی ترسیم

سوال 10.375: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $-1 \le r \le 2$ اور $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔
جواب: شکل 10.119

سوال 10.376: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r \le 2\sec\theta$ اور $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔

سوال 10.377: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r \le 2 - 2 - \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔
جواب: شکل 10.120

سوال 10.378: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r^2 \le \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔

تقاطع

سوال 10.379: دکھائیں کہ نقطہ $(2, \frac{3\pi}{4})$ منحنی $r = 2\sin 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال 10.380: دکھائیں کہ نقطہ $(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2})$ منحنی $r = -\sin(\frac{\theta}{3})$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال 10.381 تا سوال 10.388 میں نقاط تقاطع تلاش کریں۔

سوال 10.381: $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$
جواب: $(0,0), (1, \frac{\pi}{2}), (1, \frac{3\pi}{2})$

سوال 10.382: $r = 1 + \sin\theta, \quad r = 1 - \sin\theta$

سوال 10.383: $r = 2\sin\theta, \quad r = 2\sin 2\theta$
جواب: $(0,0), (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}), (-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3})$

سوال 10.384: $r = \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

سوال 10.385: $r = \sqrt{2}, \quad r^2 = 4\sin\theta$
جواب: $(\sqrt{2}, \pm\frac{\pi}{6}), (\sqrt{2}, \pm\frac{5\pi}{6})$

سوال 10.386: $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\cos\theta$

سوال 10.387: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$
جواب: $(1, \frac{\pi}{12}), (1, \frac{5\pi}{12}), (1, \frac{13\pi}{12}), (1, \frac{17\pi}{12})$

سوال 10.388: $r^2 = \sqrt{2}\cos 2\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\sin 2\theta$

سوال 10.389 تا سوال 10.392 میں کمپیوٹر کی مدد سے منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 10.389: $r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

سوال 10.390: $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}, \quad r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$

سوال 10.391: $r = 1, \quad r = 2\sin 2\theta$

سوال 10.392: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 10.393: (ا) $r = -1 - \cos\theta$ اور (ب) $r = 1 + \cos\theta$ میں کس کی ترسیم $r = 1 - \cos\theta$ کی ترسیم کی طرح ہے؟
جواب: الف

سوال 10.394: (ا) $r = -\sin(2\theta + \frac{\pi}{2})$ اور (ب) $r = -\cos\frac{\theta}{2}$ میں کس کی ترسیم $r = \cos 2\theta$ کی ترسیم کی طرح ہے؟

سوال 10.395: پھول میں پھول
منحنی $r = 1 - 2\sin 3\theta$ ترسیم کریں۔

سوال 10.396: منحنی $r = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}$ ترسیم کریں۔

سوال 10.397: گلاب
گلاب $r = \cos m\theta$ جہاں $m = \frac{1}{3}, 2, 3, 7$ ہے ترسیم کریں۔

سوال 10.398: پیچ دار
قطبی محدد پیچ دار منحنیات کے لئے خصوصی طور پر بہتر ہے۔ درج ذیل پیچ دار منحنیات ترسیم کریں۔

ا. $r=\theta$
ب. $r=-\theta$
ج. $r=e^{\theta/10}$
د. $r=\frac{8}{\theta}$
ھ. $r=\pm\frac{10}{\sqrt{\theta}}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.399: (مثال 10.37 جاری) ہم مثال 10.37 میں درج ذیل مساوات

$$r^2=4\cos\theta \tag{10.37}$$
$$r=1-\cos\theta \tag{10.38}$$

اکٹھے حل کر کے نقاط $(0,0)$ اور $(2,\pi)$ کی نشاندہی نہیں کر پائے جہاں یہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

ا. ہم $r^2=4\cos\theta$ میں (r,θ) کی جگہ مماثل $(-r,\theta+\pi)$ پر کر کے نقطہ $(2,\pi)$ حاصل کر سکتے تھے:

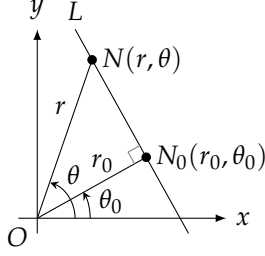
$$\begin{aligned}r^2&=4\cos\theta\\(-r)^2&=4\cos(\theta+\pi)\\r^2&=-4\cos\theta\end{aligned} \tag{10.39}$$

مساوات 10.38 اور مساوات 10.39 اکٹھے حل کر کے دکھائیں کہ $(2,\pi)$ دونوں کو مطمئن کرتا ہے۔ (ہم اب بھی یہ نہیں جان سکتے ہیں کہ ترسیمات $(0,0)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔)

ب. مبدا اب بھی خاص نقطہ ہے (جیسا یہ عموماً ہوتا ہے)۔ آئیں اس سے نپٹنے کا ایک طریقہ دیکھیں۔ مساوات 10.37 اور مساوات 10.38 میں $r=0$ پر کر کے انہیں علیحدہ علیحدہ θ کے لئے حل کریں۔ چونکہ کسی بھی θ کے لئے $(0,\theta)$ مبدا ہے لہٰذا اس طرح ہم جان پائیں گے کہ دونوں منحنیات مبدا سے گزرتی ہیں اگرچہ یہ ایک دوسرے سے مختلف θ کے لئے مبدا سے گزرتی ہیں۔

سوال 10.400: اگر اس حصہ کے شروع میں بتلائی گئی دو تشاکلی ایک منحنی میں پائی جاتی ہو تب کیا اس کی تیسری تشاکلی بھی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10.401: چار گل $r=\cos 2\theta$ کی اس پھول کی پتی کی زیادہ سے زیادہ چوڑائی دریافت کریں جو x محور پر پایا جاتا ہے۔
جواب: $2y=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

سوال 10.402: محور x سے قلب نما $r=2(1+\cos\theta)$ کا زیادہ سے زیادہ قد دریافت کریں۔

شکل 10.121: خط کی قطبی مساوات

10.8 مخروط حصوں کے قطبی مساوات

چاند، سیارے، مصنوعی سیارے اور دم دار ستارے ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد پر حرکت کرتے ہیں۔ ان کی حرکت کو قطبی محدد میں ایک آسان مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا فلکیات اور فلکیاتی انجینئری میں قطبی محدد اہمیت رکھتے ہیں۔ ہم اس مساوات کو یہاں حاصل کرتے ہیں۔

خطوط

فرض کریں مبدا O سے خط L تک عمودی لکیر، L پر نقطہ $N_0(r_0,\theta_0)$ پہنچتی ہے جہاں $r \geq 0$ ہے (شکل 10.121)۔ اب اگر L پر $N(r,\theta)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب نقاط O ، N_0 اور N ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہوں گے جس سے

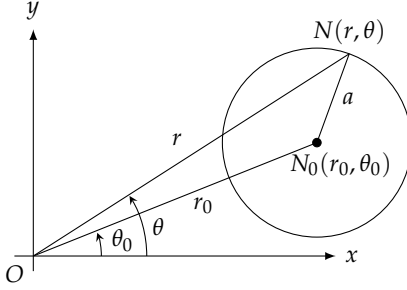
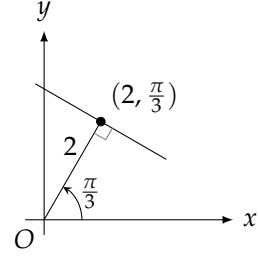
$$\frac{r_0}{r} = \cos(\theta - \theta_0)$$

یا

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

لکھا جا سکتا ہے۔ **خط کی معیاری قطبی مساوات**
اگر مبدا سے خط L تک عمود نقطہ $N_0(r_0,\theta_0)$ پر بیٹھتا ہو اور $r_0 \geq 0$ ہو تب L کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

مثال 10.38: مماثل $\cos(A - B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ استعمال کر کے شکل 10.122 میں دیے خط کی مساوات تلاش کریں۔

شکل 10.123: دائری کی قطبی مساوات۔

شکل 10.122: خط برائے مثال 10.38

حل:

$$
\begin{aligned}
r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)&=2\\
r\Big(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\Big)&=2\\
\frac{1}{2}r\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta&=2\\
\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y&=2\\
x+\sqrt{3}y&=4
\end{aligned}
$$

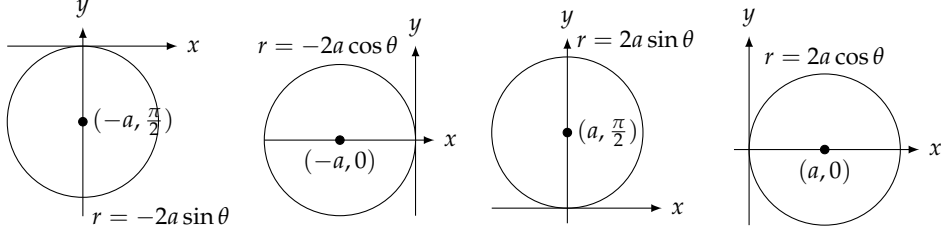
□

10.8.1 دائرے

ایک دائرہ جس کا مرکز $N_0(r_0,\theta_0)$ اور رداس a ہو کی قطبی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم مثلث ON_0N پر قاعدہ کوسائن لاگو کرتے ہیں (شکل 10.123) جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a^2=r_0^2+r^2-2r_0r\cos(\theta-\theta_0) \tag{10.40}$$

اگر یہ دائرہ مبدا سے گزرتا ہو تب $r_0=a$ ہو گا جس سے مساوات 10.40 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
a^2&=a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\theta_0) \quad (\text{مساوات 10.40 میں } r_0=a)\\
r^2&=2ar\cos(\theta-\theta_0)\\
r&=2a\cos(\theta-\theta_0)
\end{aligned} \tag{10.41}
$$

شکل 10.124: کارتیسی محور پر مرکز والے دائروں کے قطبی مساوات۔

اگر دائرے کا مرکز مثبت x محور پر پایا جاتا ہو تب مساوات 10.41 درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\cos\theta \tag{10.42}$$

اگر دائرے کا مرکز مثبت y محور پر پایا جاتا ہو تب $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ اور $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ ہوں گے لہٰذا مساوات 10.41 درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\sin\theta \tag{10.43}$$

مساوات 10.42 اور مساوات 10.43 میں r کی جگہ $-r$ پر کر کے ان دائروں کی مساواتیں حاصل ہوں گی جن کے مرکز منفی x محور یا منفی y محور پر ہوں (شکل 10.124)۔

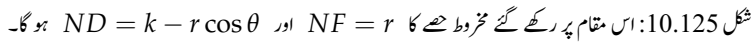
مثال 10.39: مبدا سے گزرتے ہوئے دائرے

رداس	مرکز	مساوات
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \frac{\pi}{2})$	$r = 4\sin\theta$
$\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \frac{\pi}{2})$	$r = -2\sin\theta$

□

ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد یکجا

ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کے قطبی مساوات معلوم کرنے کی خاطر ہم ایک ماسکہ کو مبدا پر رکھتے ہیں اور مطابقتی ناظمہ کو مبدا کے دائیں، انتصابی لکیر $x = k$ پر رکھتے ہیں (شکل 10.125)۔ یوں

$$NF = r$$

شکل 10.125: اس مقام پر رکھے گئے مخروطی حصے کا $NF = r$ اور $ND = k - r\cos\theta$ ہو گا۔

اور

$$ND = k - FB = k - r\cos\theta$$

ہوں گے۔ یوں مخروط کی ماسکہ ناظمہ مساوات $NF = e \cdot ND$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

جس کو r کے لئے حل کرتے ہیں:

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta} \tag{10.44}$$

یہ مساوات $0 < e < 1$ کے لئے ترخیم، $e = 1$ کے لئے قطع مکافی اور $e > 1$ کے لئے قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کو ایک ہی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

مثال 10.40: مخروطی حصہ مساوات 10.44

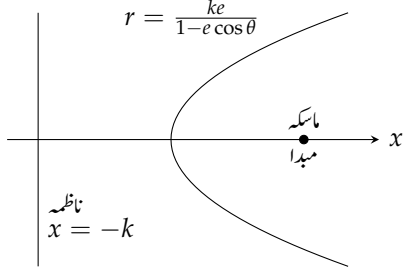
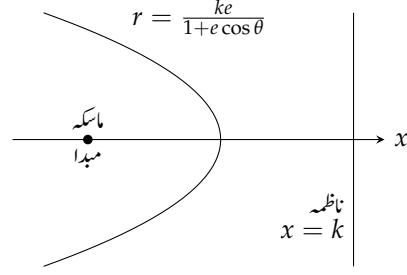
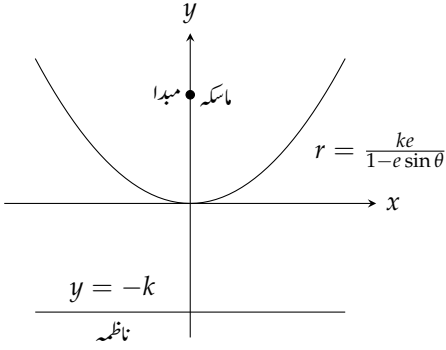
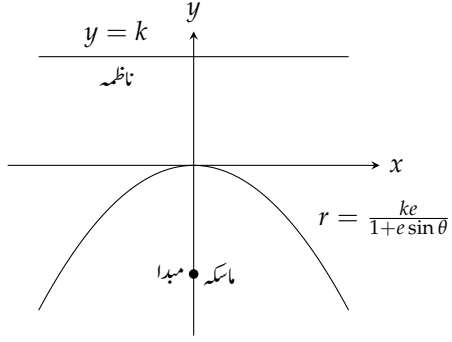
$$e = \frac{1}{2} \quad \text{ترخیم:} \qquad r = \frac{k}{2 + \cos\theta}$$

$$e = 1 \quad \text{قطع مکافی:} \qquad r = \frac{k}{1 + \cos\theta}$$

$$e = 2 \quad \text{قطع زائد:} \qquad r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta}$$

□

آپ مساوات 10.44 کی مختلف صورتیں دیکھیں گے جن کا دارومدار ناظمہ کے مقام پر ہو گا۔ اگر مبدا کے بائیں جانب لکیر $-k = $ ناظمہ ہو (جبکہ ماسکہ اب بھی مبدا پر ہو) تب مساوات 10.44 کی جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}$$

شکل 10.126: مخروط حصوں کی مساواتیں $(e > 0)$

نسب نما میں اب $(+)$ کی بجائے $(-)$ ہو گا۔ اگر ناظمہ $y = k$ یا $y = -k$ ہو تب مساوات 10.44 میں $\cos\theta$ کی جگہ $\sin\theta$ ہو گا (شکل 10.126)۔

مثال 10.41: ایک قطع زائد جس کی سنک $\frac{3}{2}$ اور ناظمہ $x = 2$ ہو کی مساوات دریافت کریں۔

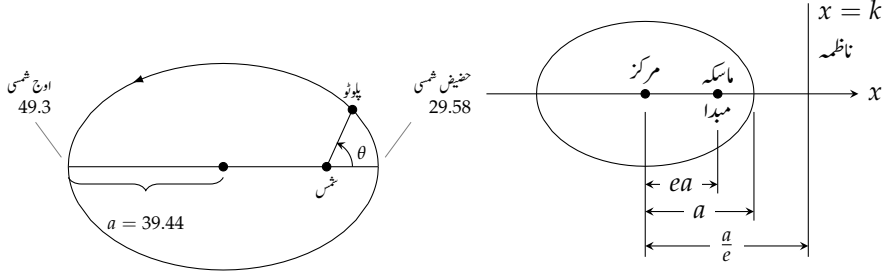
حل: ہم شکل 10.126-الف کی مساوات میں $k = 2$ اور $e = \frac{3}{2}$ لیتے ہیں۔

$$r = \frac{2(\frac{3}{2})}{1 + \frac{3}{2}\cos\theta} \implies r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}$$

□

مثال 10.42: ایک قطع مکافی جس کی مساوات درج ذیل ہے کی ناظمہ معلوم کریں۔

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}$$

شکل 10.127: ایک ترخیم جس کا نصف محور اکبر a ہو، ماسکہ تا ناظمہ فاصلہ لہٰذا $k = \frac{a}{e} - ea$ یعنی $ke = a(1-e^2)$ ہو گا۔

شکل 10.128: مدار پلوٹو (مثال 10.43)

حل: ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو 10 سے تقسیم کر کے مساوات کی معیاری روپ

$$r = \frac{5/2}{1+\cos\theta}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ درج ذیل مساوات ہے

$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta}$$

جس میں $k = 5/2$ اور $e = 1$ ہیں۔ ناظمہ کی مساوات $x = \frac{5}{2}$ ہو گی۔ □

ہم شکل 10.127 سے دیکھتے ہیں کہ ترخیم کے لئے k، سنک e اور نصف محور اکبر a کا تعلق

$$k = \frac{a}{e} - ea \tag{10.45}$$

ہے جس سے $ke = a(1-e^2)$ ملتا ہے۔ مساوات 10.44 میں ke کی جگہ پر کرنے سے ترخیم کی درج ذیل معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \qquad \text{سنک } e \text{ اور نصف اکبر محور } a \tag{10.46}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 10.46 میں $e = 0$ پر کرنے سے $r = a$ حاصل ہوتا ہے جو ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

سیاروں کے مدار معلوم کرنے کے لئے مساوات 10.46 ابتدائی مساوات ہے۔

مثال 10.43: ایک ترخیم کا نصف محور اکبر 39.44 فلکیاتی اکائی اور سنک 0.25 ہے۔ اس ترخیم کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ یہ تخمیناً سیارہ پلوٹو کا مدار ہے۔

حل: ہم مساوات 10.46 میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کرتے ہیں۔

$$r = \frac{39.44(1-(0.25)^2)}{1+0.25\cos\theta} = \frac{147.9}{4+\cos\theta}$$

حضیض شمسی[41] پر سورج سے پلوٹو

$$r = \frac{147.9}{4+1} = 29.58$$

فلکی اکائیاں دور ہو گا جبکہ اصطلاحاوج شمسی[42] پر یہ سورج سے

$$r = \frac{147.9}{4-1} = 49.3$$

فلکی اکائیاں دور ہو گا (شکل 10.128)۔ □

مثال 10.44: ایک ماسکہ سے مطابقتی ناظمہ تک فاصل مثال 10.43 میں معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات 10.45 میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کر کے

$$k = 39.44\left(\frac{1}{0.25} - 0.25\right) = 147.9$$

فلکی اکائیاں حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

خطوط

سوال 10.403 تا سوال 10.406 میں دیے خطوط کی قطبی اور کارتیسی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.403: خط شکل 10.129 میں ترسیم کیا گیا ہے۔
جواب: $r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 5, \quad y = -\sqrt{3}x + 10$

[41] perihelion
[42] aphelion

شکل 10.129: ترسیم سوال 10.403

شکل 10.130: ترسیم سوال 10.404

شکل 10.131: ترسیم سوال 10.405

شکل 10.132: ترسیم سوال 10.406

سوال 10.404: خط شکل 10.130 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال 10.405: خط شکل 10.131 میں ترسیم کیا گیا ہے۔
جواب: $r\cos(\theta-\frac{4\pi}{3})=3, \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-2\sqrt{3}$

سوال 10.406: خط شکل 10.132 میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال 10.407 تا سوال 10.410 میں دی مساوات کو ترسیم کریں اور ان کی کارتیسی مساوات معلوم کریں۔

سوال 10.407: $r\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$
جواب: $y=2-x$

سوال 10.408: $r\cos(\theta+\frac{3\pi}{4})=1$

سوال 10.409: $r\cos(\theta-\frac{2\pi}{3})=3$
جواب: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$

سوال 10.410: $r\cos(\theta+\frac{\pi}{3})=2$

سوال 10.411 تا سوال 10.414 میں دی گئی کارتیسی مساوات کی قطبی روپ ($r\cos(\theta-\theta_0)=r_0$) تلاش کریں۔

سوال 10.411: $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=6$
جواب: $r\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=3$

شکل 10.133: دائرہ سوال 10.415

شکل 10.134: دائرہ سوال 10.416

شکل 10.135: دائرہ سوال 10.417

شکل 10.136: دائرہ سوال 10.418

سوال 10.412: $\sqrt{3}x - y = 1$

سوال 10.413: $y = -5$
جواب: $r\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = 5$

سوال 10.414: $x = -4$

سوال 10.415 تا سوال 10.418 میں دی گئی دائروں کی قطبی مساوات دریافت کریں۔

سوال 10.415: دائرہ شکل 10.133
جواب: $r = 8\cos\theta$

سوال 10.416: دائرہ شکل 10.134

سوال 10.417: دائرہ شکل 10.135
جواب: $r = 2\sqrt{2}\sin\theta$

سوال 10.418: دائرہ شکل 10.136

سوال 10.419 تا سوال 10.422 میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ ان کے مرکز کے قطبی محدد اور رداس لکھیں۔

سوال 10.419: $r = 4\cos\theta$
جواب: $C(2,0), \quad 2$

سوال 10.420: $r = 6\sin\theta$

سوال 10.421: $r=-2\cos\theta$
جواب: $C(1,\pi),\quad 1$

سوال 10.422: $r=-8\sin\theta$

سوال 10.423 تا سوال 10.430 کے قطبی مساوات معلوم کریں۔

سوال 10.423: $(x-6)^2+y^2=36$
جواب: $r=12\cos\theta$

سوال 10.424: $(x+2)^2+y^2=4$

سوال 10.425: $x^2+(y-5)^2=25$
جواب: $r=10\sin\theta$

سوال 10.426: $x^2+(y+7)^2=49$

سوال 10.427: $x^2+2x+y^2=0$
جواب: $(x+1)^2+y^2=1,\quad r=-2\cos\theta$

سوال 10.428: $x^2-16x+y^2=0$

سوال 10.429: $x^2+y^2+y=0$
جواب: $x^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4},\quad r=-\sin\theta$

سوال 10.430: $x^2+y^2-\frac{4}{3}y=0$

سنک اور ناظمہ سے مخروط خطے

سوال 10.431 تا سوال 10.438 میں مخروط حصوں کی سنک دی گئی ہے۔ مخروط حصے کا ایک ماسکہ مبدا پر واقع ہے اور اس کا مطابقتی ناظمہ بھی دیا گیا ہے۔ اس مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.431: $e=1,\quad x=2$
جواب: $r=\frac{2}{1+\cos\theta}$

سوال 10.432: $e = 1, \quad y = 2$

سوال 10.433: $e = 5, \quad y = -6$
جواب: $r = \frac{30}{1-5\sin\theta}$

سوال 10.434: $e = 2, \quad x = 4$

سوال 10.435: $e = \frac{1}{2}, \quad x = 1$
جواب: $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$

سوال 10.436: $e = \frac{1}{4}, \quad x = -2$

سوال 10.437: $e = \frac{1}{5}, \quad y = -10$
جواب: $r = \frac{10}{5-\sin\theta}$

سوال 10.438: $e = \frac{1}{3}, \quad y = 6$

قطع مکافی اور ترخیم

سوال 10.439 تا سوال 10.446 کے قطع مکافی اور ترخیمات کو ترسیم کریں۔ مبدا پر واقع ماسکہ کا مطابقتی ناظمہ بھی ترسیم کریں۔ ہر مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

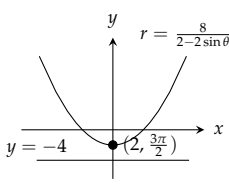
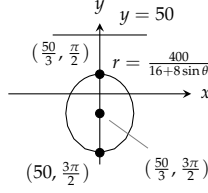
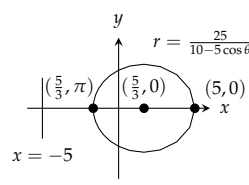
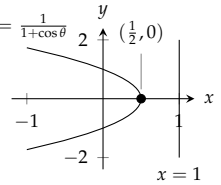
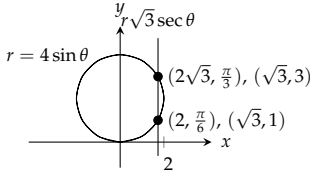
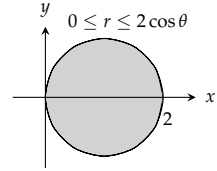
سوال 10.439: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$
جواب: شکل 10.137

سوال 10.440: $r = \frac{6}{2+\cos\theta}$

سوال 10.441: $r = \frac{25}{10-5\cos\theta}$
جواب: شکل 10.138

سوال 10.442: $r = \frac{4}{2-2\cos\theta}$

سوال 10.443: $r = \frac{400}{16+8\sin\theta}$
جواب: شکل 10.139

سوال 10.444: $r = \frac{12}{3+3\sin\theta}$

شکل 10.140 — شکل 10.139 — شکل 10.138 — شکل 10.137

شکل 10.142 — شکل 10.141

سوال 10.445: $r = \frac{8}{2-2\sin\theta}$
جواب: شکل 10.140

سوال 10.446: $r = \frac{4}{2-\sin\theta}$

عدم مساوات کی ترسیمات

سوال 10.447 اور سوال 10.448 میں عدم مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال 10.447: $0 \le r \le 2\cos\theta$
جواب: شکل 10.141

سوال 10.448: $-3\cos\theta \le r \le 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 10.449 تا سوال 10.458 میں دیے گئے خط اور مخروط خطے ترسیم کریں۔

سوال 10.449: $r = 3\sec(\theta - \frac{\pi}{3})$

سوال 10.450: $r = 4\sec(\theta + \frac{\pi}{6})$

سوال 10.451: $r = 4\sin\theta$

سوال 10.452: $r = -2\cos\theta$

سوال 10.453: $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$

سوال 10.454: $r = \frac{8}{4+\sin\theta}$

سوال 10.455: $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$

سوال 10.456: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$

سوال 10.457: $r = \frac{1}{1+2\sin\theta}$

سوال 10.458: $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.459: حضیض شمسی اور اوج شمسی
ایک سیارہ اپنے سورج کے گرد ایک ترخیم پر گھومتا ہے جس کے نصف محور اکبر کی لمبائی a ہے۔

ا. دکھائیں کہ جب سیارہ سورج کے قریب تر ہو تب $r = a(1-e)$ ہو گا اور جب یہ سورج سے دور تر ہو تب $r = a(1+e)$ ہو گا۔

ب. جدول 10.4-ا کی مدد سے معلوم کریں کہ ہماری نظام شمسی میں ہر سیارہ سورج کے کتنے نزدیک اور اس سے کتنا دور ہو سکتا ہے۔

جدول 10.4: نظام شمسی

(ا) نظام شمسی میں سیاروں کی سنک اور نصف محور اکبر

سیارہ	نصف محور اکبر (فلکی اکائیاں)	سنک
عطارہ	0.3871	0.2056
زہرہ	0.7233	0.0068
زمین	1.000	0.0167
مریخ	1.524	0.0934
مشتری	5.203	0.0484
زحل	9.539	0.0543
یورانس	19.18	0.0460
نیپچون	30.06	0.0082
پلوٹو	39.44	0.2481

(ب) نظام شمسی میں حضیض شمسی اور اوج شمسی۔

سیارہ	حضیض شمسی (فلکی اکائیاں)	اوج شمسی (فلکی اکائیاں)
عطارہ	0.3075	0.4667
زہرہ	0.7184	0.7282
زمین	0.9833	1.0167
مریخ	1.3817	1.6663
مشتری	4.9512	5.4548
زحل	9.0210	10.0570
یورانس	18.2977	20.0623
نیپچون	29.8135	30.3065
پلوٹو	29.6549	49.2251

جواب: (ب) جدول 10.4-ب

سوال 10.460: سیاروں کی مدار پر حرکت
ہم نے مثال 10.43 میں پلوٹو کے مدار کی قطبی مساوات معلوم کی۔ جدول 10.4-ا کی مدد سے دیگر سیاروں کے مدار کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.461: (الف) منحنیات $r = 4\sin\theta$ اور $r = \sqrt{3}\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دنوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔
جواب: (ا) $x = \sqrt{3}$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ، (ب) شکل 10.142

سوال 10.462: (الف) منحنیات $r = 8\cos\theta$ اور $r = 2\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دنوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔

سوال 10.463: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos\theta = 4$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔
جواب: $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

سوال 10.464: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 2$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال 10.465: خلائی مہندس

ا. ترخیمی مدار کی سنک کا کلیہ خلائی مہندس درج ذیل لکھے گا

$$e = \frac{r_{\text{بلند تر}} - r_{\text{کمتر}}}{r_{\text{بلند تر}} + r_{\text{کمتر}}}$$

جہاں خلائی جہاز سے قوت کشش کے مرکز تک فاصلہ r ہے۔ یہ کلیہ کیوں قابل استعمال ہے؟

ب. ترخیم کی ترسیم بذریعہ دھاگہ۔ آپ کے پاس $10\,\text{cm}$ لمبائی کا ایک دھاگہ ہے جس کے سر پنیوں کے ساتھ بندھے ہوئے ہیں۔ آپ صفحہ 1199 پر شکل 10.4 میں دکھائی گئی ترکیب استعمال کر کے ایک ترخیم ترسیم کریں جس کی سنک 0.2 ہو۔ یہ ترخیم سیارہ مریخ کا مدار دے گا۔

جواب: (ب) پنیا 2 سنٹی میٹر دور ہونی چاہیے۔

سوال 10.466: ہالی دم دار ستارہ (مثال 10.6 دیکھیں۔)

ا. دم دار ستارہ ہالی کے مدار کی مساوات اس محددی نظام میں لکھیں جس میں شمس مبدا پر ہو جبکہ دوسرا ماسکہ منفی x محور پر ہو۔ فلکی اکائیاں استعمال کریں۔

ب. یہ دم دار ستارہ سورج کے کتنے قریب پہنچتا ہے؟ جواب فلکی اکائیوں میں اور کلو میٹر میں دیں۔

سوال 10.467 تا سوال 10.470 میں دی گئی منحنی کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کا خاکہ کھینچیں۔

سوال 10.467: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

جواب: $r = 2a\sin\theta$ دائرہ

سوال 10.468: $y^2 = 4ax + 4a^2$

سوال 10.469: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad (\alpha, p \text{ مستقل})$

جواب: $r\cos(\theta - \alpha) = p$ خط

سوال 10.470: $(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 10.471: کمپیوٹر پر درج ذیل کو k اور e کی مختلف قیمتوں اور $-\pi \le \theta \le \pi$ کے لئے ترسیم کریں۔

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

درج ذیل سوالات کے جواب دیں۔

ا. آپ $k=-2$ لیں۔اب e کی قیمت $\frac{3}{4}$ ، 1 اور $\frac{5}{4}$ کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہی کچھ $k=2$ لے کر کریں۔

ب. آپ $k=-1$ لیں۔اب e کی قیمت $\frac{7}{6}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 ، 10 اور 20 کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہ کچھ $e=\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{20}$ کے لئے کریں۔

ج. اب $e>0$ اور غیر متغیر رکھتے ہوئے k کی قیمت -1 ، -2 ، -3 ، -4 اور -5 کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کی ترسیمات پر نظر رکھیں۔

سوال 10.472: درج ذیل قطبی ترخیم کو مختلف $a>0$ اور $0<e<1$ ، $-\pi\leq\theta\leq\pi$ کے لئے کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

ا. آپ $e=\frac{9}{10}$ لیں۔اب a کی قیمت 1 ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 اور 10 لینے سے ترسیم پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ یہی کچھ $e=\frac{1}{4}$ کے لئے کر کے دیکھیں۔

ب. آپ $a=2$ لیں۔اب e کی قیمت $\frac{9}{10}$ ، $\frac{8}{10}$ ، $\frac{7}{10}$ ، $\cdots$ ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ اور $\frac{1}{50}$ لینے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟

10.9 قطبی محدد میں تکمل

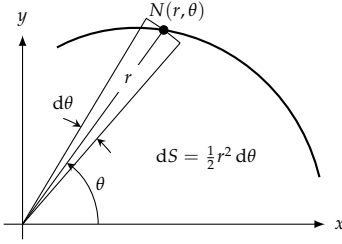
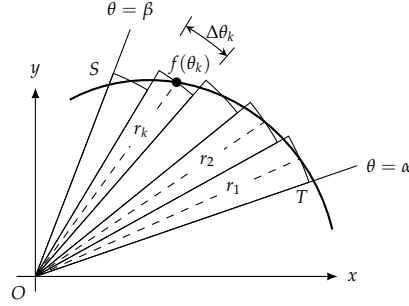
اس حصہ میں قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے مستوی خطوں کا رقبہ، منحنیات کی لمبائی، اور سطح طواف کا رقبہ حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

مستوی میں رقبہ

شکل 10.143 میں خطہ OTS کے حدود شعاع $\theta=\alpha$ ، شعاع $\theta=\beta$ اور منحنی $r=f(\theta)$ ہیں۔ ہم اس خطہ کو n عدد پنکھا نما پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں جو زاویہ TOS کی خانہ بندی P پر مبنی ہے۔ ایک علامتی پٹی کا رداس $r_k=f(\theta_k)$ اور وسطی زاویہ $\Delta\theta_k$ ہو گا جبکہ اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S_k=\frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k=\frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

یوں مکمل خطے کا رقبہ تخمیناً

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

شکل 10.144: تفرقی رقبہ $\mathrm{d}S$

شکل 10.143: خطہ OTS کا رقبہ۔

ہو گا۔ اگر f استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرنے سے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی للہذا خطے کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(f(\theta))^2 \,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

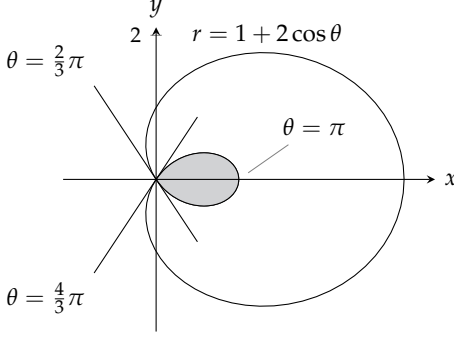
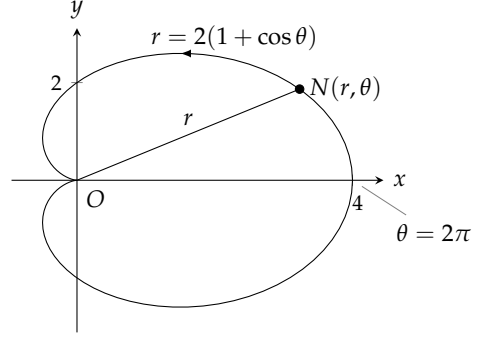
مبدا اور منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کے بیچ پنکھا نما خطہ کا رقبہ

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

یہ درج ذیل تفرقی رقبے کا تکمل ہے (شکل 10.144)۔

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

مثال 10.45: قلب نما $r = 2(1 + \cos\theta)$ کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم قلب نما کو ترسیم (شکل 10.145) کر کے رداس OP کی نشاندہی کرتے ہیں جو $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$ کرنے سے

شکل 10.146: رقبہ گھونگا (مثال 10.46)

شکل 10.145: قلب نما کی ترسیم برائے مثال 10.45

قلب نما پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے۔ یہ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi
\end{aligned}$$

□

مثال 10.46: درج ذیل گھونگا کے چھوٹے گھیرے کا رقبہ تلاش کریں۔

$$r = 1 + 2\cos\theta$$

حل: ہم اس گھونگے کو ترسیم کرتے ہیں (شکل 10.146)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے گھیرا $\theta = \frac{2}{3}\pi$ اور $\theta = \frac{4}{3}\pi$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ ہم نصف رقبہ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ تا $\theta = \pi$ تلاش کر کے اس کو 2 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$S = 2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

متکمل r^2 کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
r^2 &= (2\cos\theta+1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1\\
&= 4\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1\\
&= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1\\
&= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta
\end{aligned}$$

یوں رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= \Big[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\\
&= (3\pi) - \Big(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\\
&= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

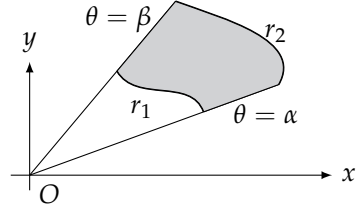
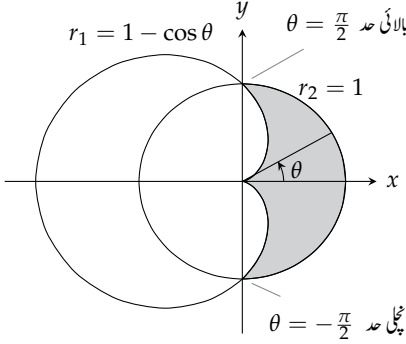
□

ہم شکل 10.147 طرز خط جو منحنیات $r_1 = r_1(\theta)$ اور $r_2 = r_2(\theta)$ کے بیچ $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ پایا جاتا ہو، کا رقبہ تلاش کرنے کی خاطر تکمل $\frac{1}{2}r_2^2\,\mathrm{d}\theta$ سے تکمل $\frac{1}{2}r_1^2\,\mathrm{d}\theta$ منفی کرتے ہیں۔ اس سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

خطہ $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ **کا رقبہ**

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_2^2\,\mathrm{d}\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_1^2\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta \tag{10.47}$$

مثال 10.47: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں جو دائرہ $r = 1$ کے اندر اور قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے باہر پایا جاتا ہے۔

حل: ہم رقبہ ترسیم کر کے خطے کے حدود اور تکمل کے حدود معلوم کرتے ہیں (شکل 10.148)۔ بیرونی منحنی $r_2 = 1$ جبکہ اندرونی

شکل 10.147: سایہ دار رقبہ تلاش کرنے کی خاطر r_2 اور مبدا کے بیچ رقبہ سے r_1 اور مبدا O کے بیچ رقبہ منفی کیا جاتا ہے۔

شکل 10.148: دائرہ اور قلب نما کے بیچ رقبہ (مثال 10.47)

منحنی $r_1 = 1 - \cos\theta$ ہے جبکہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ مساوات 10.47 سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta && \text{تشاکلی} \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta) + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \Big(2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big) \\
&= \Big[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

□

منحنی کی لمبائی

ہم منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائی کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر اس منحنی کی درج ذیل مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta\sin\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta \tag{10.48}$$

یوں مقدار معلوم لمبائی کے کلیہ (مساوات 10.32)

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 + \Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

میں x اور y کی قیمتیں مساوات 10.48 سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا (سوال 10.505)۔

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

لمبائی قوس

اگر $\alpha\le\theta\le\beta$ پر $r=f(\theta)$ کا پہلا استمراری تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α سے β کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ پوری منحنی $r=f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{10.49}$$

مثال 10.48: قلب نما $r=1-\cos\theta$ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل: ہم قلب نما کا خاکہ کھینچتے ہیں تا کہ تکمل کے حدود معلوم کر سکیں (شکل 10.149)۔ زاویہ θ کو 0 سے 2π کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ ٹھیک ایک بار پوری قلب نما پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha=0$ اور $\beta=2\pi$ ہوں گے۔ اب

$$r=1-\cos\theta,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\sin\theta$$

سے

$$\begin{aligned}r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2&=(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\\&=1-2\cos\theta+\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1}=2-2\cos\theta\end{aligned}$$

حاصل ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}L&=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta\qquad(1-\cos\theta=2\sin^2\tfrac{\theta}{2})\\&=\int_0^{2\pi}2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\qquad(0\le\theta\le2\pi \text{ کے لئے } \sin\tfrac{\theta}{2}\ge0 \text{ ہو گا})\\&=\Big[-4\cos\frac{\theta}{2}\Big]_0^{2\pi}=4+4=8\end{aligned}$$

□

شکل 10.149: قلب نما کی لمبائی (مثال 10.48)

شکل 10.150: قلب نما کی لمبائی (مثال 10.49)

سطح طواف کا رقبہ

سطح طواف کے رقبہ کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات 10.48 کی مدد سے منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی مقدار معلوم مساوات لکھ کر حصہ 10.5 میں دی گئی سطحی رقبے کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

سطح طواف کا رقبہ
اگر $\alpha \le \theta \le \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا استمراری پہلا تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α تا β کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی $r = f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کو محور x اور محور y کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کے رقبے درج ذیل کلیات دیں گے۔

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (10.50)$$

محور x کے گرد ($y \ge 0$)

$$S = \int_\alpha^\beta 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (10.51)$$

محور y کے گرد ($x \ge 0$)

مثال 10.49: گھونگا $r^2 = \cos 2\theta$ کے دائیں گھیر کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم اس گھیر کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد تلاش کرتے ہیں (شکل 10.150)۔ زاویہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی پر ٹھیک ایک بار گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ اور $\beta = \frac{\pi}{4}$ ہوں گے۔

ہم مساوات 10.50 کا تکمل مرحلوں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے مرحلہ میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = 2\pi \cos\theta \sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \qquad (10.52)$$

اس کے بعد $r^2 = \cos 2\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -2\sin 2\theta \\ r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin 2\theta \\ \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= \sin^2 2\theta \end{aligned}$$

آخر میں $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$ کی بنا مساوات 10.52 میں دائیں ہاتھ جذر درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

ان تمام نتائج کو مل کر ہم رقبہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r\cos\theta\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta && \text{مساوات } 10.50 \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\pi\cos\theta\cdot(1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= 2\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

سوالات

قطبی منحنیات کے اندر رقبہ

سوال 10.473 تا سوال 10.478 میں خطوں کے رقبے تلاش کریں۔

سوال 10.473: چپٹا گھونگا $r = 4 + 2\cos\theta$ کے اندر۔
جواب: 18π

سوال 10.474: قلب نما $r = a(1+\cos\theta),\ a > 0$ کے اندر۔

سوال 10.475: چار گل $r = \cos 2\theta$ کے ایک پتا کے اندر۔
جواب: $\frac{\pi}{8}$

سوال 10.476: دو چشمہ $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta,\ a > 0$ کے اندر۔

سوال 10.477: دو چشمہ $r^2 = 4 \sin 2\theta$ کے ایک گھیر کے اندر۔
جواب: 2

سوال 10.478: شش گل $r^2 = 2 \sin 3\theta$ کے اندر۔

مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ

سوال 10.479 تا سوال 10.488 میں مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 10.479: دائرہ $r = 2\cos\theta$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔
جواب: $\frac{\pi}{2} - 1$

سوال 10.480: دائرہ $r = 1,$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال 10.481: دائرہ $r = 2$ اور قلب نما $r = 2(1 - \cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔
جواب: $5\pi - 8$

سوال 10.482: قلب نما $r = 2(1 + \cos\theta)$ اور $r = 2(1 - \cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

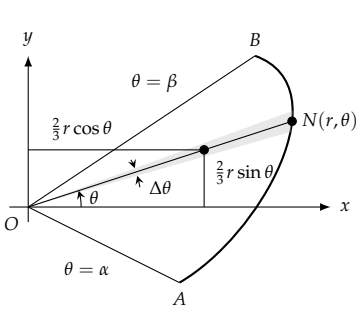
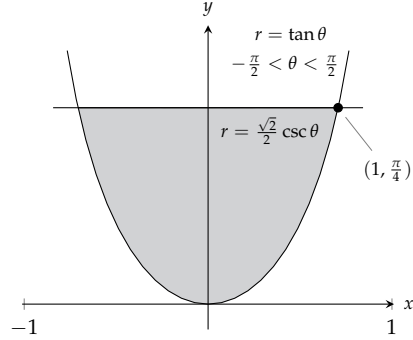
سوال 10.483: دائرہ $r = \sqrt{3}$ کے باہر اور $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر۔
جواب: $3\sqrt{3} - \pi$

سوال 10.484: دائرہ $r = 3a\cos\theta$ کے اندر اور قلب نما $r = a(1 + \cos\theta),\ a > 0$ کے باہر رقبہ۔

سوال 10.485: دائرہ $r = -2\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر رقبہ۔
جواب: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 10.486: (ا) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے بیرونی گھیر کا رقبہ (شکل 10.146)۔ (ب) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے اندرونی گھیر کے باہر اور بیرونی گھیر کے اندر رقبہ۔

سوال 10.487: دائرہ $r = 6$ کے اندر خط $r = 3\csc\theta$ سے اوپر رقبہ۔
جواب: $12\pi - 9\sqrt{3}$

سوال 10.488: گھونگا $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر اور خط $r = \frac{3}{2}\sec\theta$ کے دائیں جانب رقبہ۔

شکل 10.152: باریک سایہ دار خطے کے معیار اثر۔

شکل 10.151: خطہ سوال 10.489

سوال 10.489: (ا) سایہ دار خطہ شکل 10.151 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ (ب) ایسا معلوم ہوتا ہے کہ $r = \tan\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ لکیر $x = 1$ اور لکیر $x = -1$ کا متقاربی خط ہو سکتا ہے۔ کیا ایسا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

سوال 10.490: قلب نما $r = \cos\theta + 1$ کے اندر اور دائرہ $r = \cos\theta$ کے باہر خطہ درج ذیل نہیں ہے۔

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta]\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

ایسا کیوں ہے؟ اس کا رقبہ کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

قطبی منحنیات کی لمبائیاں

سوال 10.491 تا سوال 10.499 میں منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 10.491: پیچ دار منحنی $r = \theta^2, \quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$

جواب: $\frac{19}{3}$

سوال 10.492: پیچ دار منحنی $r = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

سوال 10.493: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$
جواب: 8

سوال 10.494: منحنی $r = a\sin^2\frac{\theta}{2},\ 0 \le \theta \le \pi,\ a > 0$

سوال 10.495: قطع مکافی $r = \frac{6}{1+\cos\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $3(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

سوال 10.496: قطع مکافی $r = \frac{2}{1-\cos\theta},\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

سوال 10.497: منحنی $r = \cos^3\frac{\theta}{3},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

سوال 10.498: منحنی $r = \sqrt{1+\sin 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$

سوال 10.499: منحنی $r = \sqrt{1+\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$
جواب: 2π

سوال 10.500: دائرے کا محیط
نیا کلیہ سیکھنے کے بعد بہتر ہوتا ہے کہ اس کو جانے پہچانے مسئلوں پر لاگو کیا جائے۔ قوس لمبائی کا کلیہ مساوات 10.49 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دائروں کے محیط کی لمبائیاں تلاش کریں۔

ا. $r = a$ ب. $r = a\cos\theta$ ج. $r = a\sin\theta$

سطحی رقبہ

سوال 10.501 تا سوال 10.504 میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال 10.501: محور y ، $r = \sqrt{\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\pi\sqrt{2}$

سوال 10.502: محور x ، $r = \sqrt{2}e^{\theta/2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

سوال 10.503: محور x ، $r^2 = \cos 2\theta$
جواب: $2\pi(2-\sqrt{2})$

سوال 10.504: محور y ، $r = 2a\cos\theta,\ a > 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال 10.505: منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کی لمبائی۔
فرض کریں کہ مطلوبہ تفرق استمراری ہیں۔ دکھائیں کہ مساوات 10.48 میں

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

پر کرنے سے

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

سوال 10.506: اوسط قیمت
استمراری f کی صورت میں منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کے قطبی محدد r کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$r_{\text{اوسط}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل میں θ کے لحاظ سے $r_{\text{اوسط}}$ معلوم کریں جہاں $a > 0$ ہے۔

ا. قلب نما $r = a(1 - \cos\theta)$

ب. دائرہ $r = a$

ج. دائرہ $r = a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

سوال 10.507: کیا $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کی لمبائیوں کے تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 10.508: منحنیات $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کیا ان سطح طواف کے رقبوں کی تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

پنکھا نما خطوں کے وسطانی مراکز

چونکہ مثلث کا وسطانی مرکز ہر ایک وسطانیہ پر، راس سے دو تہائی دور مخالف قاعدہ پر، واقع ہوتا ہے لہٰذا شکل 10.152 میں محور x کے لحاظ

سے باریک سایہ دور تکونی بیرم کا بازو تقریباً $\frac{2}{3}r\sin\theta$ ہو گا۔ اسی طرح محور y کے لحاظ سے اس باریک تکونی خطہ کا بازو $\frac{2}{3}r\cos\theta$ ہو گا۔ یہ تخمین $\Delta\theta\to 0$ سے بہتر ہو کر خطہ AOB کے وسطانیہ کے محدد کے لئے درج ذیل کلیات دیتی ہیں

$$\bar{x}=\frac{\int\frac{2}{3}r\cos\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\frac{2}{3}\int r^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$
$$\bar{y}=\frac{\int\frac{2}{3}r\sin\theta\cdot\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\frac{2}{3}\int r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

جہاں تمام تکمل کے حدود α اور β ہیں۔

سوال 10.509: قلب نما $r=a(1+\cos\theta)$ کے اندر خطہ کا وسطانیہ دریافت کریں۔
جواب: $(\frac{5}{6}a,0)$

سوال 10.510: نصف دائری خطہ $0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\pi$ کا وسطانیہ دریافت کریں۔

باب 11

سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیات اور سہ بعدی محددی نظام متعارف کئے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لئے محددی مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لئے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور xy مستوی سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

11.1 مستوی میں سمتیات

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لئے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لئے ہمیں مزید معلوم درکار ہو گی۔ قوت کو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہو گا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لئے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہو گا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہو گا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لئے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر دار لکیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور **سمتیات** کہتے ہیں۔

تعریف : ایک مستوی میں سمت بند خط کو **سمتیہ**[1] کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک جیسی ہوں اور ان کے رخ ایک جیسے ہوں۔

---

[1] vector

شکل 11.1: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔

شکل 11.2: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔

□

یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک جیسا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومن حروف تہجی، مثلاً $\boldsymbol{v}$ ، سے ظاہر کیا جائے گا[2]۔نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم $\vec{AB}$ لکھیں گے۔

مثال 11.1: چار تیروں کو شکل 11.1 میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک جیسی ہیں۔ یوں یہ چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{ON} = \vec{EF}$$

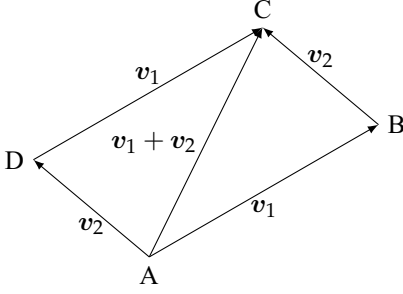
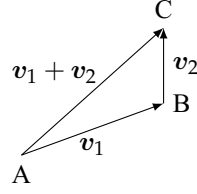
□

غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لئے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل 11.2)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کی لمبائی $50\,\%$ بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے ضرب دینے کے لئے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں $\boldsymbol{v}$ اور $c\boldsymbol{v}$ کے رخ ایک جیسے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ **غیر سمتی**[3] کہلاتے ہیں جبکہ $c\boldsymbol{v}$ کے مضرب کو $\boldsymbol{v}$ کا **غیر سمتی مضرب**[4] کہتے ہیں۔

صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے **صفر سمتیہ** $\mathbf{0}$ حاصل ہو گا، جو ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

[2] قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومن حروف تہجی پر تیر کا نشان $\vec{v}$ یا نصف تیر کا نشان $\overset{\rightharpoonup}{v}$ ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔)
[3] scalar
[4] scalar multiple

شکل 11.4: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی بنا $ABCD$ متوازی الاضلاع ہو گا۔

شکل 11.3: سمتیات v_1 اور v_2 کا مجموعہ۔

جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع

دو غیر صفر سمتیات v_1 اور v_2 کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر v_1 کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کر کے v_1 کے اختتامی نقطہ (سر) B پر v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل 11.3 میں $v_2 = \vec{BC}$ ہے۔ مجموعہ $v_1 + v_2$ اب v_1 کے دم A سے v_2 کے سر C تک سمتیہ ہو گا۔ یوں اگر

$$v_1 = \vec{AB}, \quad v_2 = \vec{BC}$$

ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

ہو گا۔ چونکہ اس عمل میں $v_1 + v_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہٰذا اس عمل کو بعض اوقات **قاعدہ متوازی الاضلاع**[5] کہتے ہیں (شکل 11.4)۔

اجزاء

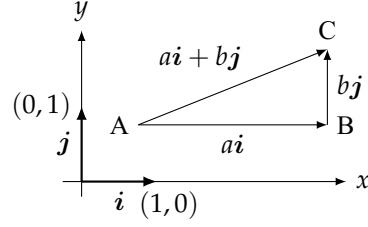
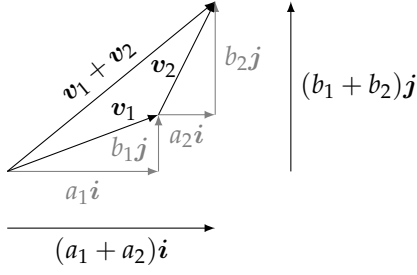
دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

جب بھی ایک سمتیہ v کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

$$v = v_1 + v_2$$

لکھنا ممکن ہو، سمتیات v_1 اور v_2 سمتیہ v کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ v کو اس کے اجزاء v_1 اور v_2 میں تحلیل کیا گیا ہے۔

---
[5] parallelogram law

شکل 11.5: اساس سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ $\vec{AC}$ کو لکھا جا سکتا ہے۔

شکل 11.6: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔

سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں **اساسی**[6] سمتیہ، جن کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت x محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{i}$ ہے۔ مثبت y محور کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{j}$ ہے۔ اب غیر سمتی a کے لئے محور x کے متوازی سمتیہ $a\boldsymbol{i}$ کی لمبائی $|a|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $a>0$ کے لئے دایاں اور $a<0$ کے لئے بایاں ہو گا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لئے محور y کے متوازی سمتیہ $b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی $|b|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $b>0$ کے لئے اوپر اور $b<0$ کے لئے نیچے ہو گا۔ شکل 11.5 میں سمتیہ $\boldsymbol{v}=\vec{AC}$ کو اجزاء $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$$

تعریف: اگر $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ ہو تب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء سمتیات $a\boldsymbol{i}$ اور $b\boldsymbol{j}$ ہوں گے۔ اعداد a اور b، اساسی سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

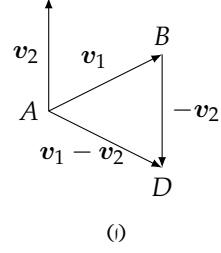
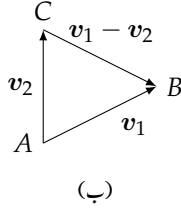
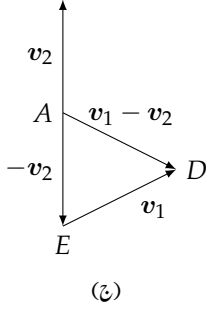
□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}=a'\boldsymbol{i}+b'\boldsymbol{j} \quad \Leftrightarrow \quad a=a', \quad b=b' \tag{11.1}$$

□

دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

[6] basic

شکل 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.6)۔

اگر $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (a_1 + a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 + b_2)\boldsymbol{j}$$

مثال 11.2:

$$(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) + (5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = (2+5)\boldsymbol{i} + (-4+3)\boldsymbol{j} = 7\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

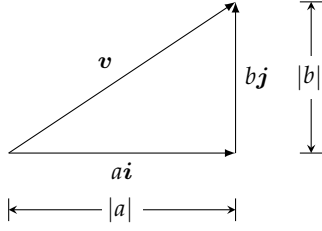
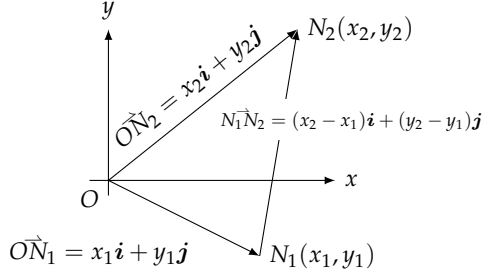
□

تفریق

ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا منفی سمتیہ $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ اس کی لمبائی $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ہو گی البتہ اس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا مخالف ہو گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}_2$ کو سمتیہ $\boldsymbol{v}_1$ سے منفی کرنے کی خاطر ہم $-\boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1$ کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم $\boldsymbol{v}_1$ کے سر سے $-\boldsymbol{v}_2$ کھینچ کر $\boldsymbol{v}_1$ کے دم سے $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر تک سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل 11.7-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \boldsymbol{v}_1 + (-\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

اس کے علاوہ $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کے دم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_2$ کے سر سے $\boldsymbol{v}_1$ کے سر تک سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ ہو گا۔ یہ عمل شکل 11.7-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

شکل 11.9: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

شکل 11.8

مزید، $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر سے $\boldsymbol{v}_1$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 11.7-ج)۔

درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (a_1 - a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 - b_2)\boldsymbol{j} \tag{11.2}$$

اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔

مثال 11.3:

$$(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) - (3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}) = (6 - 3)\boldsymbol{i} + (2 - (-5))\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

□

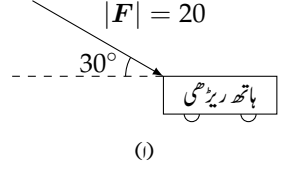
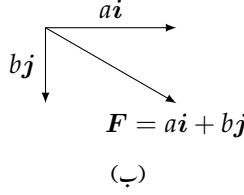
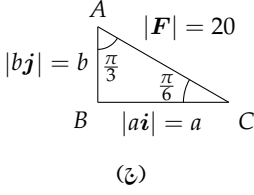
ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لئے $\overrightarrow{ON_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ کے اجزاء کو $\overrightarrow{ON_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔

$N_1(x_1, y_1)$ سے $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} \tag{11.3}$$

مثال 11.4: نقطہ $N_1(3, 4)$ سے نقطہ $N_2(5, 1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (5 - 3)\boldsymbol{i} + (1 - 4)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$

□

شکل 11.10: ہاتھ ریڑھی (مثال 11.5)

مقدار

سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی **لمبائی**[7] یا **مقدار**[8] $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل 11.9)۔ سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کی جاتی ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11.4}$$

مثال 11.5: آپ زمین کے ساتھ $30°$ زاویہ پر $20\,\mathrm{N}$ کی قوت $\boldsymbol{F}$ سے ہاتھ ریڑھی کو دکھا لگاتے ہیں (شکل 11.10-ا)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

حل: ہم قوت $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ اور اس کے اجزاء کے لئے مثلث بناتے ہیں (شکل 11.10-ب اور شکل 11.10-ج)۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ اور انتصابی جزو $-10\boldsymbol{j}$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{F} = 10\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$ ہو گا۔ انتصابی جزو کا رخ نیچے ہے لہٰذا یہ منفی ہے۔ □

غیر سمتی ضرب

غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = (ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j} \tag{11.5}$$

---

[7] length
[8] magnitude

سمتیہ $c\boldsymbol{v}$ کی لمبائی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ضرب $|c|$ ہو گا:

$$\begin{aligned}|c\boldsymbol{v}| &= \left|(ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j}\right| \\ &= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\ &= \sqrt{c^2(a^2+b^2)} \\ &= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2+b^2} \\ &= |c||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

یوں اگر c غیر سمتی ہو اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب $|c\boldsymbol{v}| = |c||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔

مثال 11.6: اگر $c = -2$ اور $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}| &= |-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ |-2\boldsymbol{v}| &= \left|(-2)(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\right| = |6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\boldsymbol{v}|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کو ظاہر کرنے کے لئے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہے۔

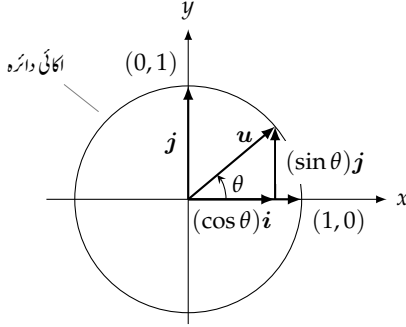
$$|a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}| = \sqrt{a^2+b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

اکائی سمتیات

کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو **اکائی سمتیہ**[9] کہلائے گا۔ سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اکائی سمتیات ہیں۔

$$|\boldsymbol{i}| = |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2+0^2} = 1, \quad |\boldsymbol{j}| = |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$$

---

[9] unit vector

شکل 11.11: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ جو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل 11.11)۔

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{11.6}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی للذا $\boldsymbol{u}$ بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے $\boldsymbol{u}$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا للذا $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔یوں ہم $\boldsymbol{v}$ کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

یوں اگر $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

ا. $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ کو $\boldsymbol{v}$ کو رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}| \left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال 11.7: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

حل:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \boldsymbol{v} \text{ کی لمبائی}$$

$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v} \text{ کا رخ}$$

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}} \underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{رخ}}$$

□

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطع اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کی ڈھلوان ان خطوط کی ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا (شکل 11.12)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب **مماسی**[10] یا **عمودی**[11] ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 11.8: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

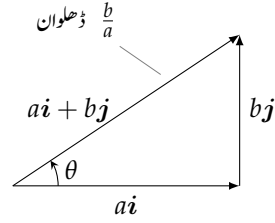
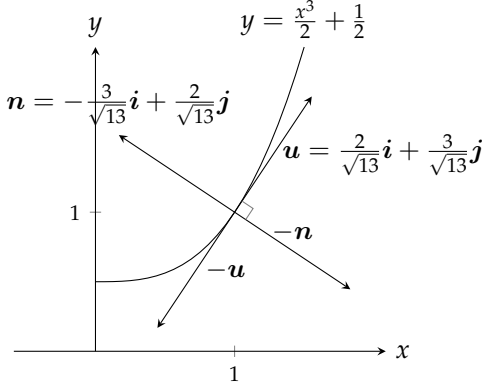
حل: ہم نقطہ $(1,0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل 11.13)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

---

tangent[10]
normal[11]

شکل 11.13: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال 11.8)

شکل 11.12: اگر $a \neq 0$ ہو تب سمتیہ $v = ai + bj$ کی ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گی۔

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $v = 2i + 3j$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کی ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ v کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لئے جس کی لمبائی 1 ہو ہم v کو

$$|v| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

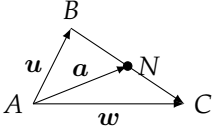
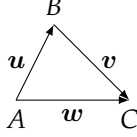
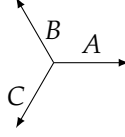
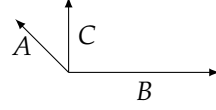
$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{13}}i + \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

سمتیہ u کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-u = -\frac{2}{\sqrt{13}}i - \frac{3}{\sqrt{13}}j$$

جو مخالف رخ ہے بھی $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جا سکتی ہے۔

نقطہ $(1,1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کی ڈھلوان u کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم u کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$n = -\frac{3}{\sqrt{13}}i + \frac{2}{\sqrt{13}}j, \qquad -n = \frac{3}{\sqrt{13}}i - \frac{2}{\sqrt{13}}j$$

شکل 11.17 شکل 11.16 شکل 11.15 شکل 11.14

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1,1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب

سوال 11.1: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ د. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

جوابات: شکل 11.18

سوال 11.2: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل 11.15 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $2\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$ د. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$

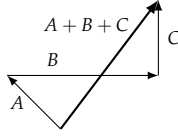
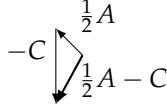
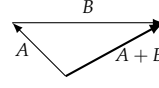
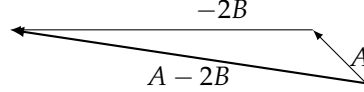
سوال 11.3 تا سوال 11.6 میں $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C}=\sqrt{3}\boldsymbol{i}-\pi\boldsymbol{j}$ لیں۔ نتائج کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 11.3: $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$
جواب: $4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

سوال 11.4: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

سوال 11.5: $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$
جواب: $(6-\frac{\sqrt{3}}{\pi})\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}$

سوال 11.6: $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+32\boldsymbol{j}$

سوال 11.7: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں (شکل 11.16)۔

شکل 11.18

ا. $\boldsymbol{w}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

جواب: (ا) $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (ب) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$

سوال 11.8: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل 11.17)۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

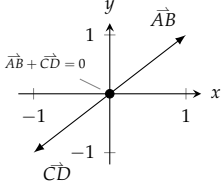
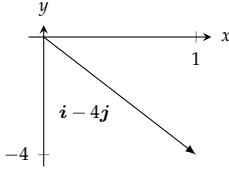
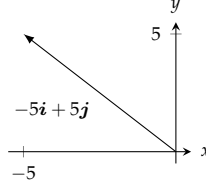
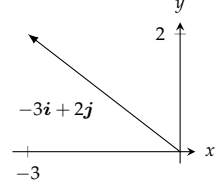
سوال 11.9 تا سوال 11.16 میں سمتیہ کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

سوال 11.9: نقاط $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.19

سوال 11.10: نقاط $N_1(1,2)$ اور $N_2(-3,5)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

سوال 11.11: نقاط $A(-5,3)$ اور $B(-10,8)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.20

سوال 11.12: نقاط $A(-7,-8)$ اور $B(6,11)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

سوال 11.13: نقاط $N_1(1,3)$ اور $N_2(2,-1)$ کے بیچ قطع $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.21

شکل 11.22 شکل 11.21 شکل 11.20 شکل 11.19

سوال 11.14: نقاط $N_3(1,3)$ اور N_4 کے بیچ قطع $\vec{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2,-1)$ اور $N_2(-4,3)$ کو ملانے والے قطع کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

سوال 11.15: نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ اور $D(-2,2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات $\vec{CD}$ اور $\vec{AB}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔
جواب: شکل 11.22

سوال 11.16: نقطہ A سے مبدا تک سمتیہ، جہاں $\vec{AB}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ اور $B(-2,5)$ ہیں۔

سوال 11.17: سمتیہ $\vec{AB}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $A(2,9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔
جواب: $(5,8)$

سوال 11.18: سمتیہ $\vec{NQ}=-6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $Q(3,3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

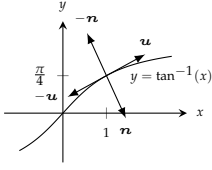
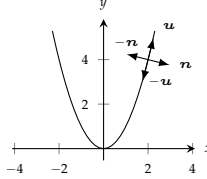
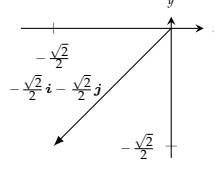
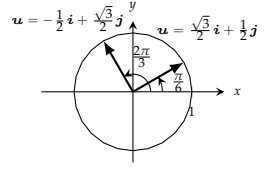
اکائی سمتیات

سوال 11.19 تا سوال 11.22 میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 11.19: زاویہ $\theta=\frac{\pi}{6}$ اور $\theta=\frac{2\pi}{3}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔
جواب: شکل 11.23

سوال 11.20: زاویہ $\theta=-\frac{\pi}{4}$ اور $\theta=-\frac{3\pi}{4}$ کے لئے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}=(\cos\theta)\boldsymbol{i}+(\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2+y^2=1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال 11.21: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔
جواب: شکل 11.24

سوال 11.22: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

شکل 11.26　　شکل 11.25　　شکل 11.24　　شکل 11.23

سوال 11.23 اور سوال 11.24 میں اکائی سمتیہ $u = (\cos\theta)i + (\sin\theta)j$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال 11.23: $6i - 8j$
جواب: $\frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$

سوال 11.24: $-i + 3j$

سوال 11.25 تا سوال 11.28 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال 11.25: $y = x^2, \quad (2,4)$
جواب: $u = \frac{1}{\sqrt{17}}i + \frac{4}{\sqrt{17}}j, \quad -u = -\frac{1}{\sqrt{17}}i - \frac{4}{\sqrt{17}}j,$
$n = \frac{4}{\sqrt{17}}i - \frac{1}{\sqrt{17}}j, \quad -n = -\frac{4}{\sqrt{17}}i + \frac{1}{\sqrt{17}}j$ شکل 11.25

سوال 11.26: $x^2 + 2y^2 = 6, \quad (2,1)$

سوال 11.27: $y = \tan^{-1} x, \quad (1, \frac{\pi}{4})$
جواب: $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j), \quad -u = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2i - j),$
$n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-i + 2j), \quad -n = \frac{1}{\sqrt{5}}(i - 2j),$ شکل 11.26

سوال 11.28: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0,1)$

سوال 11.29 تا سوال 11.32 میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال 11.29: $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad (1,0)$
جواب: $u = \pm\frac{1}{5}(-4i + 3j), \quad v = \pm\frac{1}{5}(3i + 4j)$

سوال 11.30: $x^2-6xy+8y^2-2x-1=0, \quad (1,1)$

سوال 11.31: $y=\int_0^x \sqrt{3+t^4}\,\mathrm{d}t, \quad (0,0)$
جواب: $\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}), \quad \boldsymbol{v}=\pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

سوال 11.32: $y=\int_e^x \ln(\ln t)\,\mathrm{d}t, \quad (e,0)$

لمبائی اور رخ

سوال 11.33 اور سوال 11.34 میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 11.33: $5\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$
جواب: $13(\frac{5}{13}\boldsymbol{i}+\frac{12}{13}\boldsymbol{j})$

سوال 11.34: $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$

سوال 11.35: سمتیہ $3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔
جواب: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}, \quad -\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

سوال 11.36: سمتیہ $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال 11.37: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$ ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

سوال 11.38: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 11.39: آپ ایک ریڑھی کو قوت $\boldsymbol{F}$ سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار $|\boldsymbol{F}|=10\,\mathrm{N}$ ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ $30°$ ہے۔ اس قوت کے x اور y اجزاء تلاش کریں۔
جواب: $5\sqrt{3}\boldsymbol{i}, \quad 5\boldsymbol{j}$

سوال 11.40: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ $45°$ زاویہ پر $5\,\mathrm{N}$ قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انتصابی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 11.41: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات α اور β کہ $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}$ ہو۔
جواب: $\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$

سوال 11.42: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ لکھیں جہاں $\boldsymbol{A}_1$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کے متوازی اور $\boldsymbol{A}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کے متوازی ہے۔ (سوال 11.41 دیکھیں۔)

سوال 11.43: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف $60°$ پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لئے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھمبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھمبے کا مقام تلاش کریں۔
جواب: (ا) $(5\cos 60°, 5\sin 60°) = (\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ ،
(ب) $(5\cos 60 + 10\cos 315, 5\sin 60° + 10\sin 315°) = (\frac{5+\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$

سوال 11.44: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے $30°$ زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھمبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت x محور پر مشرق اور مثبت y محور پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھمبے کا مقام تلاش کریں۔

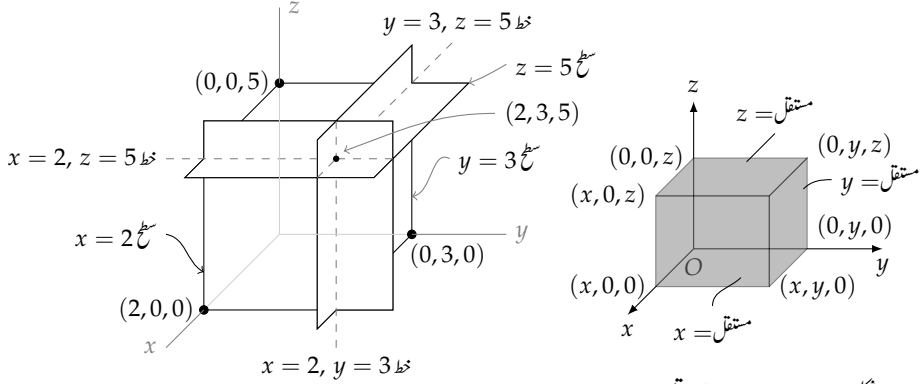
سوال 11.45: مستوی میں $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہے جو y محور کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان اور سمتیہ $-\boldsymbol{v}$ کی ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: $-\boldsymbol{v} = -a\boldsymbol{i} - b\boldsymbol{j}$ کی ڈھلوان $\frac{(-b)}{(-a)}$ ہے۔ یہی $\boldsymbol{v}$ کی بھی ڈھلوان ہے۔

11.2 کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات

ہم اب سہ بعدی کارتیسی محدد بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدد بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کا مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔

کارتیسی محدد

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لئے تین آپس میں عمودی محددی محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل 11.27 میں محور Ox ، Oy اور Oz دایاں ہاتھ محددی نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت x محور پر رکھ کر انہیں مثبت y محور کی جانب موڑیں تب آپ کا انگوٹھا مثبت z محور پر ہو گا۔

فضا میں نقطہ N سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد (x, y, z) پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ N کے کارتیسی محدد ہوں گے۔

شکل 11.27: دایاں ہاتھ کارتیسی نظام۔

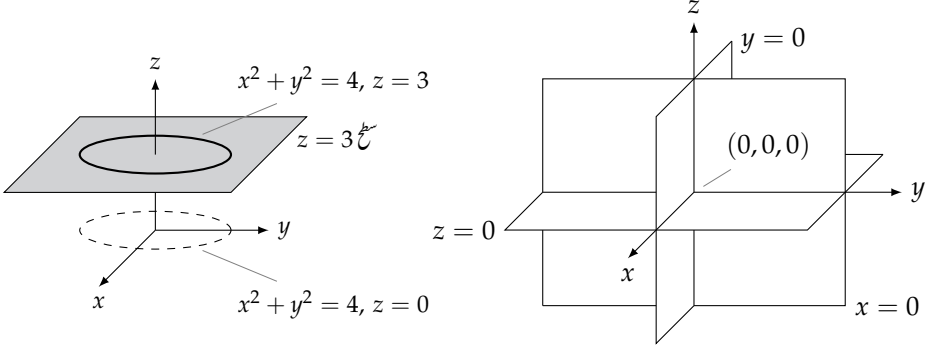
شکل 11.28: سطح $x=2$ ، $y=3$ اور $z=5$ نقطہ $(2,3,5)$ سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔

محور x پر نقطوں کے y اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محدد کی صورت $(x,0,0)$ ہو گی۔ اسی طرح محور y پر نقطوں کے x اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان نقطوں کے محدد کی صورت $(0,y,0)$ ہو گی۔ محور z پر نقطوں کے x اور y محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محددی کی صورت $(0,0,z)$ ہو گی۔

محور x کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا x محدد وہی ہو گا جس x محدد پر یہ سطح x محور کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے y اور z محدد کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور y کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک y محدد ہو گا اور محور z کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک z محدد ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدد کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی $x=2$ محور x کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور x کو نقطہ $x=2$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $y=3$ محور y کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ $y=3$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $z=5$ محور z کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ $z=5$ پر قطع کرتا ہے۔ شکل 11.28 میں مستوی $x=2$ ، $y=3$ اور $z=5$ دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

مستوی $x=2$ اور $y=3$ ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل 11.28) جو محور z کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $y=3$ ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ (x,y,z) صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب $x=2$ اور $y=3$ ہوں۔ اسی طرح مستوی $y=3$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $y=3$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور x کے متوازی ہو گی۔ مستوی $x=2$ اور $z=5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $x=2$ ، $z=5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور y کے متوازی ہو گی۔

محددی محوروں کے بیچ **مستوی** xy [12] جس کی معیاری مساوات $z=0$ ؛ **مستوی** yz جس کی معیاری مساوات $x=0$ ؛ اور

xy-plane[12]

شکل 11.29: سطح $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ ثمن میں تقسیم کرتے ہیں۔

شکل 11.30: بلند دائرہ (مثال 11.10)

مستوی xz جس کی معیاری مساوات $y = 0$ ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا $(0, 0, 0)$ پر آپس میں ملتے ہیں (شکل 11.29)۔

تین **محددی مستوی**[13] $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں **ثمن**[14] کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام محدد مثبت ہیں **پہلا ثمن**[15] کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

چونکہ فضا کے کارتیسی محدد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہٰذا ان محدد کو **مستطیل محدد**[16] بھی کہتے ہیں۔

درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پلہ نقطے تلاش کرتے ہیں۔

مثال 11.9:

---

[13] coordinate planes
[14] octant
[15] first octant
[16] rectangular coordinates

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$z \geq 0$	xy مستوی میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔
$x = -3$	مستوی x کو نقطہ $x = -3$ پر عمودی سطح۔ یہ سطح yz مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں اس کے پیچھے ہے۔
$z = 0,\ x \leq 0,\ y \geq 0$	مستوی xy کا ربع دوم۔
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$	پہلا ثمن۔
$-1 \leq y \leq 1$	سطح $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
$y = -2,\ z = 2$	وہ خط جس میں سطح $y = -2$ اور سطح $z = 2$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو نقطہ $(0, -2, 2)$ سے گزرتا ہے اور محور x کے متوازی ہے۔

□

مثال 11.10: کون سے نقاط $N(x, y, z)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

حل: یہ نقطے افقی سطح $z = 3$ میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح $z = 3$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ " یا مختصراً "دائرہ $x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$ " کہتے ہیں (شکل 11.30)۔ □

فضا میں سمتیات

سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاو، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

مبدا سے نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ تک سمت بند خطوط **اساسی سمتیات** ہیں (شکل 11.31) جنہیں بالترتیب $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدا O سے عمومی نقطہ $N(x, y, z)$ تک **تعین گر سمتیہ**[17] $\boldsymbol{r}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r} = \vec{ON} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{11.7}$$

تعریف: **فضا میں سمتیات کا مجموعہ اور تفریق**

کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\boldsymbol{k}$$

---

[17] position vector

شکل 11.31: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔

شکل 11.32: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔

□

دو نقاط کے بیچ سمتیہ

ہم نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ $N_1\vec{N}_2$ کو

$$\begin{aligned}
N_1\vec{N}_2 &= O\vec{N}_1 - O\vec{N}_2 \\
&= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\
&= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

لکھ سکتے ہیں جو N_1 اور N_2 کے محدد کی صورت میں ہے (شکل 11.32)۔

یوں نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

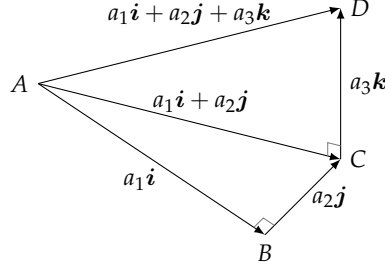
$$N_1\vec{N}_2 == (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{11.8}$$

مقدار

جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے شکل 11.33 میں سمتیہ $a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$\left|\vec{AC}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

ہو گا لہٰذا مثلث ACD سے

$$|a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}| = \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{\left|\vec{AC}\right|^2 + \left|\vec{CD}\right|^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

شکل 11.33: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے $\vec{AD}$ کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

ہو گا۔

یوں $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہو گی۔

$$|\boldsymbol{A}|=|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{11.9}$$

غیر سمتی ضرب

تعریف: اگر c غیر سمتی اور $\boldsymbol{A}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$c\boldsymbol{A}=(ca_1)\boldsymbol{i}+(ca_2)\boldsymbol{j}+(ca_3)\boldsymbol{k}$$

□

مثال 11.11: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(3)^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$$

□

اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3$ کو غیر سمتی c سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا، $c\boldsymbol{A}$ کی لمبائی $|c|$ ضرب $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ہو گی:

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{A}&=ca_1\boldsymbol{i}+ca_2\boldsymbol{j}+ca_3\boldsymbol{k}\\ |c\boldsymbol{A}|&=\sqrt{(ca_1)^2+(ca_2)^2+(ca_3)^2}=\sqrt{c^2a_1^2+c^2a_2^2+c^2a_3^2}\\ &=|c|\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=|c||\boldsymbol{A}| \end{aligned} \tag{11.10}$$

مثال 11.12: سمتیہ $\boldsymbol{A}$ مثال 11.11 میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

کی لمبائی درج ذیل ہو گی:

$$\begin{aligned}\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56}\\ &= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|\boldsymbol{A}|\end{aligned}$$

□

صفر سمتیہ

فضا میں **صفر سمتیہ** سے مراد سمتیہ $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$ ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں $\boldsymbol{0}$ کی لمبائی صفر ہو گی اور اس کا کوئی رخ نہیں ہو گا۔

اکائی سمتیات

فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہو گی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی بنا اکائی سمتیات ہیں۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{i}| &= |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1\\ |\boldsymbol{j}| &= |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1\\ |\boldsymbol{k}| &= |0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1\end{aligned}$$

مقدار اور رخ

اگر $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو $\boldsymbol{A}$ کا رخ ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{11.11}$$

مثال 11.13: سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

حل:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} && \text{مساوات 11.11} \\ &= \sqrt{14} \cdot \frac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}} && \text{مثال 11.11} \\ &= \sqrt{14}\Big(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}\Big) = (\boldsymbol{A} \text{ لمبائی}) \cdot (\boldsymbol{A} \text{ رخ}) \end{aligned}$$

□

مثال 11.14: نقطہ $N_1(1,0,1)$ سے نقطہ $N_2(3,2,0)$ تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کریں۔

حل: ہم $\overrightarrow{N_1N_2}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے $\boldsymbol{u}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_1N_2} &= (3-1)\boldsymbol{i} + (2-0)\boldsymbol{j} + (0-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ \left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\ \boldsymbol{u} &= \frac{\overrightarrow{N_1N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2aj - \boldsymbol{k}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

□

مثال 11.15: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 6 ہو۔

حل: ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$6\,\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{3} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

□

فضا میں فاصلہ

فضا میں نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ، سمتیہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ کی لمبائی $\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|$ ہو گی۔

نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{11.12}$$

مثال 11.16: نقاط $N_1(2,1,5)$ اور $N_2(-2,3,0)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2+(0-5)^2}\\ &= \sqrt{16+4+25}\\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

□

11.2.1 کرہ

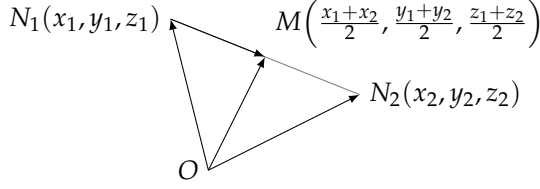
ہم مساوات 11.12 استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز $N_0(x_0, y_0, z_0)$ اور رداس a ہو۔ نقطہ $N(x, y, z)$ اس صورت اس کرہ پر پایا جائے گا جب $\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right| = a$ ہو یعنی:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2$$

ایک کرہ جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) اور رداس a ہو کی معیاری مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = a^2 \tag{11.13}$$

مثال 11.17: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2+y^2+z^2+3x-4z+1=0$$

شکل 11.34: نقاط N_1 اور N_2 کے محدد کی اوسط قطع N_1N_2 کے وسطی نقطہ کے محدد ہوں گے۔

حل: ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی x ، y اور z کے مربع مکمل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2+z^2+3x-4z+1 &= 0 \\
(x^2+3x\quad)+y^2+(z^2-4z\quad) &= -1 \\
\left(x^2+3x+(\tfrac{3}{2})^2\right)+y^2+\left(z^2-4z+(-\tfrac{4}{2})^2\right) &= -1+(\tfrac{3}{2})^2+(-\tfrac{4}{2})^2 \\
(x+\tfrac{3}{2})^2+y^2+(z-2)^2 &= -1+\tfrac{9}{4}+4=\tfrac{21}{4}
\end{aligned}
$$

یہ مساوات 11.13 ہے لہٰذا $x_0=-\frac{3}{2}$ ، $y_0=0$ ، $z_0=2$ اور $a=\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہیں۔ یوں مرکز $(-\frac{3}{2}, 0, 2)$ اور رداس $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہو گا۔ □

مثال 11.18:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$x^2+y^2+z^2<4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا اندرون۔
$x^2+y^2+z^2\leq 4$	سطح $x^2+y^2+z^2=4$ اور اس کے اندرون پر مشتمل ٹھوس کرہ یا کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ میں محدود گیند۔
$x^2+y^2+z^2>4$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا بیرون۔
$x^2+y^2+z^2=4,\ z\leq 0$	کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کا نچلا نصف حصہ۔

□

وسطی نقاط

کسی بھی قطع کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل 11.34)۔

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{ON_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{ON_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON_2} - \overrightarrow{ON_1}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{ON_2}) \\ &= \frac{x_1+x_2}{2}\boldsymbol{i} + \frac{y_1+y_2}{2}\boldsymbol{j} + \frac{z_1+z_2}{2}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

مثال 11.19: نقطہ $N_1(3,-2,0)$ اور $N_2(7,4,4,)$ کو ملانے والی قطع کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5,1,2)$$

□

سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات

سوال 11.46 تا سوال 11.57 میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریائی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 11.46: $x = 2, \quad y = 3$
جواب: محور z کے متوازی نقطہ $(2,3,0)$ سے گزرتا ہوا خط۔

سوال 11.47: $x = -1, \quad z = 0$

سوال 11.48: $y = 0, \quad z = 0$
جواب: محور x

سوال 11.49: $x = 1, \quad y = 0$

سوال 11.50: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 4$

سوال 11.51: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$

سوال 11.52: $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$
جواب: مستوی xz میں دائرہ $x^2 + z^2 = 4$

سوال 11.53: $y^2+z^2=1, \quad x=0$

سوال 11.54: $x^2+y^2+z^2=1, \quad x=0$
جواب: مستوی yz میں دائرہ $y^2+z^2=1$

سوال 11.55: $x^2+y^2+z^2=25, \quad y=-4$

سوال 11.56: $x^2+y^2+(z+3)^2=25, \quad z=0$
جواب: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=16$

سوال 11.57: $x^2+(y-1)^2+z^2=4, \quad y=0$

سوال 11.58 تا سوال 11.63 میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 11.58: (ا) $x\geq 0, \quad y\geq 0, \quad z=0$ (ب) $x\geq 0, \quad y\leq 0, \quad z=0$
جواب: (ا) مستوی xy کا ربع اول۔ (ب) مستوی xy کا ربع چہارم۔

سوال 11.59:

ا. $0\leq x\leq 1$

ب. $0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq 1$

ج. $0\leq x\leq 1, \quad 0\leq y\leq 1, \quad 0\leq z\leq 1$

سوال 11.60:

ا. $x^2+y^2+z^2\leq 1$

ب. $x^2+y^2+z^2>1$

جواب: (ا) رداس 1 کا گیند جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) مبدا سے 1 اکائی سے زیادہ دور تمام نقاط۔

سوال 11.61: (ا) $x^2+y^2 \le 1,\ z=0$ (ب) $x^2+y^2 \le 1,\ z=3$ (ج) $x^2+y^2 \le 1,$ جہاں z پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال 11.62: (ا) $x^2+y^2+z^2=1,\ z \ge 0$ (ب) $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0$
جواب: (ا) رداس 1 کا نصف بالائی کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ب) رداس 1 کا نصف بالائی ٹھوس کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

سوال 11.63: (ا) $x=y,\ z=0$ (ب) $x=y,$ جہاں z پر کوئی شور لاگو نہیں ہے۔

سوال 11.64 تا سوال 11.73 میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال 11.64: وہ مستوی جو (ا) نقطہ $(3,0,0)$ پر محور x، (ب) نقطہ $(0,-1,0)$ پر محور y، (ج) نقطہ $(0,0,-2)$ پر محور z کو عمودی ہے۔
جواب: (ا) $x=3$، (ب) $y=-1$، (ج) $z=-2$

سوال 11.65: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,2)$ پر (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کو عمودی ہے۔

سوال 11.66: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,1)$ پر (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی ہے۔
جواب: (ا) $z=1$، (ب) $x=3$، (ج) $y=-1$

سوال 11.67: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz میں پایا جاتا ہو۔

سوال 11.68: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,2,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی $y=2$ میں پایا جاتا ہو۔
جواب: (ا) $x^2+(y-2)^2=4,\ z=0$، (ب) $(y-2)^2+z^2=4,\ x=0$، (ج) $x^2+z^2=4,\ y=2$

سوال 11.69: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(-3,4,1)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی سطح میں پایا جاتا ہو۔

سوال 11.70: نقطہ $(1,3,-1)$ سے گزرتا خط جو (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کے متوازی ہو۔
جواب: (ا) $y=3,\ z=-1$، (ب) $x=1,\ z=-1$، (ج) $x=1,\ y=3$

سوال 11.71: فضا میں وہ نقطے معلوم کریں جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ $(0,2,0)$ سے یکساں ہو۔

سوال 11.72: وہ دائرہ معلوم کریں جس میں نقطہ $(1,1,3)$ سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور z کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جا ملتا ہو جس کا رداس 5 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو۔
جواب: $x^2+y^2+z^2=25,\ z=3$

سوال 11.73: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ $(0,0,1)$ سے 2 اور $(0,0,-1)$ سے 2 ہو۔

سوال 11.74 تا سوال 11.79 میں دیے سلسلہ کی عدم مساوات پیش کریں۔

سوال 11.74: سطح $z=0$ اور $z=1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
جواب: $0\le z\le 1$

سوال 11.75: پہلے ثمن میں محددی سطحوں اور سطحوں $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ میں محدود ٹھوس مکعب۔

سوال 11.76: نصف فضا جو مستوی xy اور اس کے نیچے نقطوں پر مشتمل ہے۔
جواب: $z\le 0$

سوال 11.77: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو کا بالائی نصف حصہ۔

سوال 11.78: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز $(1,1,1)$ ہو کا (ا) اندرون، (ب) بیرون۔
جواب: (ا) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$ ،
(ب) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

سوال 11.79: رداس 1 اور 2 کے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں میں بند خطہ۔ (بند خطہ سے مراد ہے کہ کرہ کی سطحیں بھی اس خطہ میں شامل ہوں گی۔ کروی سطحوں کو شامل نہ کرنے کے لئے ہم آزاد خطے کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔)

لمبائی اور رخ

سوال 11.80 تا سوال 11.89 میں دیے سمتیہ کو اس کی لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال 11.80: $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$
جواب: $3(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

سوال 11.81: $3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 11.82: $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$
جواب: $9(\frac{1}{9}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}\boldsymbol{j}-\frac{8}{9}\boldsymbol{k})$

سوال 11.83: $9\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$

سوال 11.84: $5\boldsymbol{k}$
جواب: $5(\boldsymbol{k})$

سوال 11.85: $-4\boldsymbol{j}$

سوال 11.86: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
جواب: $1(\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k})$

سوال 11.87: $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$

سوال 11.88: $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$
جواب: $\sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$

سوال 11.89: $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$

سوال 11.90: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	2	$\boldsymbol{i}$
(ب)	$\sqrt{3}$	$-\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\boldsymbol{j}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(د)	7	$\frac{6}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{3}{7}\boldsymbol{k}$

جواب: (ا) $2\boldsymbol{i}$ ، (ب) $-\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ ، (ج) $\frac{3}{10}\boldsymbol{j}+\frac{2}{5}\boldsymbol{k}$ ، (د) $6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

سوال 11.91: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	7	$-\boldsymbol{j}$
(ب)	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\boldsymbol{i}-\frac{4}{13}\boldsymbol{j}-\frac{12}{13}\boldsymbol{k}$
(د)	$a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

سوال 11.92: سمتیہ $\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔
جواب: $\frac{7}{13}(12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k})$

سوال 11.93: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی $\sqrt{5}$ ہو۔

سوال 11.94: سمتیہ $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 5 ہو۔
جواب: $-\frac{10}{7}\boldsymbol{i}+\frac{15}{7}\boldsymbol{j}-\frac{30}{7}\boldsymbol{k}$

سوال 11.95: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 3 ہو۔

سمتیات کا تعین بذریعہ نقاط، وسطی نقاط اور فاصلہ

سوال 11.96 تا سوال 11.101 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ،

ب. رخ $\overrightarrow{N_1N_2}$ ،

ج. قطع N_1N_2 کا وسطی نقطہ۔

سوال 11.96: $N_1(1,1,1),\quad N_2(3,3,0)$
جواب: (ا) 3 ، (ب) $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(2,2,\frac{1}{2})$

سوال 11.97: $N_1(-1,1,5),\quad N_2(2,5,0)$

سوال 11.98: $N_1(1,4,5),\quad N_2(4,-2,7)$
جواب: (ا) 7 ، (ب) $\frac{3}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(\frac{5}{2},1,6)$

سوال 11.99: $N_1(3,4,5),\quad N_2(2,3,4)$

سوال 11.100: $N_1(0,0,0), \quad N_2(2,-2,-2)$
جواب: (ا) $2\sqrt{3}$ ، (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(1,-1,-1)$

سوال 11.101: $N_1(5,3,-2), \quad N_2(0,0,0)$

سوال 11.102: اگر $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ اور B نقطہ $(5,1,3)$ ہو تب نقطہ A تلاش کریں۔
جواب: $A(4,-3,5)$

سوال 11.103: اگر $\overrightarrow{AB} = -7\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$ اور A نقطہ $(-2,-3,6)$ ہو تب نقطہ B تلاش کریں۔

کرہ

سوال 11.104 تا سوال 11.107 میں کرہ کے رداس اور مراکز تلاش کریں۔

سوال 11.104: $(x+2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$
جواب: $C(-2,0,2), \quad a = 2\sqrt{2}$

سوال 11.105: $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 + (z+\frac{1}{2})^2 = \frac{21}{4}$

سوال 11.106: $(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 2$
جواب: $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}), \quad a = \sqrt{2}$

سوال 11.107: $x^2 + (y+\frac{1}{3})^2 + (z-\frac{1}{3})^2 = \frac{29}{9}$

سوال 11.108 تا سوال 11.111 میں کرہ کے رداس اور مراکز دیے گئے ہیں۔ ان کرہ کی مساوات حاصل کریں۔

سوال 11.108: رداس $\sqrt{14}$ ، مرکز $(1,2,3)$
جواب: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

سوال 11.109: رداس 2 ، مرکز $(0,-1,5)$

سوال 11.110: رداس $\sqrt{3}$ ، مرکز $(-2,0,0)$
جواب: $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 3$

سوال 11.111: رداس 7 ، مرکز $(0,-7,0)$

سوال 11.112 تا سوال 11.115 میں دیے کرہ کے رداس اور مراکز دریافت کریں۔

سوال 11.112: $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$

جواب: $C(-2,0,2), \quad a=\sqrt{8}$

سوال 11.113: $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

سوال 11.114: $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$

جواب: $C(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}), \quad a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

سوال 11.115: $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

سوال 11.116: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) محور z تک فاصلہ تلاش کریں۔

جواب: (ا) $\sqrt{y^2+z^2}$ ، (ب) $\sqrt{x^2+z^2}$ ، (ج) $\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 11.117: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) سطح xy ، (ب) سطح yz ، (ج) سطح xz تک فاصلہ تلاش کریں۔

سمتیات اور جیومیٹری

سوال 11.118: نقاط $A(4,2,0)$ ، $B(1,3,0)$ اور $C(1,1,3)$ یکساں کثافت کے باریک مثلث کے راس ہیں۔

ا. نقطہ C سے AB کے وسطی نقطہ M تک سمتیہ تلاش کریں۔

ب. نقطہ C سے وسطانیہ CM پر C سے $\frac{2}{3}$ فاصلہ تک سمتیہ تلاش کریں۔

ج. مثلث ABC کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع کے محدد تلاش کریں۔

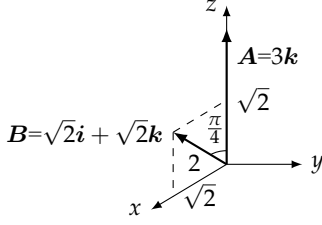
جواب: (ا) $\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ ، (ب) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، (ج) $(2,2,1)$

سوال 11.119: ایک مثلث جس کے راس $A(1,-1,2)$ ، $B(2,1,3)$ اور $C(-1,2,-1)$ ہیں کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع تک مبدا سے سمتیہ تلاش کریں۔

سوال 11.120: فضا میں چار الاضلاع کے راس A ، B ، C اور D ہیں۔ یہ چار الاضلاع ضروری نہیں کہ مستوی ہو۔ دکھائیں کہ مخالف اضلاع کے وسطانی نقطوں کو جوڑنے والے قطعات ایک دوسرے کو نصف میں قطع کرتے ہیں۔ (اشارہ: دکھائیں کہ ان قطعات کے وسطی نقاط یکساں ہیں۔)

سوال 11.121: منتظم n کثیر الاضلاع کے مرکز سے اس کے راس تک سمتیات بنائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان سمتیات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ (اشارہ: کثیر الاضلاع کو اپنے مرکز کے گرد گھمانے سے اس مجموعہ پر کیا اثر ہو گا؟)

سوال 11.122: فرض کریں ایک مثلث کے راس A ، B اور C ہیں جبکہ مطابقتی مخالف اضلاع کے وسطی نقاط a ، b اور c ہیں۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{Aa}+\overrightarrow{Bb}+\overrightarrow{Cc}=0$ ہو گا۔

شکل 11.36: سمتیات برائے مثال 11.20

شکل 11.35: سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ۔

11.3 ضرب نقطہ

ہم اب ضرب نقطہ پر غور کرتے ہیں جو سمتیات کو آپس میں ضرب دینے کے دو طریقوں میں سے ایک ہے۔ چونکہ ضرب نقطہ کا نتیجہ غیر سمتی ہوتا ہے لہٰذا ضرب نقطہ کو **غیر سمتی ضرب**[18] بھی کہتے ہیں۔

ضرب نقطہ

جب دو غیر صفر سمتیات A اور B کے ابتدائی نقاط کو ایک ہی نقطہ پر رکھا جائے تب ان سمتیات کے بیچ زاویہ $0 \leq \theta \leq \pi$ پایا جاتا ہے۔ یہ زاویہ A اور B کے بیچ زاویہ کہلاتا ہے۔

تعریف: سمتیات A اور B کے غیر سمتی ضرب (ضرب نقطہ) سے مراد درج ذیل عدد ہے

$$A \cdot B = |A||B| \cos\theta \tag{11.14}$$

جہاں θ سمتیات A اور B کے بیچ زاویہ ہے (شکل 11.35)۔

□

الفاظ میں، $A \cdot B$ سے مراد A کی لمبائی ضرب B کی لمبائی ضرب اس زاویہ کا کوسائن جو ان سمتیات کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سمتیات A اور B کے ضرب نقطہ کو A اور B کے بیچ نقطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی $A \cdot B$ جس کی بنا یہ ضرب نقطہ کہلاتا ہے۔

مثال 11.20: سمتیات $A = 3k$ اور $B = \sqrt{2}i + \sqrt{2}k$ کے ضرب نقطہ درج ذیل ہو گا (شکل 11.36)۔

$$A \cdot A = |A||B| \cos\theta = (3)(2) \cos\frac{\pi}{4} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

---

[18] scalar product

□

چونکہ غیر سمتی ضرب کی علامت $\cos\theta$ پر منحصر ہے لہٰذا غیر سمتی ضرب کا نتیجہ زاویہ حادہ کی صورت میں مثبت، زاویہ منفرجہ کی صورت میں منفی (اور زاویہ قائمہ کی صورت میں صفر ہو گا)۔

چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے اور $\cos 0 = 1$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0 = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\,(1) = |\boldsymbol{A}|^2$$

یعنی

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{11.15}$$

ہو گا۔

11.3.1 حساب

کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کا حساب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء سے حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

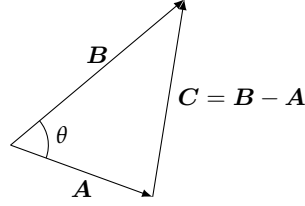
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\\
&\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},\\
&\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (b_1 - a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 - a_2)\boldsymbol{j} + (b_3 - a_3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں کے لئے قاعدہ کوسائن درج ذیل ہو گا (شکل 11.37)۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{C}|^2 &= |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\\
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta &= \frac{|\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - |\boldsymbol{C}|^2}{2}
\end{aligned}$$

اس مساوات کا بایاں ہاتھ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ ہم $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے اجزاء کا مربع لے کر مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت حاصل کرتے ہیں (مساوات 11.9)۔ یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{11.16}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا دو سمتیات کا غیر سمتی ضرب لینے کی خاطر ہم اس کے مطابقتی $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور a اجزاء کو ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

شکل 11.37: ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ ہوں پر قاعدہ کوسائن کے اطلاق سے مساوات 11.16 حاصل ہو گا۔

مساوات 11.14 کو θ کے لئے حل کر کے ان سمتیات کے بیچ زاویہ حاصل ہو گا۔

$$\theta=\cos^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\Big) \qquad \text{سمتیات کے بیچ زاویہ} \tag{11.17}$$

چونکہ الٹ کوسائن کی قیمت $[0,\pi]$ میں پائی جاتی ہے لہٰذا مساوات 11.17 خود بخود $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ دیتی ہے۔

مثال 11.21: سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 11.17 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=(1)(6)+(-2)(3)+(-2)(2)=6-6-4=-4\\
|\boldsymbol{A}|&=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3\\
|\boldsymbol{B}|&=\sqrt{(6)^2+(3)^2+(2)^2}=\sqrt{49}=7\\
\theta&=\cos^{-1}\Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\Big)\\
&=\cos^{-1}\Big(\frac{-4}{(3)(7)}\Big)=\cos^{-1}\Big(-\frac{4}{21}\Big)\approx 1.76\ \text{ریڈیئن}
\end{aligned}$$

□

قواعد ضرب نقطہ

ہم ضرب نقطہ کی مساوات $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1b_1+a_2b_2+c_1c_2$ سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{11.18}$$

دوسرے لفظوں میں، ضرب نقطہ **قابل تبادل**[19] ہے۔ ہم مساوات 11.16 سے یہ بھی دیکھتے ہیں کہ مستقل (یا غیر سمتی) عدد c کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$(c\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{11.19}$$

اگر $\boldsymbol{C} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ کوئی تیسرا سمتیہ ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
&= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\
&= \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

اس طرح ضرب نقطہ قانون تقسیم (درج ذیل) کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} \tag{11.20}$$

اس کو مساوات 11.18 کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} \tag{11.21}$$

مساوات 11.20 اور مساوات 11.21 ہمیں سمتیات کے مجموعوں کو، الجبرا کے قواعد کے مطابق، آپس میں ضرب دینے کی اجازت دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D} \tag{11.22}$$

عمودی سمتیات

دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ تب **عمودی**[20] ہوں گے جب ان کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو۔ یوں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی بنا عمودی سمتیات کے لئے $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر صفر سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = 0$ ہو تب $\cos\theta = 0$ یعنی $\theta = \cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$ ہو گا۔

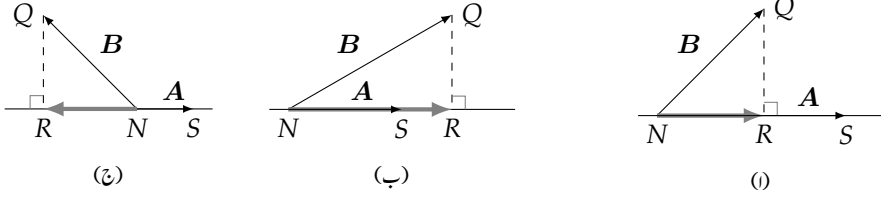
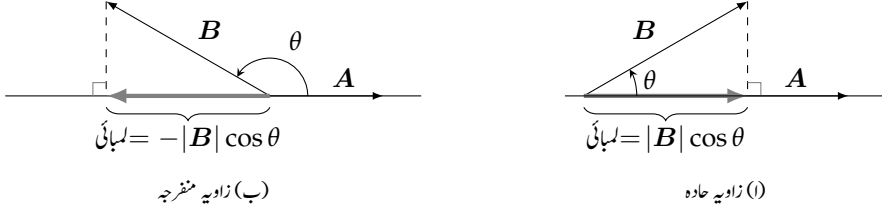
دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ صرف اور صرف اس صورت عمودی ہوں گے جب $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہو۔

مثال 11.22: سمتیات $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ درج ذیل کی بنا عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$$

□

---

[19] commutative
[20] orthogonal

شکل 11.38: $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر سمتی تظلیل

شکل 11.39: $\boldsymbol{A}$ پر $\boldsymbol{B}$ کے تظلیل کی لمبائی

تظلیل سمتیہ

سمتیہ $\boldsymbol{B} = \overrightarrow{NQ}$ کا غیر صفر سمتیہ $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{NS}$ پر تظلیل سمتیہ $\overrightarrow{NR}$ تعین کرنے کی خاطر Q سے (مبسوط) خط NS پر عمود گرایا جاتا ہے (شکل 11.38)۔ اس سمتیہ کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{B} \text{ کا } \boldsymbol{A} \text{ پر سمتی تظلیل} \qquad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$$

اگر $\boldsymbol{B}$ قوت کو ظاہر کرتا ہو، تب $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ اثر انداز ہونے والی قوت ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ حادہ ہو تب $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا (شکل 11.39)۔ اگر θ زاویہ منفرجہ ہو تب $\cos\theta < 0$ ہو گا اور $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $-|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $-\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا۔ ان دونوں صورتوں میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} &= (|\boldsymbol{B}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \Big(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \qquad\qquad |\boldsymbol{B}|\cos\theta = \tfrac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta}{|\boldsymbol{A}|} = \tfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \Big(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} = \Big(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\Big)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \Big(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\Big)\boldsymbol{A} \tag{11.23}$$

عدد $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ کو $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ کے رخ **غیر سمتی جزو** کہتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا

$$|\boldsymbol{B}|\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{11.24}$$

ہم غیر سمتی جزو حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ کا ضرب نقطہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ کے ساتھ لیں گے۔ مساوات 11.23 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل، $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی جزو ضرب رخ $\boldsymbol{A}$ کے برابر ہو گا۔

جہاں مساوات 11.23 کا پہلا حصہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے اثر کی بات کرتی ہے، اس کا دوسرا حصہ حساب کے لئے موزوں ہے چونکہ یہ جذر سے چھٹکارا دیتا ہے۔

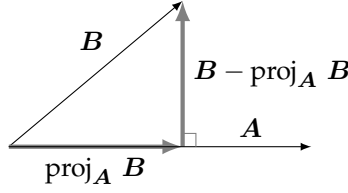
مثال 11.23: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ پر سمتی تظلیل تلاش کریں اور $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات 11.23 استعمال کر کے سمتی تظلیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\ &= -\frac{4}{9}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) = -\frac{4}{9}\boldsymbol{i}+\frac{8}{9}\boldsymbol{j}+\frac{8}{9}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

ہم $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو مساوات 11.24 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|\cos\theta &= \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = (6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot\Big(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\Big)\\ &= 2-2-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

□

شکل 11.40: سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے عمودی اور متوازی سمتیات کا مجموعہ لکھنا۔

سمتیہ کو عمودی سمتیات کا مجموعہ لکھنا

میکانیات میں ہمیں عموماً ایک سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ کی صورت میں لکھنا ہوتا ہے۔ ہم ایسا درج ذیل مساوات کی مدد سے کر سکتے ہیں (شکل 11.40)۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} - \text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{A}\ \text{کا متوازی}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{B} - \left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}\right)}_{\boldsymbol{A}\ \text{کا عمودی}}\end{aligned} \tag{11.25}$$

مثال 11.24: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

حل: ہم درج ذیل

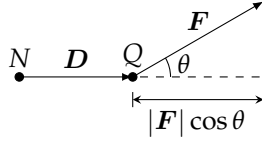
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 6 - 1 = 5, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 9 + 1 = 10$$

کو مساوات 11.25 میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\right) &= \frac{5}{10}(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) + \left(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} - \frac{5}{10}(3 - \boldsymbol{j})\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right)\end{aligned}$$

آپ تسلی کر لیں کہ دائیں ہاتھ پہلا جزو $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے۔دائیں ہاتھ دوسرا جزو درج ذیل کی بنا $\boldsymbol{A}$ کو عمودی ہے۔

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right)\cdot(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

□

شکل 11.41: ہٹاو $\boldsymbol{D}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $(|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}|$ ہو گا۔

کام

ہم نے حصہ 6.8 میں مستقل قوت F جو ایک جسم پر عمل کر کے اس کو قوت کے رخ d فاصلہ منتقل کرتی ہے کا کام کلیہ $W = Fd$ سے دریافت کیا۔ یہ کلیہ صرف اس صورت درست ہو گا جب قوت کا رخ اور حرکت کا رخ ایک ہوں۔ اگر مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ اور جسم کے ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے رخ مختلف ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کے رخ، $\boldsymbol{F}$ کا جزو کام کرے گا۔ اگر $\boldsymbol{F}$ اور $\boldsymbol{D}$ کے بیچ زاویہ θ ہو تب کام درج ذیل ہو گا (شکل 11.41)۔

$$\begin{aligned}
\text{کام} &= (\boldsymbol{D} \text{ کے رخ } \boldsymbol{F} \text{ کا غیر سمتی جزو})(\boldsymbol{D} \text{ کی لمبائی}) \\
&= (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}| \\
&= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}
\end{aligned}$$

تعریف: ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \tag{11.26}$$

ہو گا جہاں ہٹاو اور قوت کے بیچ زاویہ θ ہے۔

□

کام کی اکائی نیوٹن ضرب میٹر ہے جس کو عموماً **جاول**[21] کہتے ہیں۔

مثال 11.25: اگر $|\boldsymbol{F}| = 40\,\mathrm{N}$ اور $|\boldsymbol{D}| = 3\,\mathrm{m}$ ہوں اور $\theta = 60^\circ$ ہو تب کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{کام} &= |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \\
&= (40)(3)\cos 60^\circ \\
&= (120)(\tfrac{1}{2}) \\
&= 60\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

□

[21] joule

سوالات

سوال 11.123 تا سوال 11.132 میں درج ذیل دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ، $|\boldsymbol{A}|$ ، $|\boldsymbol{B}|$

ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ کا کوسائن۔

ج. $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو۔

د. سمتیہ $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$

سوال 11.123: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\sqrt{5}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $-25, 5, 5$ ، (ب) -1 ، (ج) -5 ، (د) $-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$

سوال 11.124: $\boldsymbol{A}=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=5\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$

سوال 11.125: $\boldsymbol{A}=10\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $25, 15, 5$ ، (ب) $\frac{1}{3}$ ، (ج) $\frac{5}{3}$ ، (د) $\frac{1}{9}(10\boldsymbol{i}+11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

سوال 11.126: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 11.127: $\boldsymbol{A}=-2\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $0, \sqrt{53}$ ، (ب) 0 ، (ج) 0 ، (د) 0

سوال 11.128: $\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال 11.129: $\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $2, \sqrt{34}, \sqrt{3}$ ، (ب) $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ ، (ج) $\frac{2}{\sqrt{34}}$ ، (د) $\frac{1}{17}(5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

سوال 11.130: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 11.131: $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
جواب: (ا) $\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$ ، (ب) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ، (ج) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ، (د) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

سوال 11.132: $\boldsymbol{A}=-5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+\sqrt{17}\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$

سوال 11.133: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔
جواب: $(\frac{3}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j}) + (-\frac{3}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})$

سوال 11.134: سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

سوال 11.135: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔
جواب: $(\frac{14}{3}\boldsymbol{i} + \frac{28}{3}\boldsymbol{j} - \frac{14}{3}\boldsymbol{k}) + (\frac{10}{3}\boldsymbol{i} - \frac{16}{3}\boldsymbol{j} - \frac{22}{3}\boldsymbol{k})$

سوال 11.136: سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ پہلے سے سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{i}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ ہے۔ اگر مساوات 11.25 میں $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}$ ہو تب کیا $\boldsymbol{B}_{\parallel,\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{B}_{\perp,\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ملتے ہیں۔ (متوازی اور عمودی اجزاء کو بالترتیب زیر نوشت $\parallel$ اور $\perp$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔)

جیومیٹری

سوال 11.137: مجموعات اور فرق۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شکل 11.42 میں $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ عمودی ہیں۔ کیا یہ محض ایک اتفاق ہے یا ہم توقع کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ اور فرق عمودی ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: یکساں مقدار کے دو سمتیات کا مجموعہ اور تفریق ہر صورت ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔ یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہو گا۔

$$(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2 = |\boldsymbol{v}_1|^2 - |\boldsymbol{v}_2|^2$$

سوال 11.138: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے کا قطر AB ہے۔ نقطہ C دائرے پر پایا جاتا ہے (شکل 11.43)۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{CA}$ اور $\overrightarrow{CB}$ عمودی ہوں گے۔

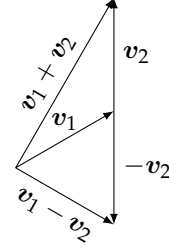
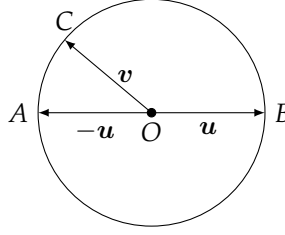
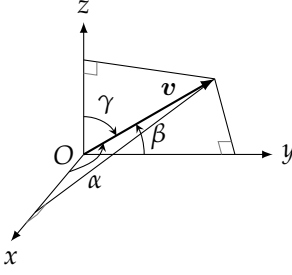
سوال 11.139: دکھائیں کہ یکساں اضلاع کے متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 11.140: دکھائیں کہ مربع وہ واحد مستطیل ہے جس کے وتر عمودی ہوتے ہیں۔

سوال 11.141: ثابت کریں کہ ایک متوازی الاضلاع صرف اور صرف اس صورت مستطیل ہو گا جب اس کے وتروں کی لمبائی ایک جیسی ہو۔ ترکھان اس حقیقت کو عموماً استعمال کرتا ہے۔

سوال 11.142: متوازی الاضلاع کے قریبی ضلع $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کے مشترکہ راس سے مخالف راس تک وتر، سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

شکل 11.42: سمتیات برائے سوال 11.137

شکل 11.43: دائرہ برائے سوال 11.138

شکل 11.44: زاویات رخ اور کوسائن رخ کی تعریف برائے سوال 11.144۔

سوال 11.143: ایک اہرام کے مربع قاعدہ $OABC$ کے ضلع کی لمبائی 1 اکائی ہے اور اہرام کی چوٹی D ہے۔اہرام کا قد بھی 1 اکائی ہے۔ یوں نقطہ D ٹھیک وتر OB کے وسطی نقطہ کے سیدھا اوپر ہو گا۔ قطع $\vec{OB}$ اور $\vec{OD}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔
جواب: $\tan^{-1}\sqrt{2}$

سوال 11.144: زاویات رخ اور کوسائن رخ
سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ کے زاویات رخ α ، β اور γ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل 11.44)۔

مثبت محور x اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ α ہے ($0 \le \alpha \le \pi$)،

مثبت محور y اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ β ہے ($0 \le \beta \le \pi$)،

مثبت محور z اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ γ ہے ($0 \le \gamma \le \pi$)۔

ا. درج ذیل

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$

اور $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ دکھائیں۔ ان کوسائن کو **کوسائن رخ**[22] کہتے ہیں۔

ب. کوسائن رخ اور اکائی سمتیات۔ دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ ایک اکائی سمتیہ ہو تب a ، b اور c سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے کوسائن رخ ہوں گے۔

---

[22] direction cosines

سمتیات کے بیچ زاویے

سوال 11.145 تا سوال 11.148 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 11.145: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$
جواب: 0.75 ریڈیئن

سوال 11.146: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$

سوال 11.147: $\boldsymbol{A} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$
جواب: 1.77 ریڈیئن

سوال 11.148: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال 11.149 تا سوال 11.151 میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال 11.149: مثلث ABC کے اندرونی زاویات۔ مثلث کے راس $A(-1,0,2)$ ، $B(2,1,-1)$ اور $C(1,-2,2)$ ہیں۔
جواب: $\underline{/A} \approx 1.24, \underline{/B} \approx 0.66, \underline{/C} \approx 1.24$

سوال 11.150: سمتیات $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ۔

سوال 11.151: مکعب کے وتر اور مکعب کی ایک سطح کے وتر کے بیچ زاویہ۔ (اشارہ: ایسا مکعب استعمال کریں جس کے کنارے $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ ہوں۔)
جواب: 0.62 ریڈیئن

سوال 11.152: پانی کی نالی میں ایک جوڑ ہے۔ اس جوڑ سے شمال رخ نالی کی ڈھلوان $10\,\%$ ہے جبکہ جوڑ سے مشرق رخ نالی کی ڈھلوان $20\,\%$ ہے۔ اس جوڑ پر نالی کے دو حصوں کے بیچ زاویہ کتنا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال 11.153:

ا. کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے لئے عدم مساوات $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ کو $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\theta$ کی مدد سے دکھائیں۔

ب. کیا کبھی $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو سکتا ہے؟ اگر ہو سکتا ہے تب کب ایسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: (ا) چونکہ $|\cos\theta|\le 1$ ہوتا ہے لہٰذا $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\cos\theta|\le|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|(1)=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو گا۔ (ب) جب $|\cos\theta|=1$ ہو یا $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ غیر صفر سمتیات کی صورت میں مساوات تب درست ہو گا جب سمتیات متوازی ہوں یعنی جب $\theta=0$ یا $\theta=\pi$ ہو۔

سوال 11.154: مستوی xy میں عمومی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ بنائیں۔ اب ان نقطوں (x,y) کی نشاندہی کریں جن پر $(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{v}=0$ ہو گا۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.155: اگر $\boldsymbol{u}_1$ اور $\boldsymbol{u}_2$ عمودی اکائی سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{v}=a\boldsymbol{u}_1+b\boldsymbol{u}_2$ ہو تب $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1$ تلاش کریں۔
جواب: a

سوال 11.156: ضرب نقطہ میں مشترک اجزاء کی منسوخی
حقیقی اعداد کے ضرب میں اگر $ab_1=ab_2$ ہو اور a غیر صفر ہو تب دونوں اطراف a کو منسوخ کر کے $b_1=b_2$ لکھا جا سکتا ہے۔ کیا ضرب نقطہ میں ایسا کرنا ممکن ہو گا: یعنی اگر $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_2$ ہو تب کیا دونوں اطراف $\boldsymbol{A}$ منسوخ کر کے $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$ لکھا جا سکتا ہے؟۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.157: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی سمتیات ہیں۔ اب $\boldsymbol{D}=5\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{C}$ لیں۔

ا. اگر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ اکائی سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کی مقدار $|\boldsymbol{D}|$ تلاش کریں۔

ب. اگر $|\boldsymbol{A}|=2$ ، $|\boldsymbol{B}|=3$ اور $|\boldsymbol{C}|=4$ ہوں تب $|\boldsymbol{D}|$ کتنا ہو گا؟

جواب: (ا) $\sqrt{70}$ ، (ب) $\sqrt{568}$

سوال 11.158: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔ اگر $\boldsymbol{D}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}+\gamma\boldsymbol{C}$ ہو جہاں α ، β اور γ غیر سمتی ہیں تب دکھائیں کہ $\alpha=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}$ ، $\beta=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}$ اور $\gamma=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$ ہوں گے۔

کام

سوال 11.159: قوت $\boldsymbol{F}=5\boldsymbol{k}$ (مقدار 5 نیوٹن) سیدھی لکیر پر مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک ایک جسم کو منتقل کرتا ہے (فاصلہ میٹر میں ہے)۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟
جواب: $5\,\text{J}$

سوال 11.160: ایک ریل گاڑی کا انجن 6000 ٹن کمیت کی ریل گاڑی کو $602\,148\,\text{N}$ قوت سے کھینچ سکتا ہے۔ ایک افقی سیدھی پٹڑی پر 605 کلو میٹر فاصلہ طے کر کے یہ انجن کتنا کام کرتا ہے؟

سوال 11.161: ایک بوجھ کو $20\,\mathrm{m}$ لمبی ڈھلوان پر $200\,\mathrm{N}$ قوت کھینچتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ یہ قوت 30° کا زاویہ بناتی ہے۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟
جواب: $3464.10\,\mathrm{J}$

سوال 11.162: ایک کشتی کے بادبان پر ہوا $2000\,\mathrm{N}$ قوت لگاتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ قوت کا زاویہ 60° ہے۔ ایک کلومیٹر فاصل طے کرنے میں یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

مستوی میں خط کی مساواتیں

سوال 11.163: دکھائیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $ax + by = c$ کو عمودی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ اس لکیر کی ڈھلوان، اس سمتیہ کی ڈھلوان کے بالعکس متناسب کا نفی ہے۔

سوال 11.164: دکھائی کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $bx - ay = c$ کے متوازی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ لکیر کی ڈھلوان اور سمتیہ کی ڈھلوان ایک دوسرے جیسے ہیں۔

سوال 11.165 تا سوال 11.168 میں سوال 11.163 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس عمودی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 11.165: $N(2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$
جواب: $x + 2y = 4$ شکل 11.45

سوال 11.166: $N(-1,2), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال 11.167: $N(-2,-7), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$
جواب: $-2x + y = -3$ شکل 11.46

سوال 11.168: $N(11,10), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

سوال 11.169 تا سوال 11.172 میں سوال 11.164 کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس متوازی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال 11.169: $N(-2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$
جواب: $x + y = -1$ شکل 11.47

سوال 11.170: $N(0,-2), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 11.171: $N(1,2), \quad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$
جواب: $2x - y = 0$ شکل 11.48

سوال 11.172: $N(1,3), \quad \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

مستوی میں خطوط کے بیچ زاویے

دو مستوی خط جن کے بیچ زاویہ حادہ جو قائمہ نہ ہو وہی ہو گا جو ان خطوط کے عمودی دو سمتیات کے بیچ یا ان خطوط کے متوازی دو سمتیات کے بیچ ہو گا۔اس حقیقت کے ساتھ سوال 11.163 یا سوال 11.164 کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے سوال 11.173 تا سوال 11.176 میں خطوط کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 11.173: $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$
جواب: $\frac{\pi}{4}$

سوال 11.174: $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

سوال 11.175: $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$
جواب: $\frac{\pi}{6}$

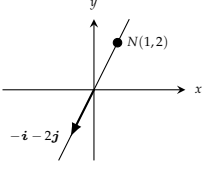
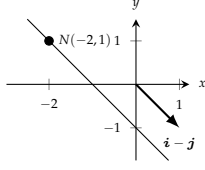
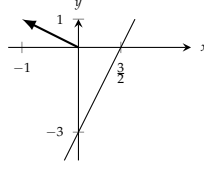
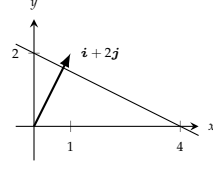
سوال 11.176: $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$

سوال 11.177 اور سوال 11.178 میں خطوط کے بیچ ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک زاویہ حادہ تلاش کریں۔

سوال 11.177: $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$
جواب: 0.14

سوال 11.178: $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

قابل تفرق منحنیات کے بیچ زاویہ

دو قابل تفرق منحنیات کے نقطہ تقاطع پر ان کے بیچ زاویہ سے مراد اس نقطہ پر منحنیات کے مماس کے بیچ زاویہ ہے۔ سوال 11.179 تا سوال 11.182 میں منحنیات کے بیچ زاویات دو نقاط تقاطع پر معلوم کریں۔ (آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔)

شکل 11.48 شکل 11.47 شکل 11.46 شکل 11.45

سوال 11.179: $y=\frac{3}{2}-x^2,\quad y=x^2$
جواب: $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ دونوں نقطوں پر۔

سوال 11.180: $x=\frac{3}{4}-y^2,\quad x=y^2-\frac{3}{4}$

سوال 11.181: $y=x^3,\quad x=y^2$
جواب: نقطہ $(0,0)$ پر $\frac{\pi}{2}$؛ نقطہ $(1,1)$ پر $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$

سوال 11.182: $y=-x^2,\quad y=\sqrt[3]{x}$

11.4 صلیبی ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قسم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے لہٰذا اس ضرب کو **سمتی ضرب**[23] بھی کہتے ہیں۔

برقیات، مقناطیسیات، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

دو سمتیات کا صلیبی ضرب

ہم خلا میں دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم **دائیں ہاتھ قاعدہ** سے اس سطح پر عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ منتخب کرتے ہیں۔ یوں سطح میں $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ θ موڑنے سے، انگوٹھا $\boldsymbol{n}$ کا رخ دے گا (شکل 11.49)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0\le\theta\le\pi$ لیا جاتا ہے۔ ہم سمتی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

---

[23] vector product

شکل 11.49: صلیبی ضرب $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

شکل 11.50: صلیبی ضرب $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

تعریف:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta)\boldsymbol{n} \tag{11.27}$$

□

چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا غیر سمتی مضرب ہے لہٰذا یہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ دونوں کو عمودی ہو گا۔ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے سمتی ضرب کو عموماً $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا **صلیبی ضرب**[24] کہتے ہیں۔ صلیبی ضرب کو صلیب کے نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسی کی بنا یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

چونکہ 0 اور π کے سائن صفر ہوتے ہیں لہٰذا ہم مساوات 11.27 میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف $\boldsymbol{0}$ لیں گے۔

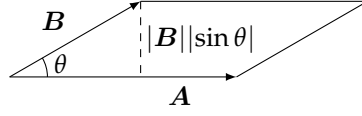
اگر $\boldsymbol{A}$ یا $\boldsymbol{B}$ صفر ہو تب ہم $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کی قیمت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب یہ متوازی ہوں۔

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ بالمقابل $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{B}$ سے $\boldsymbol{A}$ کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو، زاویہ θ موڑیں، تب ہمارا انگوٹھا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کے حصول میں انگوٹھے کا رخ ہے)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0 \le \theta \le \pi$ لیا جاتا ہے۔ شکل 11.50 میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

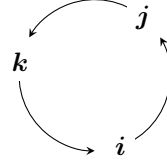
$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{11.28}$$

---

[24] cross product

شکل 11.51: متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔

ضرب نقطہ کے برعکس صلیبی ضرب **ناقابل تبادل**[25] ہے۔

صلیبی ضرب کی تعریف $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی جوڑیوں پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے باآسانی یاد رکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} &= -(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} &= -(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} &= -(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{11.29}$$

اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} &= (|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} &= (|\boldsymbol{j}||\boldsymbol{j}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} &= (|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \end{aligned}$$

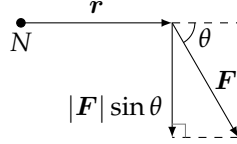
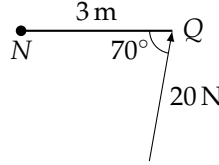
صلیبی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا

چونکہ $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کی مقدار

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\sin\theta||\boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{11.30}$$

ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ $|\boldsymbol{A}|$ جبکہ اس کا قد $|\boldsymbol{B}\sin\theta|$ ہے (شکل 11.51)۔

---

[25] non commutative

شکل 11.52: قوت مروڑ۔

شکل 11.53: قوت مروڑ (مثال 11.26)۔

قوت مروڑ

نقطہ N پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سر تک ہٹاو کو سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ظاہر کرتا ہے (شکل 11.52)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم $\boldsymbol{r}$ کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{r}$ کو عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار} = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

یا $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ} = (|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ تب $\boldsymbol{0}$ ہوتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔

مثال 11.26: قوت مروڑ کی مقدار شکل 11.53 میں درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\left|\vec{NQ}\times\boldsymbol{F}\right| &= \left|\vec{NQ}\right||\boldsymbol{F}|\sin 70^\circ \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4\,\mathrm{N\,m}\end{aligned} \tag{11.30}$$

مساوات 11.30

□

قوانین تلازم اور تقسیم

صلیبی ضرب عام طور غیر تلازمی ہو گا چونکہ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل قواعد مطمئن ہوتے ہیں۔

$$(r\boldsymbol{A})\times(s\boldsymbol{B})=(rs)(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad \text{غیر سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.31}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \qquad \text{سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.32}$$

$$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} \qquad \text{سمتی قاعدہ تقسیم} \tag{11.33}$$

مساوات 11.31 کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(-\boldsymbol{B})=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{11.34}$$

غیر سمتی قاعدہ تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات 11.31 کے دونوں اطراف پر مساوات 11.27 عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ تقسیم مساوات 11.32 کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ ز میں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات 11.33 کو مساوات 11.32 سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 11.32 کے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کا کلیہ بذریعہ مقطع

ہم $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کا حساب کارتیسی محددی نظام میں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

قواعد تقسیم اور $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے قواعد ضرب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\\
&=a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\\
&\quad+a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\
&\quad+a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\
&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

مذکورہ بالا مساوات کا آخری حصہ قالب

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

یوں اگر سمتیات $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{11.35}$$

مثال 11.27:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

□

مثال 11.28:

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=(2)(3)-(1)(-4)=6+4=10$$

□

مثال 11.29:

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

□

مثال 11.30:

$$\begin{vmatrix}-5 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -4 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-5)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=-5(1-3)-3(2+4)+1(6+4)=10-18+10=2$$

□

مثال 11.31: صلیبی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ درج ذیل سمتیات کے لئے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&1\\-4&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&1\\-4&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}\\\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}&=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

مثال 11.32: ایک مستوی پر نقاط $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ تلاش کریں۔

حل: سمتیات $\overrightarrow{PQ}$ اور $\overrightarrow{PR}$ اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہٰذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}&=(2-1)\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}+(-1-0)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\\\overrightarrow{PR}&=(-1-1)\boldsymbol{i}+(1+1)\boldsymbol{j}+(2-0)\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\\\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\-2&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\2&2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&-1\\-2&2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

مثال 11.33: ایک مثلث کے راس $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: سمتیات $\overrightarrow{PQ}$ اور $\overrightarrow{PR}$ جس متوازی الاضلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|&=|6\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}| &&\text{مثال 11.32}\\&=\sqrt{(6)^2+(6)^2}=6\sqrt{2}\end{aligned}$$

مثلث کا رقبہ اس کا نصف $3\sqrt{2}$ ہو گا۔ □

مثال 11.34: سطح $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دریافت کریں۔

حل: چونکہ $\vec{PQ} \times \vec{PR}$ مستوی کو عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ کا رخ یہی سمتیہ دے گا۔ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{\left|\vec{PQ} \times \vec{PR}\right|} = \frac{6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

چونکہ سطح کے دو آپس میں مخالف رخ عمودی سمتیات پائے جاتے ہیں لہٰذا اس سطح کا دوسرا عمودی اکائی سمتیہ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ □

غیر سمتی سہ ضرب

ضرب $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ کو $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کا غیر سمتی سہ ضرب کہتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب یہی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں (شکل 11.54) کہ غیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیمت

$$\left|(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\right| = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}||\cos\theta|$$

اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم دیتی ہے جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔ مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$ اور اس کے قد $|\boldsymbol{C}||\cos\theta|$ کا حاصل ضرب نقطہ

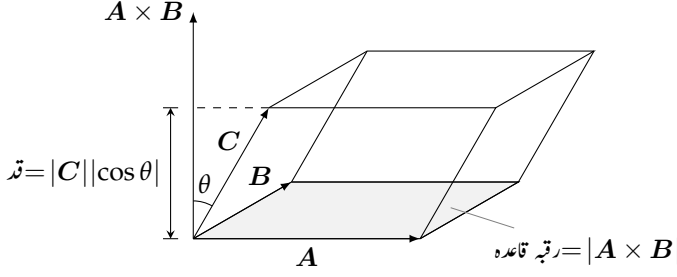
$$\begin{aligned}
\text{حجم} &= (\text{رقبہ قاعدہ}) \cdot (\text{قد}) \\
&= |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{C}||\cos\theta| \\
&= \left|(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\right|
\end{aligned}$$

ہو گا۔

سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی سطح کو شکل 11.54 میں قاعدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی سطح یا سمتیات $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}$ کی سطح کو قاعدہ لے کر بھی حجم تلاش کر سکتے ہیں۔ چونکہ حجم اٹل قیمت ہے لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} \tag{11.36}$$

اب غیر سمتی ضرب قابل تبادل ہے لہٰذا مساوات 11.36 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}) \tag{11.37}$$

شکل 11.54: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سہ ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کئے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جا سکتا ہے۔

غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جا سکتی ہے:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\cdot\Big[\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\Big]\\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{11.38}$$

مثال 11.35: سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C}=7\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$ ایک مستطیلی متوازی السطوح بناتے ہیں۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 7 & -4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -2 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}\\
&= -21-16+13=-23
\end{aligned}$$

یوں حجم $\left|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right| = 23$ ہو گا۔ □

سوالات

حساب

سوال 11.183 تا سوال 11.190 میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (اگر معین ہو) کی لمبائیاں اور مقدار معلوم کریں۔

سوال 11.183: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$

جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = 3$ ، رخ $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}| = 3$ ، رخ $-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}-\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}$

سوال 11.184: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$

سوال 11.185: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = 0$ ، کوئی رخ نہیں ہے؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}| = 0$ کوئی رخ نہیں ہے۔

سوال 11.186: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

سوال 11.187: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{B}=-3\boldsymbol{j}$

جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = 6$ ، رخ $-\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}| = 6$ ، رخ $\boldsymbol{k}$

سوال 11.188: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}$

سوال 11.189: $\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

جواب: $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = 6\sqrt{5}$ ، رخ $\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$ ؛ $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}| = 6\sqrt{5}$ ، رخ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$

سوال 11.190: $\boldsymbol{A} = \frac{3}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 11.191 تا سوال 11.196 میں محددی محور کے مبدا پر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ ترسیم کریں۔

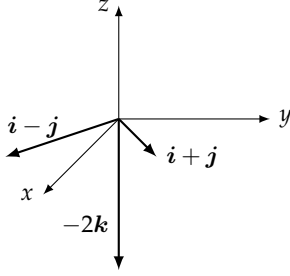
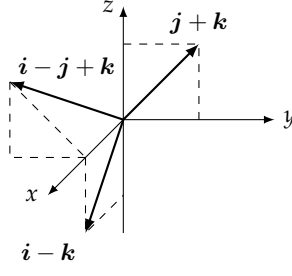
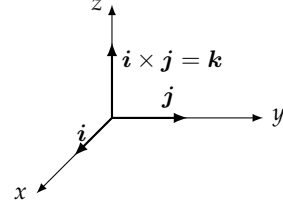
سوال 11.191: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$

جواب: شکل 11.55

سوال 11.192: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}$

سوال 11.193: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

جواب: شکل 11.56

سوال 11.194: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$

شکل 11.55

شکل 11.56

شکل 11.57

سوال 11.195: $\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$
جواب: شکل 11.57

سوال 11.196: $\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}$

سوال 11.197 تا سوال 11.200 میں درج ذیل اقدام کریں۔

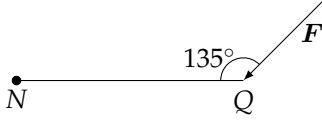
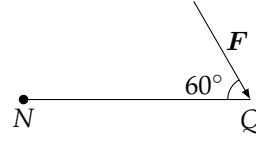
ا. اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں جس کے راس نقاط P ، Q اور R ہوں۔

ب. سطح PQR کا ایک عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

سوال 11.197: $\quad P(1,-1,2), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$
جواب: (ا) $2\sqrt{6}$ ، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$

سوال 11.198: $\quad P(1,1,1), \quad Q(2,1,3), \quad R(3,-1,1)$

سوال 11.199: $\quad P(2,-2,1), \quad Q(3,-1,2), \quad R(3,-1,1)$
جواب: (ا) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$

سوال 11.200: $\quad P(-2,2,0), \quad Q(0,1,-1), \quad R(-1,2,-2)$

شکل 11.59: خاکہ برائے سوال 11.204

شکل 11.58: خاکہ برائے سوال 11.203

سوال 11.201: سمتیات $\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C} = -15\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ لیں۔ ان میں کون سے سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) نہیں (ب) $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$

سوال 11.202: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{D} = -\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} - \pi\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$ لیں۔ کون سے سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی اور (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.203 اور سوال 11.204 میں N پر $\boldsymbol{F}$ کا قوت مروڑ تلاش کریں جہاں $\left|\overrightarrow{NQ}\right| = 80\,\text{cm}$ اور $\boldsymbol{F} = 30\,\text{N}$ ہیں۔

سوال 11.203: خاکہ شکل 11.58 میں دیا گیا ہے۔
جواب: $4\sqrt{3}\,\text{N m}$

سوال 11.204: خاکہ شکل 11.59 میں دیا گیا ہے۔

سوال 11.205 تا سوال 11.208 میں دکھائیں کہ $(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ ہے۔ اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم تلاش کریں جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

سوال 11.205: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{k}$
جواب: 8

سوال 11.206: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال 11.207: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$
جواب: 7

سوال 11.208: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 11.209: درج ذیل میں کون سے حل صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$

ب. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|$

ج. $\boldsymbol{A}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}\times\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$

د. $\boldsymbol{A}\times(-\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$

ه. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

و. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B} = 0$

ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

جواب: (ا) درست، (ب) بعض اوقات درست، (ج) درست، (د) درست، (ہ) بعض اوقات درست، (و) درست ، (ز) درست ،(ح) درست

سوال 11.210: درج ذیل میں کون سے ہر صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

ب. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$

ج. $(-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

د. $(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

ه. $c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

و. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2$

ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{A} = 0$

ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

سوال 11.211: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

ا. $\boldsymbol{B}$ پر $\boldsymbol{A}$ کا سمتی تظلیل۔

ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

ج. $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

د. اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

جواب: (ا) $\operatorname{proj}_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$ ، (ب) $\pm\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ ، (ج) $\pm(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ ، (د) $\left|(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\right|$

سوال 11.212: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

ا. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ کو عمودی سمتیہ۔

ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

ج. ایک سمتیہ جس کی لمبائی $|\boldsymbol{A}|$ اور جو $\boldsymbol{B}$ کے رخ ہو۔

د. اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

سوال 11.213: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ سمتیات ہیں۔ درج ذیل میں کن کا معنی ہے اور کن کا کوئی معنی نہیں ہے؟

ا. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

ب. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

ج. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

د. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

جواب: (ا) ہاں، (ب) نہیں، (ج) ہاں، (د) نہیں

سوال 11.214: دکھائیں کہ ماسوائے انحطاطی صورت $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ پایا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ پایا جائے گا۔ انحطاطی صورت کسے کہتے ہیں؟

سوال 11.215: صلیبی ضرب میں منسوخی
کیا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔
جواب: (ا) نہیں۔ ضروری نہیں کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ برابر ہوں۔ مثال کے طور پر $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\neq-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ہے لیکن

$$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$$

سوال 11.216: دوگنا منسوخی
کیا $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ ، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

مستوی میں رقبہ

سوال 11.217 تا سوال 11.220 میں متوازی الاضلاع کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 11.217: $A(1,0),\quad B(0,1),\quad C(-1,0),\quad D(0,-1)$
جواب: 2

سوال 11.218: $A(0,0),\quad B(7,3),\quad C(9,8),\quad D(2,5)$

سوال 11.219: $A(-1,2),\quad B(2,0),\quad C(7,1),\quad D(4,3)$
جواب: 13

سوال 11.220: $A(-6,0),\quad B(1,-4),\quad C(3,1),\quad D(-4,5)$

سوال 11.221 تا سوال 11.224 میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 11.221: $A(0,0),\quad B(-2,3),\quad C(3,1)$
جواب: $\frac{11}{2}$

سوال 11.222: $A(-1,-1),\quad B(3,3),\quad C(2,1)$

سوال 11.223: $A(-5,3), \quad B(1,-2), \quad C(6,-2)$
جواب: $\frac{25}{2}$

سوال 11.224: $A(-6,0), \quad B(10,-5), \quad C(-2,4)$

سوال 11.225: مستوی xy میں ایک مثلث کے راس $(0,0)$ ، (a_1,a_2) اور (b_1,b_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ معلوم کریں۔ اپنے کام کی وضاحت کریں۔
جواب: اگر $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا مثلث کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر xy مستوی میں گھڑی کے الٹ رخ $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہو تب $(+)$ علامت جبکہ گھڑی کے رخ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہونے کی صورت میں $(-)$ علامت استعمال ہو گی۔

سوال 11.226: ایک مثلث کے راس (a_1,a_2) ، (b_1,b_2) اور (c_1,c_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ اخذ کریں۔

11.5 فضا میں خطوط اور مستویات

اس حصہ میں غیر سمتی ضرب اور سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے فضا میں خطوط، قطعات اور مستوی کے مساوات لکھنا سکھایا جائے گا۔

فضا میں خطوط اور قطعات

فرض کریں فضا میں نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتا اور سمتیہ $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ کے متوازی ایک خط L ہے۔ تب L ان تمام نقطوں $N(x,y,z)$ کا سلسلہ ہو گا جن کے لئے $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی ہو۔ یعنی L پر N صرف اور صرف اس صورت پایا جائے گا جب $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا غیر سمتی مضرب ہو۔

سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا متوازی خط جو نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتا ہو کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\overrightarrow{N_0N} = t\boldsymbol{v}, \quad -\infty < t < \infty \tag{11.39}$$

مساوات 11.39 کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہوئے تین غیر سمتی مساوات حاصل ہوں گے جن میں مقدار معلوم t پایا جائے گا:

$$(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}=t(A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}) \qquad \text{اتساع مساوات } 11.39$$
$$x-x_0=tA,\quad y-y_0=tB,\quad z-z_0=tC \qquad \text{مطابقتی اجزاء}$$

ان مساوات سے وقفہ $-\infty<t<\infty$ پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتے خط کی درج ذیل معیاری مقدار معلوم مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$x=x_0+tA,\quad y=y_0+tB,\quad z=z_0+tC,\quad -\infty<t<\infty \tag{11.40}$$

مثال 11.36: سمتیہ $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ کے متوازی خط جو نقطہ $(-2,0,4)$ سے گزرتا ہو کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: دی گئی معلومات کو مساوات 11.40 میں پر کر کے خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x=-2+2t,\quad y=4t,\quad z=4-2t$$

□

مثال 11.37: نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $Q(1,-1,4)$ سے گزرتے ہوئے خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ان نقطوں کے بیچ خط کا متوازی سمتیہ

$$\overrightarrow{NQ}=(1-(-3))\boldsymbol{i}+(-1-2)\boldsymbol{j}+(4-(-3))\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

ہے جس کو مساوات 11.40 میں $(x_0,y_0,z_0)=(-3,2,-3)$ کے ساتھ لیتے ہوئے مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t=0$ پر $x=-3+4(0)=-3$ ، $y=2-3(0)=2$ اور $z=-3+7(0)=-3$ یعنی ابتدائی نقطہ $(-3,2,-3)$ حاصل ہوتا ہے۔ہم نقطہ $Q(1,-1,4)$ کو بھی ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے درج ذیل مساوات حاصل ہو گا۔

$$x=1+4t,\quad y=-1-3t,\quad z=4+7t$$

اب $t=0$ پر $x=1$ ، $y=-1$ اور $z=4$ یعنی ابتدائی نقطہ $(1,-1,4)$ حاصل ہوتا ہے۔درج بالا دونوں مساوات درست ہیں۔ ان کے ابتدائی نقطے مختلف ہیں۔ □

دو نقطوں کے بیچ خطی قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کرنے کی خاطر ہم پہلے ان نقطوں کے بیچ خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔اس کے بعد ہم قطع کے آخری سروں پر t کی قیمتیں تلاش کر کے t کو ان قیمتوں کے بیچ بند وقفہ پر رہنے کا پابند بناتے ہیں۔ خط کی مساوات بشمول پابند وقفہ قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی۔

مثال 11.38: نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $Q(1,-1,4)$ کے بیچ قطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم پہلے نقاط N اور Q سے گزرتے ہوئے خط کی مساوات تلاش کرنی ہو گی۔ ہم مثال 11.37 میں اس کو حاصل کر چکے ہیں:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t \tag{11.41}$$

درج ذیل نقطہ $t = 0$ پر نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $t = 1$ پر نقطہ $Q(1,-1,4)$ دیتا ہے۔

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

مساوات 11.41 بشمول $0 \leq t \leq 1$ کی پابندی قطع کی مقدار معلوم مساوات ہو گی:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

□

فضا میں ایک نقطہ سے ایک خط تک فاصلہ

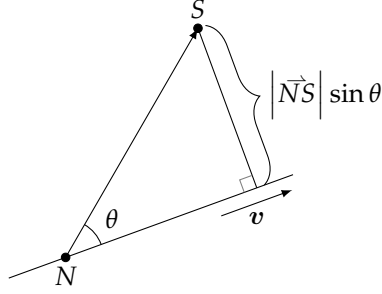
نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ d جاننے کی خاطر ہم اس خط کے عمودی قطع $\overrightarrow{NS}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ شکل 11.60 سے واضح ہے کہ یہ لمبائی $\left|\overrightarrow{NS}\right| \sin\theta$ یعنی $\frac{\left|\overrightarrow{NS}\times\boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}$ ہو گی۔

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{لکیر سے نقطے کا فاصلہ} \tag{11.42}$$

مثال 11.39: نقطہ $S(1,1,5)$ سے درج ذیل لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t$$

حل: ہم $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے متوازی لکیر L جو $N(1,3,0)$ سے گزرتی ہو کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اب

$$\overrightarrow{NS} = (1-1)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (5-0)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

شکل 11.60: نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ۔

اور

$$\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

لیتے ہوئے مساوات 11.42 درج ذیل فاصلہ دیتی ہے۔

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sqrt{1+25+4}}{1+1+4} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

□

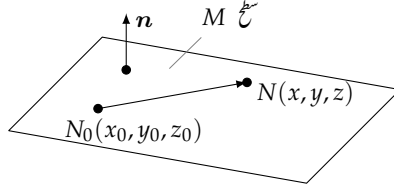
فضا میں مستوی کی مساوات

فرض کریں سطح M نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہے اور اس سطح کو سمتیہ $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ قائمہ ہے۔ تب ان تمام نقطوں $N(x, y, z)$ کا سلسلہ، جن کے لئے $\overrightarrow{N_0N}$ اور $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں، M ہو گا (شکل 11.61)۔ یعنی N صرف اور صرف اس صورت M پر واقع ہو گا جب $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0N} = 0$ ہو۔ یہ مساوات

$$(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) \cdot [(x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}] = 0$$

یا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

کے مترادف ہے۔

شکل 11.61: سطح میں نقاط N_0 اور N کے بیچ سمتی قطع اور سطح کا قائمہ سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہوا اور $\boldsymbol{n}$ کو عمودی سطح کی مساوات

سمتی مساوات
$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0 N} = 0 \tag{11.43}$$

اجزائی مساوات
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{11.44}$$

مثال 11.40: نقطہ $N(-3, 0, 7)$ سے گزرتا سطح جو $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کو عمودی ہو کی مساوات تلاش کریں۔

حل:

مساوات 11.43
$$\begin{aligned} 5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) &= 0 \\ 5x + 15 + 2y - z + 7 &= 0 \\ 5x + 2y - z &= -22 \end{aligned}$$

□

آپ مثال 11.40 میں دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے عددی سر مساوات $5x + 2y - z = -22$ میں x، y اور z کے عددی سر کی طور پر ابھرتے ہیں۔ ایسا واقعاتی طور پر نہیں ہوا بلکہ مساوات 11.44 کو $Ax + By + Cz = D$ لکھنا ممکن ہے جہاں $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$ ہو گا۔ یوں

$$A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} \quad \text{اور} \quad Ax + By + Cz = D$$

ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

مثال 11.41: تین نقطے سطح تعین کرتے ہیں
نقاط $A(0, 0, 1)$، $B(2, 0, 0)$ اور $C(0, 3, 0)$ سے گزرتے ہوئے مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم ان نقاط کو استعمال کرتے ہوئے سطح کا عمودی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

ہم اس عمودی سمتیہ کے اجزاء اور (سطح پر کسی بھی) نقطہ $(0,0,1)$ کو مساوات 11.44 میں پر کر کے مستوی کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3(x-0) + 2(y-0) + 6(z-1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6 \end{aligned}$$

□

مثال 11.42: سطح اور لکیر کی انقطاع
وہ نقطہ دریافت کریں جہاں خط

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

مستوی $3x + 2y + 6z = 6$ کو قطع کرتا ہو۔

حل: نقطہ

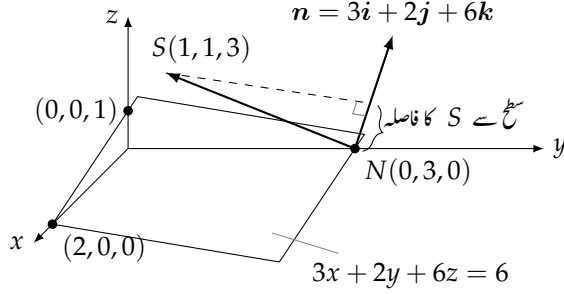
$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t\right)$$

اس سطح میں پایا جاتا ہے جو مستوی کی (درج ذیل) مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1+t) &= 6 \\ 8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6 \\ 8t &= -8 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

نقطہ تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$(x,y,z)|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3} - 2, 2, 1 - 1\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$

□

شکل 11.62: نقطہ S سے سطح تک فاصلہ $\vec{NS}$ کی $\boldsymbol{n}$ پر سمتیہ تظلیل کی لمبائی کے برابر ہو گا۔

مثال 11.43: نقطہ سے مستوی تک فاصلہ
نقطہ $S(1,1,3)$ سے سطح $3x + 2y + 6z = 6$ تک فاصلہ کتنا ہے؟

حل: ہم مستوی میں نقطہ N تلاش کر کے سمتیہ $\vec{NS}$ کا $\boldsymbol{n}$ پر تظلیل معلوم کر کے فاصلہ حاصل کرتے ہیں (شکل 11.62)۔

مساوات $3x + 2y + 6z = 6$ کے سددی سروں سے درج ذیل عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

مستوی کی مساوات سے مستوی میں نقاط حاصل کرتے ہیں۔ ان میں محوری قطعات معلوم کرنا بہت آسان ہوتا ہے۔ اگر ہم قطع y کو N لیں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\vec{NS} &= (1-0)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (3-0)\boldsymbol{k} \\
&= \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7
\end{aligned}$$

نقطہ S سے سطح تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
d &= \left|\vec{NS} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right| \\
&= \left|(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\right| \\
&= \left|\frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}
\end{aligned}$$

□

شکل 11.63: دو سطحوں کے بیچ زاویہ، ان سطحوں کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

شکل 11.64: سطحوں کا خط تقاطع کا سطحوں کے عمودی سمتیات کے ساتھ تعلق۔

سطحوں کے بیچ زاویات؛ خطوط تقاطع

دو متقاطع سطحوں کے بیچ زاویہ سے مراد ان کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ حادہ ہے (شکل 11.63)۔

مثال 11.44: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے بیچ زاویہ دریافت کریں۔

حل: ان سطحوں کے عمودی سمتیات درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{n}_1 = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

ان کے بیچ زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n_1}|\boldsymbol{n}_2||}\right) && \text{مساوات } 11.17\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)\\ &\approx 1.38 \text{ ریڈیئن}\end{aligned}$$

□

مثال 11.45: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے خط تقاطع کی مساوات تلاش کریں۔

حل: سطحوں کے عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ ، $\boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے عمودی ہوں گے لہٰذا خط تقاطع اور $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے (شکل 11.64)۔ اس کو دوسری نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے متوازی ہو گا۔ موجودہ مثال میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$$

سمتیہ $14\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$ کا ہر غیر صفر غیر سمتی مضرب بھی درست جواب ہو گا۔ □

مثال 11.46: اس لکیر کی مساوات تلاش کریں جس پر سطح $3x-6y-2z=15$ اور سطح $2x+y-2z=5$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

حل: ہم اس لکیر کے متوازی خط کی مساوات اور لکیر پر ایک نقطہ تلاش کر کے مساوات 11.40 استعمال کرتے ہیں۔

ہم مثال 11.45 میں خط تقاطع کا متوازی خط $\boldsymbol{v}=14\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$ تلاش کر چکے ہیں۔ خط پر نقطہ معلوم کرنے کی خاطر ہم دونوں سطحوں کا کوئی بھی مشترک نقطہ لے سکتے ہیں۔ یوں $z=0$ لے کر دونوں سطحوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے نقطہ $(3,-1,0)$ حاصل ہوتا ہے۔یوں خط تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$x=3+14t,\quad y=-1+2t,\quad z=15t$$

□

سوالات

خطوط اور خطی قطعات

سوال 11.227 تا سوال 11.238 میں خطوط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 11.227: سمتیہ $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کا متوازی اور نقطہ $N(3,-4,-1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 11.228: نقاط $N(1,2,-1)$ اور $Q(-1,0,1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 11.229: نقاط $N(-2,0,3)$ اور $Q(3,5,-2)$ سے گزرتا خط۔

سوال 11.230: نقاط $N(1,2,0)$ اور $Q(1,1,-1)$ سے گزرتا خط۔

سوال 11.231: سمتیہ $2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کا متوازی اور مبدا سے گزرتا خط۔

سوال 11.232: نقطہ $N(3,-2,1)$ سے گزرتا اور لکیر $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=3t$ کا متوازی خط۔

سوال 11.233: محور z کا متوازی لکیر $(1,1,1)$ کا متوازی خط۔

سوال 11.234: نقطہ $(2,4,5)$ سے گزرتا اور سطح $3x+7y-5z=21$ کا قائمہ خط۔

سوال 11.235: نقطہ $(0,-7,0)$ سے گزرتا اور سطح $x+2y+2z=13$ کا قائمہ خط۔

سوال 11.236: نقطہ $(2,3,0)$ سے گزرتا خط جو سمتیات $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ کا قائمہ ہو۔

سوال 11.237: محور x

سوال 11.238: محور z

سوال 11.239 تا سوال 11.246 میں دیے گئے نقطوں کے بیچ قطعات کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ محددی محور کھینچ کر قطعات دکھائیں۔ بڑھتے ہوئے t کے رخ کی نشاندہی کریں۔

سوال 11.239: $(0,0,0)$، $(1,1,3/2)$

سوال 11.240: $(0,0,0)$، $(1,0,0)$

سوال 11.241: $(1,0,0)$، $(1,1,0)$

سوال 11.242: $(1,1,0)$، $(1,1,1)$

سوال 11.243: $(0,1,1)$، $(0,-1,1)$

سوال 11.244: $(0,2,0)$، $(3,0,0)$

سوال 11.245: $(2,0,2)$، $(0,2,0)$

سوال 11.246: $(1,0,-1)$، $(0,3,0)$

سطحیں

سوال 11.247 تا سوال 11.254 میں سطحیں کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 11.247: نقطہ $N_0(0,2,-1)$ سے گزرتا سمتیہ $\boldsymbol{n}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ کا عمودی سطح۔

سوال 11.248: نقطہ $(1,-1,3)$ سے گزرتا سمتیہ $3x+y+z=7$ کا متوازی سطح۔

سوال 11.249: نقاط $(1,1,-1)$ ، $(2,0,2)$ اور $(0,-2,1)$ سے گزرتا سطح۔

سوال 11.250: نقاط $(2,4,5)$ ، $(1,5,7)$ اور $(-1,6,8)$ سے گزرتا سطح۔

سوال 11.251: نقطہ $N_0(2,4,5)$ سے گزرتا لکیر $x=5+t,\, y=1+3t,\, z=4t$ کا قائمہ سطح۔

سوال 11.252: نقطہ $A(1,-2,1)$ سے گزرتا ہوا سطح جو مبدا سے A تک سمتیہ کا قائمہ ہو۔

سوال 11.253: خطوط $x=2t+1,\, y=3t+2,\, z=4t+3$ اور $x=s+2,\, y=2s+4,\, z=-4s-1$ کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 11.254: خطوط $x=t,\, y=-t+2,\, z=t+1$ اور $x=2s+2,\, y=s+3,\, z=5s+6$ کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

سوال 11.255 اور سوال 11.256 میں مقطع خطوط سطح تعین کرتے ہیں۔ اس سطح کو تلاش کریں۔

سوال 11.255:

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad x=-1+t,\, y=2+t,\, z=1-t,\, -\infty<t<\infty\\
L_2: &\quad x=1-4s,\, y=1+2s,\, z=2-2s,\, -\infty<s<\infty
\end{aligned}
$$

سوال 11.256:

$$
\begin{aligned}
L_1: &\quad x=t,\, y=3-3t,\, z=-2-t,\, -\infty<t<\infty\\
L_2: &\quad x=1+s,\, y=4+s,\, z=-1+s,\, -\infty<s<\infty
\end{aligned}
$$

سوال 11.257: سطحیں $2x+y-z=3,\; x+2y+z=2$ کے خط تقاطع کا قائمہ سطح جو نقطہ $N_0(2,1,-1)$ سے گزرتا ہو تلاش کریں۔

سوال 11.258: سطح $4x-y+2z=7$ کا قائمہ اور نقاط $N_1(1,2,3)$ ، $N_2(3,2,1)$ سے گزرتا سطح تلاش کریں۔

فاصلہ

سوال 11.259 تا سوال 11.264 میں نقطہ اور لکیر کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 11.259: $x=4t,\, y=-2t,\, z=2t \quad (0,0,12):$

سوال 11.260: $x = 5 + 3t,\ y = 5 + 4t,\ z = -3 - 5t \quad (0,0,0):$

سوال 11.261: $x = 2 + 2t,\ y = 1 + 6t,\ z = 3 \quad (2,1,3):$

سوال 11.262: $x = 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2t \quad (2,1,-1):$

سوال 11.263: $x = 4 - t,\ y = 3 + 2t,\ z = -5 + 3t \quad (3,-1,4):$

سوال 11.264: $x = 10 + 4t,\ y = -3,\ z = 4t \quad (-1,4,3):$

سوال 11.265 تا سوال 11.270 میں نقطہ سے لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

سوال 11.265: $x + 2y + 2z = 13 \quad (2,-3,4),$

سوال 11.266: $3x + 2y + 6z = 6 \quad (0,0,0),$

سوال 11.267: $4y + 3z = -12 \quad (0,1,1),$

سوال 11.268: $2x + y + 2z = 4 \quad (2,2,3),$

سوال 11.269: $2x + y + 2z = 4 \quad (0,-1,0),$

سوال 11.270: $-4x + y + z = 4 \quad (1,0,-1),$

سوال 11.271: سطح $x + 2y + 6z = 1$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 11.272: لکیر $x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ معلوم کریں۔

زاویات

سوال 11.273 اور ا سوال 11.274 میں سطحوں کے بیچ زاویات تلاش کریں۔ آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

سوال 11.273: $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$

سوال 11.274: $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

سوال 11.275 تا سوال 11.278 میں سطحوں کے بیچ زاویہ حادہ کو کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کریں۔ جواب ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک درست ہو۔

سوال 11.275: $2x+2y+2z=3, \quad 2x-2y-z=5$

سوال 11.276: $x+y+z=1, \quad z=0$

سوال 11.277: $2x+2y-z=3, \quad x+2y+z=2$

سوال 11.278: $4y+3z=-12, \quad 3x+2y+6z=6$

مقطع خطوط اور سطحیں

سوال 11.279 تا سوال 11.282 میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں دی گئی لکیر سطح کو مس کرتی ہے۔

سوال 11.279: $x=1-t,\, y=3t,\, z=1+t; \quad 2x-y+3z=6$

سوال 11.280: $x=2,\, y=3+2t,\, z=-2-2t; \quad 6x+3y-4z=-12$

سوال 11.281: $x=1+2t,\, y=1+5t,\, z=3t; \quad x+y+z=2$

سوال 11.282: $x=-1+3t,\, y=-2,\, z=5t; \quad 2x-3z=7$

سوال 11.283 تا سوال 11.286 میں سطحوں کے خط تقاطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

سوال 11.283: $x+y+z=1, \quad x+y=2$

سوال 11.284: $3x-6y-2z=3, \quad 2x+y-2z=2$

سوال 11.285: $x-2y+4z=2, \quad x+y-2z=5$

سوال 11.286: $5x-2y=11, \quad 4y-5z=-17$

فضا میں دو ہمسطحی خطوط متوازی ہوں گے، یا ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ غیر ہمسطحی خطوط ایک دوسرے کے غیر متوازی ہوں گے اور یہ ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ سوال 11.287 اور سوال 11.288 میں تین لکیریں دی گئی ہیں۔ ایک وقت میں دو خطوط لیتے ہوئے دیکھیں آیا یہ متوازی ہیں، ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں یا یہ غیر ہمسطحی ہیں؟

سوال 11.287:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x = 3+2t,\ y = -1+4t,\ z = 2-t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2: &\quad x = 1+4s,\ y = 1+2s,\ z = -3+4s,\ -\infty < s < \infty \\ L_3: &\quad x = 3+2r,\ y = 2+r,\ z = -2+2r,\ -\infty < r < \infty \end{aligned}$$

سوال 11.288:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x = 1+2t,\ y = -1-t,\ z = 3t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2: &\quad x = 2-s,\ y = 3s,\ z = 1+s,\ -\infty < s < \infty \\ L_3: &\quad x = 5+2r,\ y = 1-r,\ z = 8+3r,\ -\infty < r < \infty \end{aligned}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 11.289: نقطہ $N_1(2,-4,7)$ سے گزرتا خط جو $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کے متوازی ہو کی مقدار معلوم مساوات کو مساوات 11.40 کی مدد سے دریافت کریں۔اس کے بعد نقطہ $N_2(3,-2,0)$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

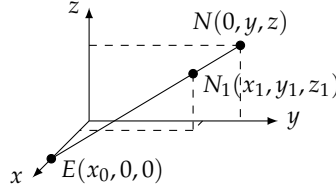
سوال 11.290: نقطہ $N_1(4,1,5)$ سے گزرتی $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کی قائمہ سطح کی مساوات کو مساوات 11.44 کی مدد سے حاصل کریں۔ اب نقطہ $N_2(3,-2,0)$ اور عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2 = -\sqrt{2}\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 11.291: وہ نقاط تلاش کریں جن پر لکیر $x = 1+2t,\ y = -1-t,\ z = 3t$ محوری مستوی کو مس کرتی ہو۔ جواب تک پہنچنے کے لئے اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 11.292: سطح $z = 3$ میں اس خط کی مساوات تلاش کریں جو $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن اور $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{3}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہو۔ اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال 11.293: کیا خط $x = 1-2t,\ y = 2+5t,\ z = -3t$ سطح $2x + y - z = 8$ کا متوازی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.294: آپ کس طرح بتا سکتے ہیں کہ سطح $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ اور سطح $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ ایک دوسرے کے متوازی یا قائمہ ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.295: دو سطحوں کا خط تقاطع $x = 1+t,\ y = 2-t,\ z = 3+2t$ ہے۔ ان سطحوں کی مساوات تلاش کریں۔ مساوات کی صورت $Ax + By + Cz = D$ ہو۔

شکل 11.65: تظلیل (سوال 11.299)

سوال 11.296: وہ سطح دریافت کریں جس مبدا سے گزرتا ہو اور سطح $2x+3y+z=12$ کا قائمہ ہو۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ یہ سطحیں ایک دوسرے کے قائمہ ہیں؟

سوال 11.297: غیر صفر اعداد a ، b اور c کے لئے $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ کی ترسیم ایک سطح ہو گی۔ کن سطحوں کی مساوات ایسی ہو گی؟

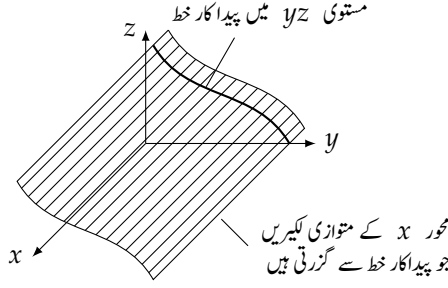
سوال 11.298: فرض کریں L_1 اور L_2 غیر تقاطع، غیر متوازی خطوط ہیں۔ کیا کوئی غیر صفر سمتیہ ان دونوں کا قائمہ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11.299: کمپیوٹر تصویر کشی
ہم تین بعدی اجسام کو عموماً ایک مستوی پر ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کریں آپ کی آنکھ $E(x_0,0,0)$ پر ہے اور ہم نقطہ $N_1(x_1,y_1,z_1)$ کو مستوی yz پر ظاہر کرنا چاہتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم E سے N_1 تک شعاع استعمال کرتے ہوئے N_1 کی تظلیل مستوی پر بناتے ہیں۔ یوں مستوی پر N_1 بطور $N(0,y,z)$ نظر آئے گا۔ ہمیں بطور ترسیمی تخلیق کار معلوم E اور N_1 سے y اور z حاصل کرنا ہے (شکل 11.65)۔

ا. $\vec{EN}$ اور $\vec{EN_1}$ کے تعلق کی سمتی مساوات لکھیں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے y اور z کو x_0 ، x_1 ، y_1 اور z_1 کی صورت میں لکھیں۔

ب. جزو-ا میں حاصل نتائج کو پرکھنے کی خاطر $x_1=0$ اور $x_1=x_0$ پر y اور z کا رویہ دیکھیں اور $x_0\to\infty$ کرتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔

سوال 11.300: کمپیوٹر تصویر کشی کے ایک مسئلہ پر غور کرتے ہیں۔ آپ کی آنکھ $(4,0,0)$ پر ہے۔آپ مثلث چادر کو دیکھ رہے ہیں جس کے راس $(1,0,1)$ ، $(1,1,0)$ اور $(-2,2,2)$ ہیں۔ نقطہ $(1,0,0,)$ سے $(0,2,2)$ تک قطع اس چادر کو چھیر کر گزرتا ہے۔ اس قطع کا کون سا حصہ نظر سے اوجھل ہو گا؟

شکل 11.66: پیداکار خط اور نلکی

11.6 نلکی اور مربع سطحیں

واحد متغیر کے تفاعل کی احصاء میں ہم نے خطوط سے شروع کیا اور خطوط کے بارے میں اپنا علم استعمال کرتے ہوئے مستوی قوسین کا مطالعہ کیا۔ ہم نے مماس پر غور کیا اور دیکھا کہ کسی بھی قابل تفرق منحنی کے چھوٹے حصہ کو خطی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خاص اہمیت کے حامل منحنیات میں مخروطی قطعات، اور دو درجی منحنیات شامل ہیں جنہیں متغیر x اور y کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

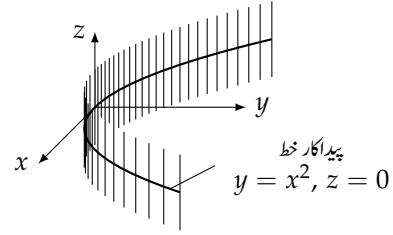
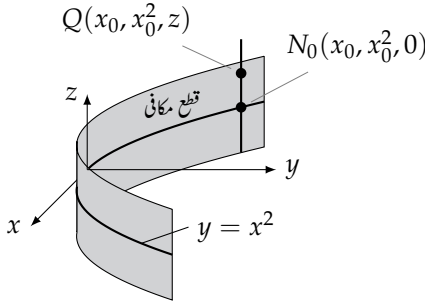
ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل کی احصاء کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اسی طرح کی راہ پر چلتے ہیں۔ ہم دو بعدی سطح سے شروع کر کے اس سطح کے بارے میں اپنا علم استعمال کر کر فضا میں تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔ خاص اہمیت کے حامل سطحوں میں نلکیاں اور دو درجی سطحیں شامل ہیں جنہیں x ، y ، z کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں دو بعدی سطحوں پر غور کیا گیا۔ اس حصہ میں ہم تین بعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

نلکی

نلکی[26] سے مراد وہ سطح ہے جو (ا) ان تمام لکیروں پر مشتمل ہو جو فضا میں کسی دی گئی لکیر کے متوازی ہوں اور (ب) جو دی گئی مستوی منحنی سے گزرتی ہوں۔ اس منحنی کو نلکی کی **پیداکار منحنی**[27] کہتے ہیں (شکل 11.66)۔ ٹھوس جیومیٹری میں جہاں نلکی سے مراد دائری نلکی ہوتی ہے، پیداکار منحنی ایک دائرہ ہو گی، لیکن یہاں ہم کسی بھی قسم کی پیداکار منحنی کی اجازت دیں گے۔ ہماری (درج ذیل) پہلی مثال میں نلکی کو قطع مکافی پیدا کرتا ہے۔

نلکی یا دیگر تین بعدی سطحوں کو ترسیم کرتے ہوئے یا قلم و کاغذ سے ان کا خاکہ بناتے ہوئے ان سطحوں کا محددی سطحوں کے متوازی سطحوں کے ساتھ خط تقاطع کو دیکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ ان منحنیات کو **عمودی تراش**[28] کہتے ہیں۔

---

[26] cylinder
[27] generating curve
[28] cross section

(ا) مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ سے گزرتے خط جو محور z کے متوازی ہیں۔

(ب) نلکی پر ہر نقطہ کے محدد (x_0, x_0^2, z) طرز کے ہیں لہٰذا ہم اس کو نلکی $y = x^2$ کہتے ہیں۔

شکل 11.67: اشکال برائے مثال 11.47

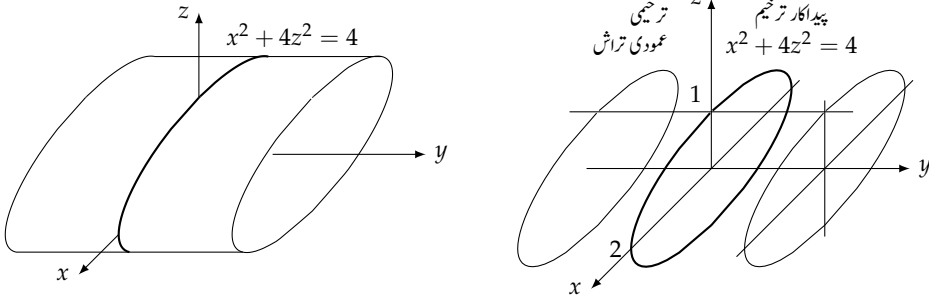
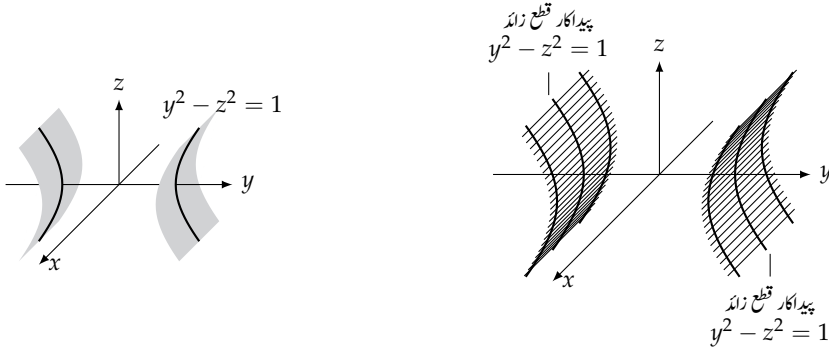
مثال 11.47: قطع مکافی نلکی $y = x^2$
محور z کے متوازی لکیروں سے حاصل اس نلکی کی مساوات تلاش کریں جو قطع مکافی $y = x^2,\ z = 0$ سے گزرتی ہیں (شکل 11.67-ا)۔

حل: فرض کریں مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ پر نقطہ $N_0(x_0, x_0^2, 0)$ پایا جاتا ہو۔ تب کسی بھی z کے لئے چونکہ نقطہ $Q(x_0, x_0^2, z)$ محور z کے متوازی لکیر $x = x_0,\ y = x_0^2$، جو نقطہ N_0 سے گزرتی ہے، پر پایا جائے گا لہٰذا Q اس نلکی پر پایا جائے گا (شکل 11.67-ب)۔

اس طرح z کی قیمت سے قطع نظر اس سطح پر پائے جانے والے تمام نقاط مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کریں گے۔ یوں $y = x^2$ اس نلکی کی مساوات ہو گی۔ اس کی بنا ہم اس نلکی کو "نلکی $y = x^2$ " کہتے ہیں۔ □

ہم مثال 11.47 سے دیکھ سکتے ہیں کہ مستوی xy میں کوئی بھی منحنی $f(x,y) = c$ محور z کے متوازی نلکی دے گی اور اس نلکی کی مساوات $f(x,y) = c$ ہو گی۔ مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ایک قائمہ نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر مشتمل ہے جو مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ سے گزرتے ہیں۔ مساوات $x^2 + 4y^2 = 9$ ایک ترخیمی نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر مشتمل ہے جو مستوی xy میں ترخیم $x^2 + 4y^2 = 9$ سے گزرتے ہیں۔

اسی طرح مستوی xz میں کوئی بھی منحنی $g(x,z) = c$ محور y کے متوازی ایک نلکی دیتی ہے جس کی مساوات $g(x,z) = c$ ہو گی (شکل 11.68)۔ کوئی بھی مساوات $h(y,z) = c$ محور x کے متوازی نلکی دیتی ہے اور اس نلکی کی مساوات بھی $h(y,z) = c$ ہو گی (شکل 11.69)۔

تین کارتیسی محوروں میں سے کسی بھی دو محوروں پر مبنی مساوات ایک نلکی دیتی ہے جو تیسری کارتیسی محور کے متوازی ہو گی۔

شکل 11.68: محور y کے متوازی لکیریں جو سطح xz میں پائی جاتی ہوں اور ترخیمی $x^2 + 4z^2 = 4$ سے گزرتی ہوں، ترخیمی نلکی $x^2 + 4z^2 = 4$ پیدا کرتی ہیں۔ محور y کے عمودی سطحیں اس نلکی سے ترخیمی عمودی تراش کاٹتی ہیں۔ یہ نلکی پوری محور y پر پائی جائے گی۔

شکل 11.69: محور x کے متوازی اور مستوی yz میں پائی جانے والی وہ لکیریں جو قطع زائد $y^2 - z^2 = 1$ سے گزرتی ہوں، قطع زائد نلکی $y^2 - z^2 = 1$ پیدا کرتی ہیں۔ محور x کے عمودی سطحیں اس سے قطع زائد کاٹتی ہیں۔

مربع سطحیں

مربع سطح سے مراد فضا میں x ، y اور z کی دو درجی مساوات کی ترسیم ہے جس کی عمومی مساوات درج ذیل ہے

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

جہاں A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، J اور K مستقل ہیں۔ اس مساوات کی سادہ صورت، حصہ 10.3 میں دو بعدی صورت کی طرح، گھمانے اور منتقلی سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ مربع سطح کی مساوات میں ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے۔ ہم صرف سادہ مساوات پر غور کریں گے۔ اگرچہ نلکی کی تعریف یہ نہیں کہتی ہے البتہ اشکال مربع سطحوں کی بھی مثالیں ہیں۔ ہم اب ترخیمی سطحوں (جن میں کرہ شامل ہے)، قطع مکافی سطحوں، مخروطی سطحوں اور قطع زائد سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 11.48: **ترخیمی سطح**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.45}$$

محددی محوروں کو $(\mp a, 0, 0)$ ، $(0, \mp b, 0)$ اور $(0, 0, \mp c)$ پر مس کرتا ہے (شکل 11.70)۔ یہ اس مستطیل ڈبہ $|x| \le a$ ، $|y| \le b$ ، $|z| \le c$ کے اندر پایا جاتا ہے۔ چونکہ اس سطح کی تعریفی مساوات میں متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے لہٰذا یہ سطح تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا۔

تینوں محددی سطحوں کا اس سطح کے ساتھ منحنی تقاطع، ترخیمات ہوں گی۔ مثال کے طور پر محددی مستوی $z = 0$ اس سطح کو درج ذیل ترخیم پر قطع کرتا ہے۔

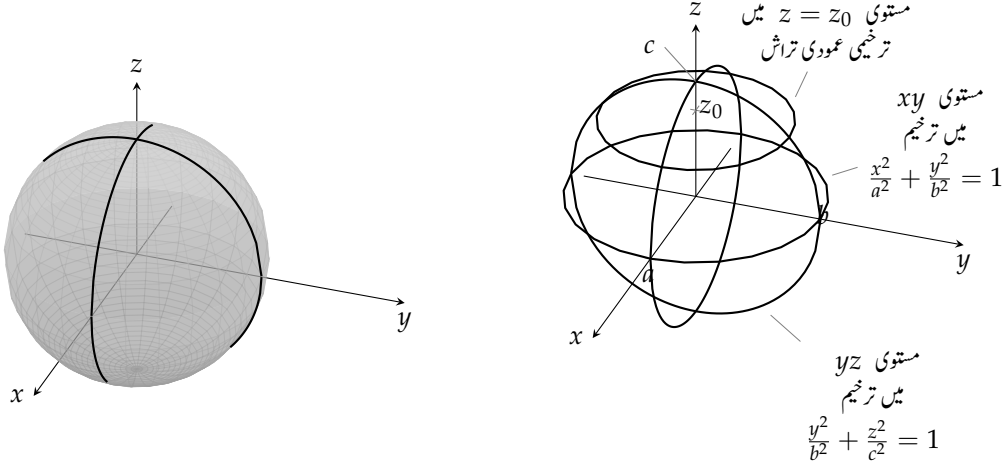
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad z = 0$$

سطح $z = z_0, |z_0| < c$ اس سطح سے درج ذیل ترخیمی حصہ کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1$$

اگر نصف محور a ، b اور c میں کوئی دو ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ **ترخیمی سطح طواف** ہو گا۔ اگر تینوں ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ سطح کرہ ہو گا۔ □

فنیات فضا میں ذہنی تصویر کشی

فضا میں سطحوں کی تصویر کشی کمپیوٹر کی مدد سے کی جا سکتی ہے۔ یہ مختلف دو بعدی سطحوں میں لکیریں کھینچ سکتا ہے۔ کمپیوٹر اشکال کو فضا میں گھمانے کا نظارہ پیش کر سکتا ہے گویا آپ جسم کو ہاتھ میں گھما رہے ہوں۔ کمپیوٹر اس کا خیال رکھتا ہے کہ اجسام کا سامنے حصہ نظر آئے جب کے اس کا پچھلا حصہ آنکھوں سے اوجھل رہے۔ عمومی طور پر کمپیوٹر کو سطحوں کی مقدار معلوم مساوات درکار ہوں گی۔

شکل 11.70: ترخیمی سطح

مثال 11.49: سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے **ترخیمی قطع مکافی سطح**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \tag{11.46}$$

تشاکلی ہو گا (شکل 11.71)۔ صرف مبدا پر محوری تقاطع پایا جاتا ہے۔ مستقل c کی علامت تعین کرتی ہے کہ یہ مکمل سطح xy سے نیچے یا اس سے اوپر پایا جائے گا۔ محددی سطح اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

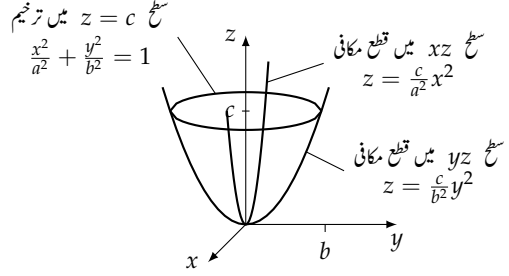
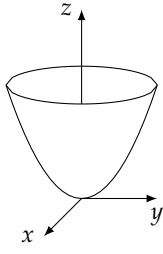
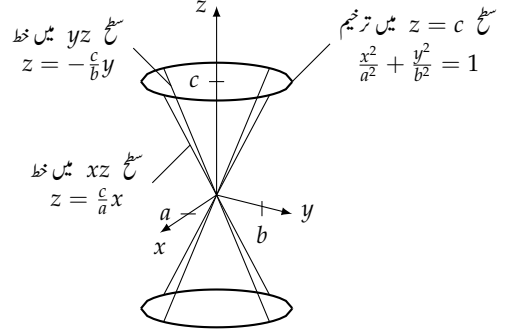
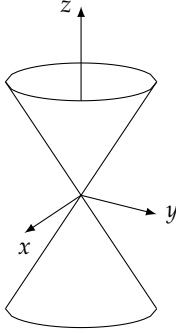
$$\begin{aligned} x = 0: &\quad z = \frac{c}{b^2}y^2 \quad \text{مکافی قطع} \\ y = 0: &\quad z = \frac{c}{a^2}x^2 \quad \text{مکافی قطع} \\ z = 0: &\quad (0,0,0) \quad \text{نقطہ} \end{aligned} \tag{11.47}$$

مستوی xy سے اوپر ہر سطح $z = z_0$ اسے درج ذیل ترخیم میں کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

□

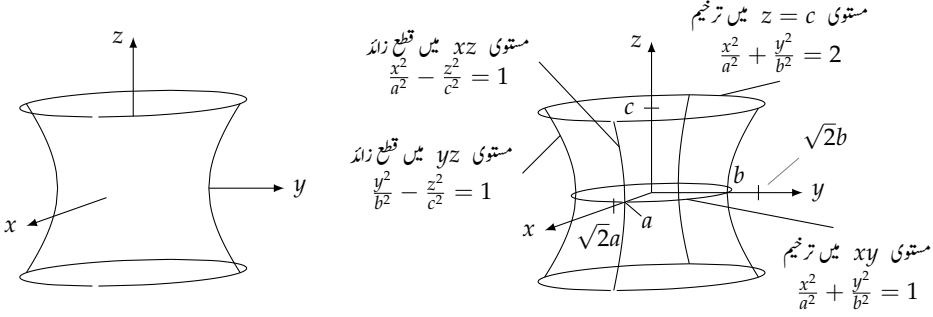
مثال 11.50: **دائری قطع مکافی سطح یا قطع مکافی سطح طواف**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a = b^2} = \frac{z}{c} \tag{11.48}$$

شکل 11.71: ترخیمی سطح (مثال 11.49)

شکل 11.72: ترخیمی مخروط (مثال 11.51)

کو مساوات 11.46 میں $b=a$ پر کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ محور z کے عمودی سطحوں کی عمودی تراش سے دائرے حاصل ہوں گے جن کا مرکز محور z پر ہو گا۔ان سطحوں کی عمودی تراش جن میں محور z پایا جاتا ہو، مماثل قطع مکافی ہوں گی جن کا مشترک ماسکہ $(0,0,\frac{a^2}{4c})$ ہو گا۔

دائری قطع مکافی سطحوں سے حصے تراش کر بطور ریڈیو دور بین، مصنوعی سیارے کے تعاقب کار، اور خورد امواج ریڈیو کے اینٹینا استعمال کئے جاتے ہیں۔ □

مثال 11.51: **ترخیمی مخروط**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \tag{11.49}$$

شکل 11.73: یک چادری قطع زشائد سطح

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.72)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$x = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{b}y \text{ خط} \tag{11.50}$$

$$y = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{a}x \text{ خط} \tag{11.51}$$

$$z = 0: \qquad (0,0,0) \text{ نقطہ}$$

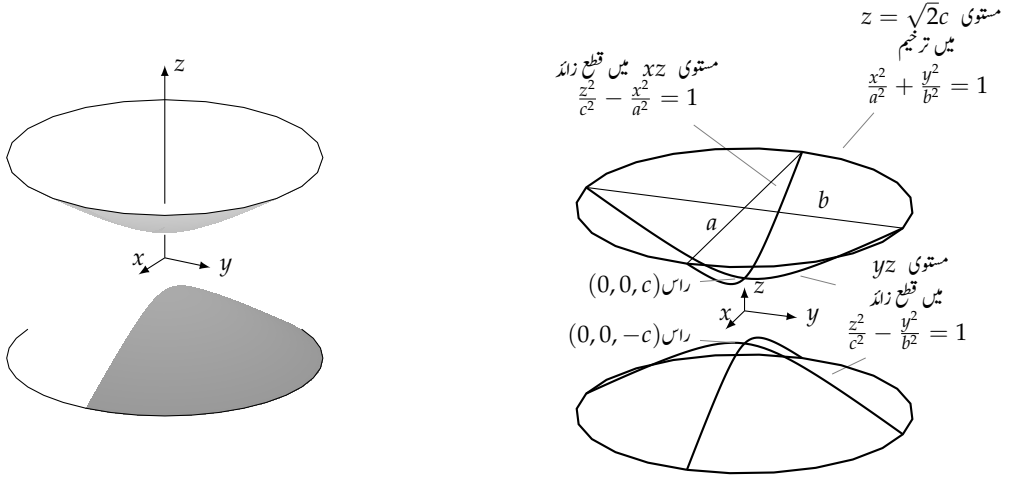
مستوی xy سے اوپر اور اس سے نیچے سطحیں $z = z_0$، اس سے ترخیمات کاٹتے ہیں جن کے مراکز محور z پر اور راس مساوات 11.50 اور مساوات 11.51 میں دی گئی خطوط پر پائے جاتے ہیں۔

اگر $a = b$ ہو تب یہ مخروط ایک قائمہ دائری مخروط ہو گا۔ □

مثال 11.52: یک چادری قطع زائد سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11.52}$$

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل 11.73)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ قطع زائد} \\ y = 0: &\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ قطع زائد} \\ z = 0: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ قطع زائد} \end{aligned} \tag{11.53}$$

شکل 11.74: دو چادری قطع مکافی

سطح $z = z_0$ اس کو ترخیم میں کاٹتا ہے جس کا مرکز محور z پر اور راسیں مساوات 11.53 میں دی گئی قطع مکافی میں سے ایک پر پائی جاتی ہیں۔

یہ پوری سطح آپس میں جڑی ہوئی ہے یعنی اس سطح پر چل کر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچا جا سکتا ہے۔ اسی لئے اس کو یک چادری قطع مکافی سطح کہتے ہیں۔ اگلی مثال میں دو چادر کی سطح پائی جاتی ہے۔

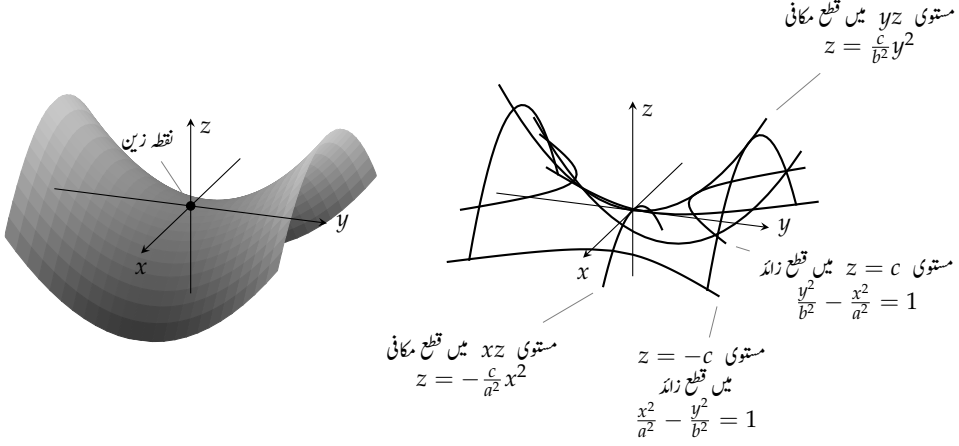
اگر $a = b$ ہو تب یہ قطع زائد سطح ایک سطح طواف ہو گا۔ □

مثال 11.53: **دو چادری قطع مکافی سطح**

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11.54}$$

تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.74)۔ سطح $z = 0$ اس کو قطع نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت ایک افقی سطح اس صورت اس کو قطع کرتا ہے جب $|z| \geq c$ ہو۔ قطع زائد حصوں

$$x = 0 : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad\qquad y = 0 : \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

کے راس اور ماسکے محور z پر پائے جاتے ہیں۔ یہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہے۔ پہلا حصہ سطح $z = c$ سے اوپر اور دوسرا حصہ سطح $z = -c$ سے نیچے پایا جاتا ہے۔ اسی لئے اس کو دو چادری سطح کہتے ہیں۔

شکل 11.75: قطع زائد قطع مکافی سطح

مساوات 11.52 اور مساوات 11.54 میں منفی اجزاء کی تعداد ایک جیسی نہیں ہے۔ دونوں صورتوں میں منفی اجزاء کی تعداد اور چادروں کی تعداد ایک جیسی ہے۔ مساوات 11.52 یا مساوات 11.54 میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کرنے سے ترخیمی مخروط کی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

حاصل ہوتی ہے (مساوات 11.49)۔ قطع زائد سطحیں اس مخروط کے متقارب ہیں۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1$$

مستوی xy میں خط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

کے متقارب ہیں۔ □

مثال 11.54: **قطع زائد قطع مکافی سطح**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad c > 0 \tag{11.55}$$

سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل 11.75)۔ قطع زائد قطع مکافی کی ان سطحوں کے ساتھ تقاطع درج ذیل ہوں گے۔

$$x = 0: \qquad z = \frac{c}{b^2}y^2 \quad \text{مکافی قطع} \tag{11.56}$$

$$y = 0: \qquad z = -\frac{c}{a^2}x^2 \quad \text{مکافی قطع} \tag{11.57}$$

سطح $x = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہے۔ سطح $y = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے نیچے رخ کھلتا ہے۔

قطع زائد قطع مکافی کو $z = z_0 > 0$ سے کاٹنے سے قطع زائد

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

حاصل ہو گا جس کا محور ماسکہ، محددی محور y کے متوازی ہو گا جبکہ اس کے راس مساوات 11.56 کی قطع مکافی پر ہوں گے۔ اگر z_0 منفی ہو تب محور ماسکہ، محددی محور x کے متوازی ہو گا اور راس مساوات 11.57 کی قطع مکافی پر ہو گا۔

مبدا کے قریب اس سطح کی صورت نقطہ ساکن کی طرح ہو گی۔ مستوی yz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، کم سے کم نقطہ نظر آئے گا۔ مستوی xz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ نظر آئے گا۔ ایسے نقطہ کو سطح کا **کم زیادہ**[29] نقطہ یا **نقطہ زین**[30] کہتے ہیں۔ □

مائع آئینہ دوربین

دائری برتن میں مائع ڈال کر برتن کو عمودی محور کے گرد گھمانے سے سطح مائع افقی نہیں رہتا بلکہ یہ قطع مکافی سطح طواف کی صورت اختیار کرتا ہے جو بطور انعکاسی دوربین کے ابتدائی آئینہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ صدی کی ابتدا میں ایسا آئینہ استعمال کرتے ہوئے دوربین بنانے کی ناکام کوششیں کی گئیں ۔ ناکامی کی وجہ مائع کی سطح پر نا ختم ہونے والی لہریں اور رفتار میں تبدیلی کی بنا ماسکہ کی تبدیلی تھی۔ آج کل ان مشکلات کو حل کرنا ممکن ہے اور گھومنے کی رفتار کو انتہا کی حد تک برقرار رکھا جا سکتا ہے۔

انہیں تصورات کو استعمال کرتے ہوئے مائع شیشہ کو ایک رفتار پر گھومتے ہوئے برتن میں آہستہ آہستہ ٹھنڈا ہونے دیا جاتا ہے حتٰی کہ وہ ٹھوس ہو جائے۔ اس طرح بڑے سے بڑا آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔

---

[29] minimax
[30] saddle point

سوالات

سطحوں کی مساوات پہچانئے

سوال 11.301 تا سوال 11.312 میں سطحوں کی مساوات دی گئی ہیں۔ ان کے اشکال کو (ا) تا (ز) میں پہچانئے۔ سطح کی قسم (قطع مکافی سطح، قطع زائد سطح، وغیرہ) بھی پہچانئے۔

سوال 11.301: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

سوال 11.302: $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

سوال 11.303: $9y^2 + z^2 = 16$

سوال 11.304: $y^2 + z^2 = x^2$

سوال 11.305: $x = y^2 - z^2$

سوال 11.306: $x = -y^2 - z^2$

سوال 11.307: $x^2 + 2z^2 = 8$

سوال 11.308: $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

سوال 11.309: $x = z^2 - y^2$

سوال 11.310: $z = -4x^2 - y^2$

سوال 11.311: $x^2 + 4z^2 = y^2$

سوال 11.312: $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

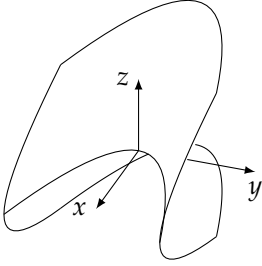
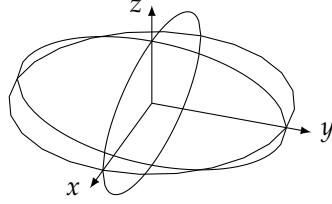
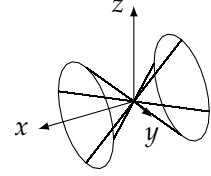
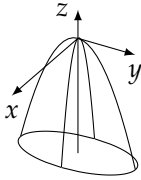
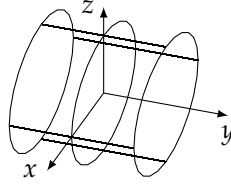
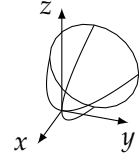
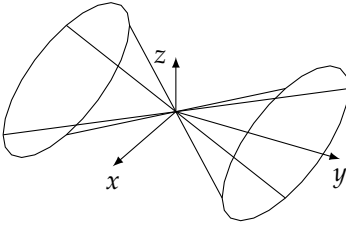
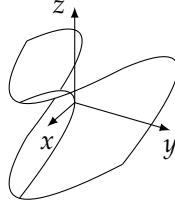
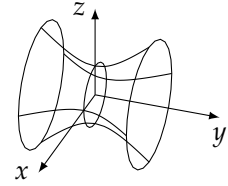
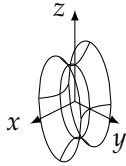
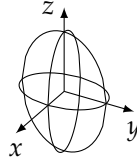
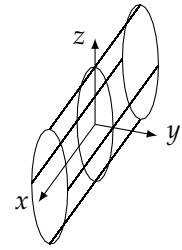
خاکہ

سوال 11.313 تا سوال 11.376 میں سطحوں کا خاکہ کھینچیں۔

نلکیاں

سوال 11.313: $x^2 + y^2 = 4$

سوال 11.314: $x^2 + z^2 = 4$

(ا)
(ب)
(ج)
(د)
(ه)
(و)
(ز)
(ح)
(ط)
(ي)
(يا)
(يب)

سوال 11.315: $z = y^2 - 1$

سوال 11.316: $x = y^2$

سوال 11.317: $x^2 + 4z^2 = 16$

سوال 11.318: $4x^2 + y^2 = 36$

سوال 11.319: $z^2 - y^2 = 1$

سوال 11.320: $yz = 1$

ترخیمی سطحیں

سوال 11.321: $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

سوال 11.322: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

سوال 11.323: $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

سوال 11.324: $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

قطع مکافی سطحیں

سوال 11.325: $z = x^2 + 4y^2$

سوال 11.326: $z = x^2 + 9y^2$

سوال 11.327: $z = 8 - x^2 - y^2$

سوال 11.328: $z = 18 - x^2 - 9y^2$

سوال 11.329: $x = 4 - 4y^2 - z^2$

سوال 11.330: $y = 1 - x^2 - z^2$

ترخیمات

سوال 11.331: $x^2 + y^2 = z^2$

سوال 11.332: $y^2 + z^2 = x^2$

سوال 11.333: $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

سوال 11.334: $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$

قطع زائد سطحیں

سوال 11.335: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

سوال 11.336: $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

سوال 11.337: $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

سوال 11.338: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

سوال 11.339: $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

سوال 11.340: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$

سوال 11.341: $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

سوال 11.342: $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

قطع زائد قطع مکافی سطحیں

سوال 11.343: $y^2 - x^2 = z$

سوال 11.344: $x^2 - y^2 = z$

مختلف سطحیں

سوال 11.345: $x^2+y^2+z^2=4$

سوال 11.346: $4x^2+4y^2=z^2$

سوال 11.347: $z=1+y^2-x^2$

سوال 11.348: $y^2-z^2=4$

سوال 11.349: $y=-(x^2+z^2)$

سوال 11.350: $z^2-4x^2-4y^2=4$

سوال 11.351: $16x^2+4y^2=1$

سوال 11.352: $z=x^2+y^2+1$

سوال 11.353: $x^2+y^2-z^2=4$

سوال 11.354: $x=4-y^2$

سوال 11.355: $x^2+z^2=y$

سوال 11.356: $z^2-\frac{x^2}{4}-y^2=1$

سوال 11.357: $x^2+z^2=1$

سوال 11.358: $4x^2+4y^2+z^2=4$

سوال 11.359: $16y^2+9z^2=4x^2$

سوال 11.360: $z=x^2-y^2-1$

سوال 11.361: $9x^2+4y^2+z^2=36$

سوال 11.362: $4x^2+9z^2=y^2$

سوال 11.363: $x^2+y^2-16z^2=16$

سوال 11.364: $z^2+4y^2=9$

سوال 11.365: $z=-(x^2+y^2)$

سوال 11.366: $y^2-x^2-z^2=1$

سوال 11.367: $x^2-4y^2=1$

سوال 11.368: $z=4x^2+y^2-4$

سوال 11.369: $4y^2+z^2-4x^2=4$

سوال 11.370: $z=1-x^2$

سوال 11.371: $x^2+y^2=z$

سوال 11.372: $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$

سوال 11.373: $yz=1$

سوال 11.374: $36x^2+9y^2+4z^2=36$

سوال 11.375: $9x^2+16y^2=4z^2$

سوال 11.376: $4z^2-x^2-y^2=4$

نظریہ اور مثالیں

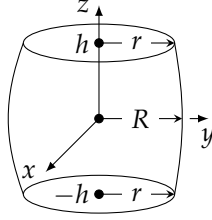
سوال 11.377: (ا) سطح $z=c$ ترخیمی سطح

$$x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

سے رقبہ S کاٹتا ہے۔ اس رقبہ کو متغیر c کا تفاعل لکھیں۔ (ایک ترخیم جس کے نصف محور a اور b ہوں کا رقبہ πab ہوتا ہے۔) (ب) محور z کے عمودی ٹکیاں لیتے ہوئے جزو-ا میں ترخیمی سطح کا حجم تلاش کریں۔ (ج) اب ترخیم ی سطح

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

کا حجم تلاش کریں۔ کیا آپ کا کلیہ $a=b=c$ کی صورت میں کرہ کا حجم دیتا ہے۔

سوال 11.378: محور z کے عمودی سطحیں ترخیمی سطح کے دونوں سروں سے برابر حصے کاٹ کر دکھائی گئی ڈرمی پیدا کرتی ہیں۔ محور کے قائمہ عمودی تراش دائری ہیں۔ ڈرمی کا قد $2h$، وسطی رداس R اور سروں کے رداس r ہیں۔ ڈرمی کے حجم کا کلیہ تلاش کریں۔ اب دو باتوں کی تصدیق کریں۔ کیا ڈرمی کے اطراف سیدھا کرنے سے آپ کا کلیہ، قد $2h$ اور رداس R کے نلکی کا حجم دیتا ہے؟ کیا $r=0$ اور $h=R$ کی صورت میں، جب ڈرمی کی شکل ایک کرہ مانند ہو گی، آپ کا کلیہ کرہ کا حجم دیتا ہے؟

سوال 11.379: سطح $z = h$ قطع مکافی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سے ایک حصہ کاٹتا ہے۔ دکھائیں کہ اس حصے کا حجم، حصہ کے قاعدہ کا نصف ضرب قد کے برابر ہو گا۔ (شکل 11.71 میں $h = c$ کے لئے یہ حصہ دکھایا گیا ہے۔)

سوال 11.380: (ا) سطح $z = 0$ اور سطح $z = h, h > 0$ اور قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) حاصل حجم کو h، S_0 اور S_h کی صورت میں لکھیں۔ قطع زائد سے سطح $z = 0$ اور $z = h$ جن حصوں کو کاٹتے ہیں، ان کے رقبے S_0 اور S_h ہیں۔ (ج) دکھائیں کہ اس حجم کو

$$H = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_h)$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں قطع زائد سے سطح $z = \frac{h}{2}$ جو حصہ کاٹتا ہے، اس کا رقبہ S_m ہے۔

سوال 11.381: سطح $y = y_1$ اور سطح $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ کا خط تقاطع، قطع مکافی ہو گا۔ اس قطع مکافی کا راس اور ماسکہ تلاش کریں۔

سوال 11.382: آپ درج ذیل مساوات میں $z = 0$ لے کر مستوی xy میں منحنی حاصل کرتے ہیں۔

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

یہ منحنی کیسی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.383: اب تک ہم دیکھتے آ رہے ہیں کہ کسی بھی محددی سطح کے متوازی سطح اور مربع سطح کا خط تقاطع، ترخیمی ہوتا ہے۔ کیا یہ محض اتفاق تھا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.384: ایک سطح جو کسی بھی محددی سطح کا متوازی نہیں ہے، مربع سطح کو قطع کرتا ہے۔ ان کا خط تقاطع کیسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11.385 تا سوال 11.388 میں دی گئی وقفہ پر سطحوں کو ترسیم کریں۔ اگر ممکن ہو، سطحوں کے مختلف تطلیل پیش کریں۔

سوال 11.385: $z = y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -0.5 \le y \le 2$

سوال 11.386: $z = 1 - y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

سوال 11.387: $z = x^2 + y^2, \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

سوال 11.388: $z = x^2 + 2y^2$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

ب. $-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$

ج. $-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

د. $-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

سوال 11.389 تا سوال 11.394 کو ترسیم کریں۔ سطح کی صورت سے اس کی قسم دریافت کریں۔

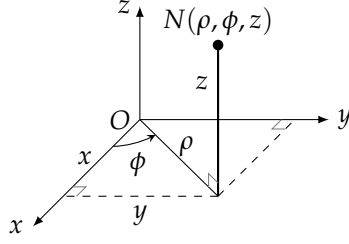
سوال 11.389: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

سوال 11.390: $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

سوال 11.391: $5x^2 = z^2 - 3y^2$

سوال 11.392: $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

سوال 11.393: $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

سوال 11.394: $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

شکل 11.77: فضا میں نقطہ کے نلکی محدد ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔

11.7 نلکی اور کروی محدد

اس حصہ میں فضا کے دو نئے محددی نظام متعارف کرائے جائیں گے جو نلکی محدد اور کروی محدد کہلاتے ہیں۔ نلکی محدد میں نلکی کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ کروی محدد میں کرہ اور ترخیم کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہیں۔ ہم نلکی محدد میں سیاروں کی مدار پر حصہ 12.5 میں غور کریں گے۔

نلکی محدد

ہم xy مستوی میں قطبی محدد کے ساتھ محور z شامل کر کے فضا کی نلکی محدد حاصل کرتے ہیں۔ہم یہاں قطبی محدد کا رداس ρ اور زاویہ ϕ لکھیں گے [31]۔ یوں فضا میں ہر نقطہ کو ایک یا ایک سے زیادہ تین اعداد کی جوڑی (ρ, ϕ, z) مختص کی جا سکتی ہے (شکل 11.77)۔

تعریف: **نلکی محدد**[32] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (ρ, ϕ, z) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

1. ρ اور ϕ مستوی xy میں نقطہ N کے قائمہ تظلیل کے قطبی محدد ہیں،

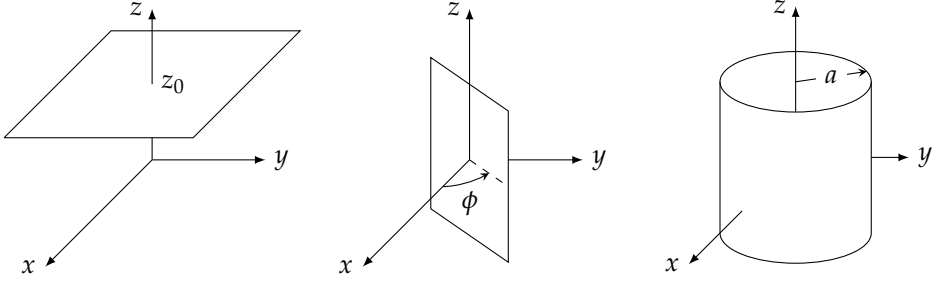
2. z اس نقطہ کا کارتیسی انتصابی محدد ہے۔

□

کارتیسی محدد x ، y ، z اور نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \phi = \frac{y}{x} \tag{11.58}$$

---

[31] تاکہ ہم r اور θ کو کروی محدد کے لئے استعمال کر سکیں
[32] cylindrical coordinates

(ا) نلکی $\rho = a$ کی سطح میں ϕ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔

(ب) مستوی $\phi = \phi_0$ میں ρ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔

(ج) مستوی $z = z_0$ میں ρ اور ϕ تبدیل ہوتی ہیں۔

شکل 11.78: نلکی محدد میں مستقل محدد محددی مساواتیں نلکی اور سطح کو جنم دیتی ہیں۔

نلکی محدد میں مساوات $\rho = a$ نا صرف xy مستوی میں ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے بلکہ یہ ایک z محور کے گرد ایک نلکی کو بھی ظاہر کرتی ہے (شکل 11.78-ا)۔ محور z کو $\rho = 0$ ظاہر کرتی ہے۔ مساوات $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z پایا جاتا ہے اور جو مثبت محور x کے ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہے۔ کارتیسی محدد کی طرح اب بھی مساوات $z = z_0$ ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے جو محور z کے ساتھ قائمہ ہے۔

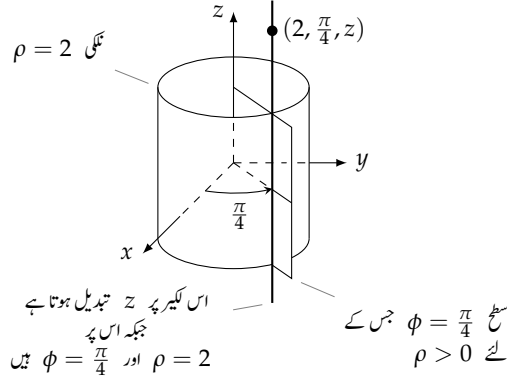
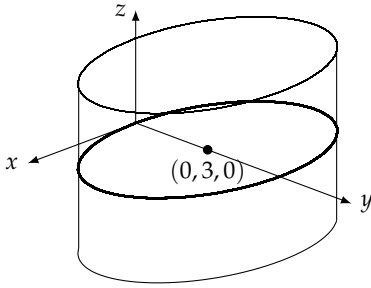
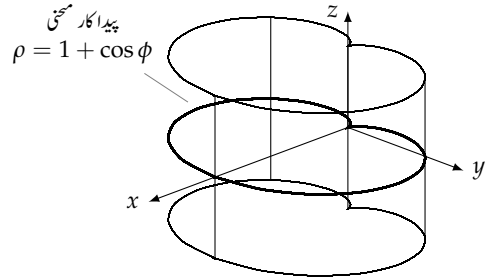
مثال 11.55: کون سے نقاط درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$\rho = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

حل: یہ نقطے اس لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جہاں نلکی $\rho = 2$ سطح $\phi = \frac{\pi}{4}$ کو قطع کرتی ہے اور جہاں ρ مثبت ہے (شکل 11.79)۔ یہ لکیر نقطہ $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ □

مثال 11.56: سطح $\rho = 1 + \cos\phi$ ترسیم کریں۔

حل: اس مساوات میں صرف ρ اور ϕ متغیرات پائے جاتے ہیں جبکہ z متغیر اس میں نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں یہ مساوات ایک ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتی ہے جو ،مستوی $\rho\phi$ میں قلب نما منحنی، $\rho = 1 + \cos\phi$ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ ہم کارتیسی x ، y ، z محور کھینچ کر ان کے قائمہ چند عمودی تراش ترسیم کرتے ہیں۔ ان عمودی تراش کو متوازی لکیروں سے ملا کر سطح حاصل ہو گی (شکل 11.80)۔ □

مثال 11.57: سطح $z = \rho^2$ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے سطح کو پہچانئے۔

شکل 11.79: وہ نقطے جن کے پہلے دو نلکی محدد $\rho = 2$ اور $\phi = \frac{\pi}{4}$ ہوں ایک لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جو z محدد کے متوازی ہے۔

شکل 11.81: نلکی نما برائے مثال 11.59

شکل 11.80: قلب نما مساوات $\rho = 1 + \cos\phi$ فضا میں نلکی کو ظاہر کرتی ہے جس کا عمودی تراش محور z کو قائمہ ہے (مثال 11.56)۔

حل: مساوات 11.58 سے $z=\rho^2=x^2+y^2$ حاصل ہوتا ہے جو دائری قطع مکافی $z=x^2+y^2$ کی مساوات ہے۔
□

مثال 11.58: دائری نلکی $4x^2+4y^2=9$ کی مساوات نلکی محدد میں دریافت کریں۔

حل: یہ نلکی ان نقطوں پر مشتمل ہے جن کا محور z سے فاصلہ $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{2}$ ہے لہٰذا نلکی محدد میں اس سطح کی مساوات $\rho=\frac{3}{2}$ ہو گی۔آئیں اس کو باضابطہ حاصل کریں۔

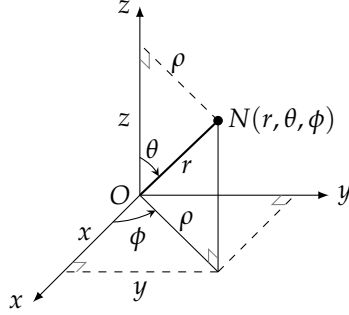
$$
\begin{aligned}
4x^2+4y^2&=9\\
4(\rho\cos\phi)^2+4(\rho\sin\phi)^2&=9 && \text{مساوات } 11.58\\
4\rho^2\cos^2\phi+4\rho^2\sin^2\phi&=9\\
4\rho^2&=9 && \cos^2\phi+\sin^2\phi=1\\
\rho^2&=\frac{9}{4}\\
\rho&=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

□

مثال 11.59: نلکی $x^2+(y-3)^2=9$ کی مساوات نلکی محدد میں معلوم کریں (شکل 11.81)۔

حل: مساوات 11.58 استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2+(y-3)^2&=9\\
(\rho\cos\phi)^2+(\rho\sin\phi-3)^2&=9 && \text{مساوات } 11.58\\
\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi+9-6\rho\sin\phi&=9\\
\rho^2&=6\rho\sin\phi\\
\rho&=6\sin\phi && \text{درکار مساوات}
\end{aligned}
$$

□

شکل 11.82: کروی محدد r ، ϕ ، θ اور کارتیسی محدد x ، y ، z کا تعلق۔

کروی محدد

کروی محدد میں نقطہ N کو زاویوں اور لمبائی سے تعین کیا جاتا ہے (شکل 11.82)۔ نقطہ N کا پہلا محدد $r = \left|\vec{ON}\right|$ ہے جو مبدا O سے N تک فاصلہ دیتا ہے۔ نلکی محدد کے ρ کے برعکس r ہر صورت غیر منفی ہو گا۔ دوسرا محدد θ ہے جو $\vec{ON}$ کا مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ہے جو وقفہ $[0, \pi]$ پر رہنے کا پابند ہے۔ تیسرا محدد ϕ ہے جو عین نلکی محدد ϕ ہے۔

تعریف: **کروی محدد**[33] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (r, θ, ϕ) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

1. مبدا سے N تک فاصلہ r ہے،
2. مثبت محور z کے ساتھ $\vec{ON}$ کا زاویہ θ ہے ($0 \le \theta \le \pi$)،
3. ϕ نلکی محدد کا زاویہ ہے۔

□

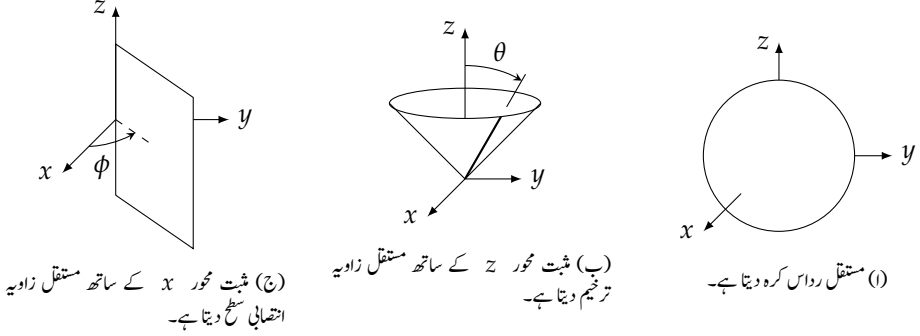
رداس a کے کرہ کی کروی محدد میں مساوات $r = a$ ہو گی جہاں کرہ کا مرکز مبدا پر ہے (شکل 11.83-ا)۔ مساوات $\theta = \theta_0$ ایک ترخیم کو ظاہر کرتی ہے جس کا راس مبدا پر ہے اور جس کا محور z محور پر ہے۔(ہم ترخیم کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے مستوی xy کو ترخیم $\theta = \frac{\pi}{2}$ تصور کرتے ہیں۔) اگر θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ سے زیادہ ہو تب ترخیم نیچے رخ کھلتا ہے۔ کروی محدد میں بالکل نلکی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z شامل ہو اور جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہو۔

---

[33] spherical coordinates

(ا) مستقل رداس کرہ دیتا ہے۔

(ب) مثبت محور z کے ساتھ مستقل زاویہ ترخیم دیتا ہے۔

(ج) مثبت محور x کے ساتھ مستقل زاویہ انتصابی سطح دیتا ہے۔

شکل 11.83: مستقل کروی محدد سے حاصل سطحیں۔

کروی محدد کے کارتیسی اور نلکی محدد کے ساتھ تعلقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\rho = r\sin\theta, \quad x &= \rho\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi,\\
z = r\cos\theta, \quad y &= \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi,\\
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}
\end{aligned} \tag{11.59}$$

مثال 11.60: درج ذیل کرہ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل 11.84)۔

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$$

حل: ہم مساوات 11.59 استعمال کرتے ہوئے x ، y اور z کی کروی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+(z-1)^2 &= 1\\
r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + (r\cos\theta-1)^2 &= 1 && \text{مساوات 11.59}\\
r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}_{1} + r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 &= 1\\
r^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1} &= 2r\cos\theta\\
r^2 &= 2r\cos\theta\\
r &= 2\cos\theta
\end{aligned}$$

□

شکل 11.84: کرہ برائے مثال 11.60

شکل 11.85: ترخیم برائے مثال 11.61

مثال 11.61: ترخیم $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل 11.85)۔

حل: پہلا حل جیومیٹری استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ ترخیم محور z کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور مستوی yz کے ربع اول کو خط $z = y$ میں قطع کرتا ہے۔یوں مثبت z محور اور ترخیم کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہو گا۔ترخیم ان نقطوں پر مبنی ہے جن کے کروی محدد θ کی قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے لہٰذا اس کی مساوات $\theta = \frac{\pi}{4}$ ہو گی۔

دوسرا حل الجبرا استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ہم مساوات 11.59 استعمال کر کے یہی نتیجہ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
r\cos\theta &= \sqrt{r^2 \sin^2\theta} && \text{مثال } 11.60 \\
r\cos\theta &= r\sin\theta && r \geq 0, \sin\theta \geq 0 \\
\cos\theta &= \sin\theta \\
\theta &= \frac{\pi}{4} && 0 \leq \theta \leq \pi
\end{aligned}$$

□

سوالات

نقطوں کے محدد کا تبادلہ

فضا میں نقطہ کے محدد، سوال 11.395 تا سوال 11.404 میں کسی ایک محددی نظام میں دیے گئے ہیں۔ اس نقطہ کے محدد باقی دو محددی نظاموں میں تلاش کریں۔ بعض اوقات ایک سے زیادہ جوابات ممکن ہوں گے۔

سوال 11.395: کارتیسی نظام $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

سوال 11.396: کارتیسی نظام $(x, y, z) = (1, 0, 0)$

سوال 11.397: کارتیسی نظام $(x, y, z) = (0, 1, 0)$

سوال 11.398: کارتیسی نظام $(x, y, z) = (0, 0, 1)$

سوال 11.399: نلکی نظام $(\rho, \phi, z) = (1, 0, 0)$

سوال 11.400: نلکی نظام $(\rho, \phi, z) = (\sqrt{2}, 0, 1)$

سوال 11.401: نلکی نظام $(\rho, \phi, z) = (1, \frac{\pi}{2}, 1)$

سوال 11.402: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$

سوال 11.403: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

سوال 11.404: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{2})$

مساوات اور عدم مساوات کا ایک محددی نظام سے دوسرے محددی نظام میں تبادلہ؛ شکل کی پہچان

سوال 11.405 تا سوال 11.430 میں کسی ایک محددی نظام (کارتیسی، نلکی، کروی) میں دی گئی مساوات اور عدم مساوات کو باقی دو محددی نظام میں لکھیں۔ ان اشکال کو پہچانئے۔

سوال 11.405: $\rho = 0$

سوال 11.406: $x^2 + y^2 = 5$

سوال 11.407: $z = 0$

سوال 11.408: $z = -2$

سوال 11.409: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1$

سوال 11.410: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq z \leq 2$

سوال 11.411: $r \sin\theta \cos\phi = 0$

سوال 11.412: $\tan^2\theta = 1$

سوال 11.413: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

سوال 11.414: $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

سوال 11.415: $r = 5\cos\theta$

سوال 11.416: $r = -6\cos\theta$

سوال 11.417: $\rho = \csc\phi$

سوال 11.418: $\rho = -3\sec\phi$

سوال 11.419: $r = \sqrt{2}\sec\theta$

سوال 11.420: $r = 9\csc\theta$

سوال 11.421: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad z \leq 1$

سوال 11.422: $\rho^2 + z^2 = 4, \quad z \leq -\sqrt{2}$

سوال 11.423: $r = 3, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

سوال 11.424: $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال 11.425: $z = 4 - 4\rho^2, \quad 0 \leq r \leq 1$

سوال 11.426: $z = 4 - \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 4$

سوال 11.427: $\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}$

سوال 11.428: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{7}$

سوال 11.429: $z + \rho^2\cos 2\phi = 0$

سوال 11.430: $z^2 - \rho^2 = 1$

سوال 11.431: درج ذیل کرہ کے مرکز کے کارتیسی محدد تلاش کریں۔

$$\rho^2 + z^2 = 4\rho\cos\phi + 6\rho\sin\phi + 2z$$

سوال 11.432: درج ذیل کرہ کے مرکز کے کارتیسی محدد تلاش کریں۔

$$r = 2\sin\theta(\cos\phi - 2\sin\phi)$$

معین نقطوں کے سلسلہ کی مساوات

سوال 11.433 تا سوال 11.436 میں نقطوں کے سلسلہ کے نلکی محدد دی گئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال 11.433: $\rho = -2\sin\phi$

سوال 11.434: $\rho = 2\cos\phi$

سوال 11.435: $\rho = 1 - \cos\phi$

سوال 11.436: $\rho = 1 + \sin\phi$

سوال 11.437 اور سوال 11.438 میں نقطوں کے سلسلہ کے کروی محدد دی گئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ان سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال 11.437: $r = 1 - \cos\theta$

سوال 11.438: $r = 1 + \cos\theta$

نظریہ اور مثالیں

سوال 11.439: نلکی اور کروی محدد میں افقی سطحیں
(ا) دکھائیں کہ کارتیسی اور نلکی محدد میں مستوی $z = c\ (c \neq 0)$ کی کروی محدد میں مساوات $r = c\sec\theta$ ہو گی۔ (ب) مستوی xy کی کروی محدد میں مساوات تلاش کریں۔

سوال 11.440: کروی محدد میں انتصابی دائری بیلن
بیلن $x^2 + y^2 = a^2$ کی مساوات کروی محدد میں دریافت کریں۔ یہ مساوات $r = f(\theta)$ طرز کی ہو گی۔

سوال 11.441: نلکی محدد میں انتصابی سطح
(ا) دکھائیں کہ محور x کو قائمہ سطحوں کی نلکی محدد میں مساوات کی صورت $\rho = a\sec\phi$ ہو گی۔ (ب) دکھائیں کہ محور y کو قائمہ سطحوں کی نلکی محدد میں مساوات کی صورت $\rho = b\csc\phi$ ہو گی۔

سوال 11.442: (گزشتہ سوال جاری)
سطح $ax+by=c,\ c\neq 0$ کی نلکی محدد میں مساوات تلاش کریں۔ یہ مساوات $\rho=f(\phi)$ طرز کی ہو گی۔

سوال 11.443: تشاکلی
نلکی محدد میں مساوات $\rho=f(z)$ ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس سطح میں کونسی تشاکلی پائی جائے گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 11.444: تشاکلی
کروی محدد میں مساوات $r=f(\theta)$ جس سطح کو ظاہر کرتی ہے اس کی تشاکلی کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 11.445 اور سوال 11.446 میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مساوات کو ρ (نلکی محدد) یا r (کروی محدد) کے لئے حل کریں۔ مثبت جذر کا فقرہ منتخب کرتے ہوئے اس کی سادہ صورت دریافت کریں۔

ب. ρ بالمقابل ϕ اور z یا r بالمقابل θ اور ϕ ترسیم کریں (جیسا مناسب ہو)۔ ترسیم کے لئے دیا گیا وقفہ استعمال کریں۔

ج. جزو-ب کی ترسیم سے کرہ کے مرکز اور رداس کی قیمت کا اندازہ قریبی عدد صحیح تک لگائیں۔

د. دی گئی مساوات کو نلکی یا کروی محدد سے کارتیسی محدد میں تبدیل کریں۔اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں۔مساوات کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے آپ کو قلم و کاغذ کی ضرورت پیش آ سکتی ہے۔ کرہ کی اس مساوات کی صورت $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$ ہو گی۔ جزو-ج میں حاصل قیمت کے ساتھ c کا موازنہ کریں۔

ھ. کرہ کی خفی مساوات جزو-د میں حاصل کی گئی۔ اس کو ترسیم کریں۔ اس ترسیم کا جزو-ب کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 11.445: $\rho^2+z^2=2\rho(\cos\phi+\sin\phi)+2,\quad \frac{\pi}{4}\leq\phi\leq\frac{9\pi}{4},\ -2\leq z\leq 2$

سوال 11.446: $r^2=2r(\cos\phi\sin\theta-\cos\theta)+2,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi,\ 0\leq\theta\leq\pi$

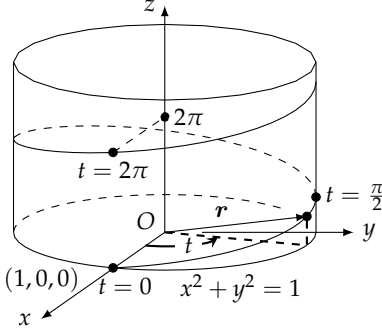
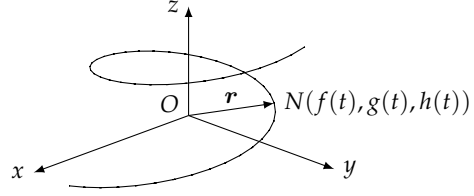
باب 12

سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدد کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامتیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولا، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکے گے۔آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کیپلر دریافت کریں گے۔

12.1 سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ لے کر $\boldsymbol{r}$ میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں (شکل 12.1)۔اگر اس ذرہ کے محدد مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب $\boldsymbol{r}$ بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم تکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ جان سکتے ہیں۔

شکل 12.2: پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کا بالائی نصف حصہ

شکل 12.1: فضا میں متحرک ذرہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = \vec{ON}$ متغیر t کا تفاعل ہو گا۔

تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدد جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{12.1}$$

نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in I$ فضا میں وہ **منحنی** دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی راہ[1] کہتے ہیں۔ مساوات 12.1 اس منحنی کی **مقدار معلوم روپ** ہے۔ مبدا سے ذرے کے **مقام** $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = \vec{ON} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

اس ذرے کا **تعین گر سمتیہ**[2] ہے۔ تفاعل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے **اجزاء** ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران $\boldsymbol{r}$ کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات 12.1 سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر **سمتی تفاعل**[3] یا **سمتی قیمت تفاعل**[4] سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ باب 15 میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفاعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

---

path[1]
position vector[2]
vector function[3]
vector-valued function[4]

ہم حقیقی قیمت تفاعل کو **غیر سمتی تفاعل**[5] کہتے ہیں تا کہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال 12.1: پیچ دار تفاعل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

معین ہے اور $\boldsymbol{r}$ دائری نلکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے (شکل 12.2)۔ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اجزاء جو $\boldsymbol{r}$ کے سر کے x اور y محدد ہیں دائری نلکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}$ اس نلکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے $\boldsymbol{k}$ جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منحنی اوپر بلند ہو گی۔ نلکی کے گرد ایک دائرہ $t = 2\pi$ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات پیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \le t \le \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

□

حد اور استمرار

ہم سمتی قیمت تفاعل کے حد کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کے حد کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل اور $\boldsymbol{L}$ ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایک ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لئے

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \implies \quad \left|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L}\right| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب $\boldsymbol{r}$ کا **حد**[6] $\boldsymbol{L}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$$

□

---

[5] scalar functions
[6] limit

اگر $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$ ہو تب $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t\to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t\to t_0} h(t) = L_3$$

درج ذیل مساوات سمتی تفاعل کا حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \Big(\lim_{t\to t_0} f(t)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to t_0} g(t)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to t_0} h(t)\Big)\boldsymbol{k} \tag{12.2}$$

مثال 12.2: اگر $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} &= \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\Big)\boldsymbol{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

ہم سمتی تفاعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: اگر $\boldsymbol{r}(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 پر $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ ہو تب $\boldsymbol{r}(t)$ اس **نقطہ پر استمراری**[7] ہو گا۔ اگر اپنے پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب یہ تفاعل **استمراری**[8] ہو گا۔

□

چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی تفاعل کو استمرار کے لئے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

ایک نقطہ پر ارکان کے استمرار کا پرکھ

نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

مثال 12.3: (ا) درج ذیل تفاعل اس لئے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

(ب) درج ذیل تفاعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \lfloor t \rfloor \boldsymbol{k}$$

□

---

[7] continuous at a point
[8] continuous

شکل 12.3: لمحات t اور $t+\Delta t$ کے بیچ ایک ذرے کا ہٹاو $\overrightarrow{NQ}=\Delta \boldsymbol{r}$ ہو گا۔ نیا سمتی مجموعہ $\boldsymbol{r}(t)+\Delta \boldsymbol{r}$، ذرے کا نیا مقام $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ دے گا۔

شکل 12.4: پانچ ہموار منحنیات کو ساتھ ساتھ جوڑ کر ٹکڑوں میں ہموار منحنی حاصل کی گئی ہے۔

تفرقات اور حرکت

فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f، g اور h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ایسی صورت میں لمحات t اور $t+\Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

$$\Delta \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

ہو گا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل 12.3)۔

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\\&=[f(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+g(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}]-[f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}]\\&=[f(t+\Delta t)-f(t)]\boldsymbol{i}+[g(t+\Delta t)-g(t)]\boldsymbol{j}+[h(t+\Delta t)-h(t)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیکوقت ہوتے نظر آئیں گے۔ اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}&=\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{i}+\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{j}\\&\quad+\Big[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\Big]\boldsymbol{k}\\&=\Big[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{i}+\Big[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{j}+\Big[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Big]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب t_0 پر f، g اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر $\boldsymbol{r}$ اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو گا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو، اس کا تفرق درج ذیل سمتیہ ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

اگر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو، یعنی جب f ، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیکوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحنی پر $\boldsymbol{r}$ چلتا ہو وہ **ہموار**[9] ہو گی۔

□

سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ جب $\mathbf{0}$ سے مختلف ہو، یہ منحنی کا مماسی سمتیہ ہو گا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحنی کے **مماسی خط** سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحنی پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحنی جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے، ساتھ ساتھ) ملا کر حاصل کی گئی ہو **ٹکڑوں میں ہموار**[10] کہلاتی ہے (شکل 12.4)۔

شکل 12.4 پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لئے بنایا لہٰذا $\Delta\boldsymbol{r}$ آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو $\Delta\boldsymbol{r}$ کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہوتا تب $\Delta\boldsymbol{r}$ چلنے کے مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جو $\Delta\boldsymbol{r}$ کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\Delta\boldsymbol{r}$ جس رخ بھی اشارہ کرتا ہو، $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جب $\mathbf{0}$ نہ ہو، بھی ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ اس طرح ایک ذرہ کی سمتی رفتار کو ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحنی کے لئے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہو گا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحنی پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**[11] ہو گی جو اس منحنی کو مماسی ہو گی۔ کسی بھی لمحہ t پر، $\boldsymbol{v}$ کا رخ **چلنے کا رخ** ہو گا، $\boldsymbol{v}$ کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہو گی، اور تفرق $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ ، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**[12] ہو گی۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہو گا: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہو گی: رفتار $= |\boldsymbol{v}|$

smooth[9]
piecewise smooth[10]
velocity[11]
acceleration[12]

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہو گا: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{سمتی رفتار} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{رفتار})(\text{رخ})$$

مثال 12.4: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

دیتا ہے۔ اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t = 2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

لمحہ $t = 2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}(2)\right| &= \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (-3\cos 2)^2 + (4)^2} = 5 && \text{رفتار} \\
\frac{\boldsymbol{v}(2)}{\left|\boldsymbol{v}(2)\right|} &= -\Big(\frac{3}{5}\sin 2\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{3}{5}\cos 2\Big)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k} && \text{رخ}
\end{aligned}$$

جس لمحہ پر $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ ہو گا۔یوں

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

سے $t = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔ □

قواعد تفرق

چونکہ سمتی تفاعل کے تفرقات جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہٰذا سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی طرح ہو گی۔

سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد

قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ جہاں $\boldsymbol{C}$ ایک مستقل سمتیہ ہے۔

اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u}) = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

قاعدہ مجموعہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ فرق: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ زنجیر: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ جہاں $\boldsymbol{r}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

صلیبی ضرب میں سمتیات کی ترتیب نہایت اہم ہے۔یوں اگر بائیں ہاتھ $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ آئے، تب دائیں ہاتھ بھی $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ایسا نہ کرنے سے قیمت کی علامت تبدیل ہو گی۔

ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

ثبوت : قاعدہ ضرب نقطہ
درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v} &= v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)$$
$$=\underbrace{u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}}+\underbrace{u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}$$

□

ثبوت : قاعدہ ضرب صلیبی
ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

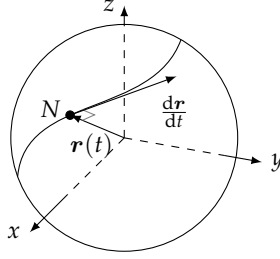
ہو گا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تا کہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے تفرقات پائے جاتے ہوں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\Big[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\Big]$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لئے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کا حد، ان کے حدوں کا سمتی ضرب ہوتا ہے (سوال 12.52)۔ چونکہ t پر $\boldsymbol{v}$ قابل تفرق لہٰذا استمراری ہے، اس لئے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\boldsymbol{v}(t+h)$ کی قیمت $\boldsymbol{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

□

ثبوت : زنجیری قاعدہ
فرض کریں $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل

شکل 12.5: اگر ایک ذرہ ایک کرہ پر یوں حرکت کرتا ہو کہ اس کی مقام $\boldsymbol{r}$ وقت کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب $\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)=0$ ہو گا۔

تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\&=\Big(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\end{aligned}$$

□

مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

ایک کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر جو جسم حرکت کرتا ہو، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی (شکل 12.5)۔ اس کا سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی ہو گا لہٰذا $\boldsymbol{r}$ کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لئے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی درحقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{12.3}$$

□

یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات 12.3 کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|\boldsymbol{u}|$ ایک مستقل قیمت ہے۔ یوں $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{مستقل}) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ لیتے ہوئے}$$

$$2\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{ضرب نقطہ قابل تبادل ہے}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 0$$

مثال 12.5: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور $\boldsymbol{u}$ آپس میں عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{u}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\boldsymbol{u}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{k} + \sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

$$\left|\boldsymbol{u}(t)\right| = \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{+3} = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \sin t\cos t - \sin t\cos t = 0$$

□

سمتی تفاعل کے تکملات

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}(t)$، وقفہ I پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق ہو گا۔ اگر I پر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرق کی صورت $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا (سوال 12.56)۔ وقفہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرقات کا سلسلہ I پر $\boldsymbol{r}$ کا **غیر قطعی تکمل**[13] ہو گا۔

---

[13] indefinite integral

تعریف: متغیر t کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کا غیر قطعی تکمل، $\boldsymbol{r}$ کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ ہو گا، جس کو $\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C} \qquad \text{مستقل سمتیہ ہے } \boldsymbol{C}$$

□

غیر قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال 12.6:

$$\begin{aligned}\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= (\sin t + C_1)\boldsymbol{i} + (t + C_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + C_3)\boldsymbol{k}\\ &= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} - C_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

غیر سمتی تفاعل کے تکمل کی طرح یہاں بھی، درمیانے دو قدم کے بغیر، آپ بائیں ہاتھ سے سیدھا نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔ □

سمتی تفاعل کے قطعی تکمل کی تعریف اس کے اجزاء کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $[a, b]$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کے اجزاء قابل تفرق ہوں تب اس وقفہ پر $\boldsymbol{r}$ بھی قابل تفرق ہو گا اور a تا b سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کا قطعی تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}$$

□

قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے (سوال 12.54)۔

مثال 12.7:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_0^\pi \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int_0^\pi 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= \Big[\sin t\Big]_0^\pi \boldsymbol{i} + \Big[t\Big]_0^\pi \boldsymbol{j} - \Big[t^2\Big]_0^\pi\\ &= [0 - 0]\boldsymbol{i} + [\pi - 0]\boldsymbol{j} - [\pi^2 - 0^2]\boldsymbol{k}\\ &= \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

مثال 12.8: ذرے کے ابتدائی مقام اور ابتدائی سمتی رفتار سے اس کے مقام کا حصول
فضا میں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا سمتی رفتار

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ہے۔اگر لمحہ $t = 0$ پر اس ذرے کا مقام $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ ہو تب لمحہ t پر اس کا مقام کیا ہو گا؟

حل: ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرنا ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$$

حاصل ہوتا ہے۔ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے تکمل کا مستقل $\boldsymbol{C}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\sin 0)\boldsymbol{i} + (\cos 0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

وقت t کے لحاظ سے ذرے کا مقام درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t + 2)\boldsymbol{i} + (\cos t - 1)\boldsymbol{j} + (t + 1)\boldsymbol{k}$$

حاصل نتیجہ کو پرکھنے کی خاطر ہم اس سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t + 0)\boldsymbol{i} + (-\sin t - 0)\boldsymbol{j} + (1 + 0)\boldsymbol{k}\\ &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(0) &= (\sin 0 + 2)\boldsymbol{i} + (\cos 0 - 1)\boldsymbol{j} + (0 + 1)\boldsymbol{k}\\ &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

مستوی xy میں حرکت

سوال 12.1 تا سوال 12.4 میں مستوی xy میں لمحہ t پر ایک ذرے کا مقام $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی راہ کی ترسیم کے x اور y محدد کی مساواتیں تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع سمتیات دریافت کریں۔

سوال 12.1: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}, \quad t = 1$

سوال 12.2: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2+1)\boldsymbol{i} + (2t-1)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{1}{2}$

سوال 12.3: $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\boldsymbol{j}, \quad t = \ln 3$

سوال 12.4: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (3\sin 2t)\boldsymbol{j}, \quad t = 0$

سوال 12.5 تا سوال 12.8 میں مستوی xy میں مختلف منحنیات پر حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ دیا گیا ہے۔ دیے گئے لمحات پر اس ذرے کے سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیات دریافت کریں۔ ان سمتیات کو منحنی پر ترسیم کریں۔

سوال 12.5: دائرہ $x^2+y^2=1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

سوال 12.6: دائرہ $x^2+y^2=16$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (4\cos\frac{t}{2})\boldsymbol{i} + (4\sin\frac{t}{2})\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 12.7: تدویر $x = t-\sin t,\ y = 1-\cos t$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\boldsymbol{i} + (1-\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال 12.8: قطع مکافی $y = x^2+1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2+1)\boldsymbol{j},\ t = -1, 0, 1$

فضا میں سمتی رفتار اور اسراع

سوال 12.9 تا سوال 12.14 میں لمحہ t پر ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔ دئے گئے لمحہ پر اس کی رفتار اور رخ کی قیمت تلاش کریں۔ اس لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار کو رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال 12.9: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 12.10: $\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{3}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 12.11: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

سوال 12.12: $\boldsymbol{r}(t) = (\sec t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + \frac{4}{3}t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال 12.13: $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln(t+1))\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 12.14: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t})\boldsymbol{i} + (2\cos 3t)\boldsymbol{j} + (2\sin 3t)\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 12.15 تا سوال 12.18 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی سمتی رفتار اور اسراع کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال 12.15: $\boldsymbol{r}(t) = (3t+1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3}t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$

سوال 12.16: $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}t)\boldsymbol{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2)\boldsymbol{j}$

سوال 12.17: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+1))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}$

سوال 12.18: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\boldsymbol{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}t\boldsymbol{k}$

سوال 12.19 اور سوال 12.20 میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ دیے گئے وقفہ میں وہ لمحہ یا لمحات تلاش کریں جن پر سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع سمتیہ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

سوال 12.19: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال 12.20: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (\cos t)\boldsymbol{k}, \quad t \ge 0$

سمتی قیمت تفاعل کا تکمل

سوال 12.21 تا سوال 12.26 میں تکمل حاصل کریں۔

سوال 12.21: $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال 12.22: $\int_1^2 \left[(6-6t)\boldsymbol{i} + 3\sqrt{t}\boldsymbol{j} + \frac{4}{t^2}\boldsymbol{k}\right] \mathrm{d}t$

سوال 12.23: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1+\cos t)\boldsymbol{j} + (\sec^2 t)\boldsymbol{k}] \mathrm{d}t$

سوال 12.24: $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + (2\sin t \cos t)\boldsymbol{k}] \mathrm{d}t$

سوال 12.25: $\int_1^4 [\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}] \mathrm{d}t$

سوال 12.26: $\int_0^1 [\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\boldsymbol{k}] \mathrm{d}t$

سمتی تفاعل کے ابتدائی قیمت مسائل

سوال 12.27 تا سوال 12.32 میں t کے سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے ابتدائی قیمت مسائل دیے گئے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال 12.27:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -t\boldsymbol{i} - t\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 12.28:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (180t)\boldsymbol{i} + (180t - 16t^2)\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 12.29:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}(t+1)^{1/2}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{t+1}\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 12.30:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (t^3 + 4t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال 12.31:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -32\boldsymbol{k} \quad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{k} \quad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 8\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

سوال 12.32:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \quad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \quad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{0}$$

ہموار منحنیات کے مماسی خط

ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کا $t = t_0$ پر مماسی خط نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ سے گزرتا ہے اور، t_0 پر اس منحنی کے سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(t_0)$، کا متوازی ہوتا ہے (متن میں بتایا گیا)۔ سوال 12.33 تا سوال 12.36 میں $t = t_0$ پر دیے گئے منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال 12.33: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (t^2 - \cos t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0$

سوال 12.34: $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 4\pi$

سوال 12.35: $\boldsymbol{r}(t) = (a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 2\pi$

سوال 12.36: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (\sin 2t)\boldsymbol{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

دائری راہ پر حرکت

سوال 12.37: اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر ایک ذرہ کے حرکت کو (ا) تا (د) میں دی گئی مساوات ظاہر کرتی ہیں۔ اگرچہ (ا) تا (د) میں ذرے کا راہ ایک ہے، ان راہ پر اس کا حرکی رویہ مختلف ہے۔ ہر راہ پر درج ذیل کے جوابات دیں۔

1. کیا ذرے کی رفتار مستقل ہے؟ اگر ایسا ہو، تب اس کی رفتار کتنی ہے؟

2. کیا ذرے کا سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع آپس میں ہر جگہ عمودی ہیں؟

3. کیا یہ ذرہ اکائی دائرے پر گھڑی کے رخ یا اس کے مخالف رخ گھومتا ہے؟

4. کیا ذرہ نقطہ $(1,0)$ سے ابتدا کرتا ہے؟

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\boldsymbol{i} + \sin(t - \pi/2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

د. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ھ. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t^2)\boldsymbol{i} + \sin(t^2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

سوال 12.38: دکھائیں کہ درج ذیل ابتدائی قیمت سمتی قیمت تفاعل، مستوی $x + y - 2z = 2$ میں رداس 1 کے دائرہ پر حرکت کو ظاہر کرتا ہے جہاں دائرے کا مرکز $(2,2,1)$ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \cos t(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}) + \sin t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$$

خط مستقیم پر حرکت

سوال 12.39: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,2,3)$ پر واقع ہے۔ یہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہوا نقطہ $(4,1,4)$ پہنچتا ہے۔ اس کا رفتار $(1,2,3)$ پر 2 اور اس کی اسراع مستقل $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ دریافت کریں۔

سوال 12.40: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,-1,2)$ پر پایا جاتا ہے اور اس کا رفتار 2 ہے۔ یہ نقطہ $(3,0,3)$ کی طرف یکساں اسراع $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ سے بڑھتا ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 12.41: ایک ذرہ قطع مکافی $y^2 = 2x$ کے بالائی حصہ پر بائیں سے دائیں رخ، 5 اکائیاں فی سیکنڈ کے مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس ذرہ کی سمتی رفتار اس لمحہ پر تلاش کریں جب یہ نقطہ $(2,2)$ سے گزرتا ہے۔

سوال 12.42: ایک ذرہ مستوی xy میں ایک تدویر پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔(اشارہ: پہلے $|\boldsymbol{v}|^2$ اور $|\boldsymbol{a}|^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور بعد میں جذر لیں۔)

سوال 12.43: ایک ذرہ مستوی yz میں ترخیم $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{j} + (2\sin t)\boldsymbol{k}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (بالائی سوال میں اشارہ دیکھیں۔)

سوال 12.44: مصنوعی سیارہ کا دائری مدار

ایک مصنوعی سیارہ جس کی کمیت m ہے ایک جسم جس کی کمیت M ہے کے گرد دائری مدار پر مستقل رفتار v سے طواف کرتا ہے۔دائری مدار کا رداس r_0 ہے۔ اس مصنوعی سیارہ کے مدار کا دوری عرصہ T (ایک چکر کے لئے درکار وقت) درج ذیل اقدام کے ذریعہ تلاش کریں۔

ا. کمیت M کے جسم کو مبدا پر اور لمحہ $t = 0$ پر مصنوعی سیارہ کو محور x پر رکھیں۔حرکت کو گھڑی کے رخ تصور کریں (شکل دیکھیں)۔لمحہ t پر سیارہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ دکھائیں کہ $\theta = \frac{vt}{r_0}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_0 \cos \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{i} + (r_0 \sin \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{j}$$

ب. سیارے کی اسراع معلوم کریں۔

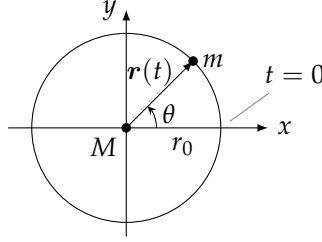
ج. نیوٹن کے قانون تجاذب کے تحت سیارہ پر قوت درج ذیل ہو گی جہاں G تجاذب کا عالمگیر مستقل ہے۔

$$\boldsymbol{F} = \Big(- \frac{GMm}{r_0^2} \Big) \frac{\boldsymbol{r}}{r_0}$$

نیوٹن کے دوسرے قانون سے $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس سے $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ حاصل کریں۔

د. دکھائیں کہ T مساوات $vT = 2\pi r_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہ. جزو-ج اور جزو-د سے درج ذیل حاصل کریں جو دوری عرصہ کا مربع ہے۔

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$

سوال 12.45: فرض کریں $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو تب $|\boldsymbol{v}|$ ایک مستقل ہو گا۔

سوال 12.46: غیر سمتی سہ ضرب کا تفرق

ا. دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} \tag{12.4}$$

ب. دکھائیں کہ مساوات 12.4 درج ذیل کا معادل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} \tag{12.5}$$

مساوات 12.5 کہتی ہے 3 ضرب 3 قابل تفرق مقطع کا تفرق ان تین مقطع کا مجموعہ ہو گا جو ایک وقت میں ایک صف کا تفرق لے کر حاصل کیے گئے ہوں۔اس نتیجہ کو بلند رتبی مقطع تک وسعت دی جا سکتی ہے۔

سوال 12.47: فرض کریں $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h قابل تین رتبی تفرق ہوں۔ مساوات 12.4 یا مساوات 12.5 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\Big) = \boldsymbol{r} \cdot \Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}\Big) \tag{12.6}$$

(اشارہ: بائیں ہاتھ تفرق لے کر ان سمتیات کی نشاندہی کریں جن کے حاصل ضرب صفر ہو۔)

سوال 12.48: قاعدہ مستقل تفاعل
دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ایک ایسا سمتی تفاعل ہو جس کی قیمت مستقل $\boldsymbol{C}$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

سوال 12.49: قواعد غیر سمتی ضرب

ا. دکھائیں اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c کوئی حقیقی عدد ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}(c\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

ب. ثابت کریں کہ اگر t کا $\boldsymbol{u}$ قابل تفرق تفاعل ہو اور t کا f قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

سوال 12.50: قواعد مجموعہ اور فرق
ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

سوال 12.51: ایک نقطہ پر استمرار کا پرکھ اجزاء
دکھائیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ جس کو قاعدہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ بیان کرتا ہو نقطہ t_0 پر تب استمراری ہو گا جب f ، g اور h اس نقطہ پر استمراری ہوں۔

سوال 12.52: سمتی تفاعل کے صلیبی ضرب کا حد
فرض کریں $\boldsymbol{r}_1(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{r}_2(t) = g_1(t)\boldsymbol{i} + g_2(t)\boldsymbol{j} + g_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{A}$ اور $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{B}$ ہیں۔ صلیبی ضرب کا کلیہ مقطع اور غیر سمتی تفاعل کے لئے قاعدہ حد حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

سوال 12.53: قابل تفرق سمتی تفاعل استمراری ہوتے ہیں۔
دکھائیں کہ اگر $t = t_0$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ قابل تفرق ہو تب t_0 پر یہ استمراری بھی ہو گا۔

سوال 12.54: قابل تکمل سمتی تفاعل کے درج ذیل خواص کی تصدیق کریں۔

ا. قاعدہ مستقل غیر سمتی مضرب:

$$\int_a^b k\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{کوئی مستقل ہے } k$$

نفی کا قاعدہ $k = -1$ لے کر حاصل ہو گا:

$$\int_a^b (-\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

ب. قواعد مجموعہ اور فرق:

$$\int_a^b (\boldsymbol{r}_1(t) \mp \boldsymbol{r}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{r}_1(t)\,\mathrm{d}t \mp \int_a^b \boldsymbol{r}_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ج. قاعدہ مستقل سمتیہ مضرب:

$$\int_a^b \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \cdot \int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{کوئی سمتی مستقل ہے } \boldsymbol{C}$$

اور

$$\int_a^b \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C} \times \int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{کوئی سمتی مستقل ہے } \boldsymbol{C}$$

سوال 12.55: غیر سمتی اور سمتی تفاعل کے حاصل ضرب
فرض کریں وقفہ $a \le t \le b$ پر غیر سمتی تفاعل $u(t)$ اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ معین ہیں۔

ا. دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ تب استمراری ہو گا جب $[a,b]$ پر u اور $\boldsymbol{r}$ استمراری ہوں۔

ب. اگر غیر سمتی تفاعل u اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ دونوں $[a,b]$ پر قابل تفرق ہوں تب دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو گا اور مزید درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{r}) = u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

سوال 12.56: سمتی تفاعل کے الٹ تفرقات

ا. غیر سمتی تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 2 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر وقفہ I پر دو سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}_1(t)$ اور $\boldsymbol{R}_2(t)$ کے تفرقات متماثل ہوں تب پورے I پر ان تفاعل میں صرف ایک مستقل سمتی قیمت کا فرق ہو گا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر I پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t)$ ہو تب I پر $\boldsymbol{r}$ کا ہر الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$ کے برابر ہو گا جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا۔

سوال 12.57: احصاء کا بنیادی مسئلہ
احصاء کا بنیادی مسئلہ برائے حقیقی متغیر کا غیر سمتی تفاعل، حقیقی متغیر کے سمتی تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہو گا۔یہ ثابت کرنے کی خاطر غیر سمتی تفاعل کے لئے اس مسئلہ کو استعمال کر کے پہلے دکھائیں کہ اگر $a \le t \le b$ پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب $[a, b]$ پر ہر نقطہ t کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{r}(t)$$

اس کے بعد سوال 12.56 کے جزو-ب کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر $[a, b]$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا $\boldsymbol{R}$ کوئی الٹ تفرق ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 12.58 تا سوال 12.61 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی فضائی راہ کی منحنی ترسیم کریں۔

ب. سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے اجزاء تلاش کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ t_0 پر سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کر کے نقطہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ پر مماسی خط کی مساوات تلاش کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور خط مماس ترسیم کریں۔

سوال 12.58: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 6\pi,\ t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال 12.59: $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}, \quad -2 \le t \le 3,\ t_0 = 1$

سوال 12.60: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\ln(1+t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 12.61: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+2))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} 3t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}, \quad -3 \le t \le 5,\ t_0 = 3$

سوال 12.62 اور سوال 12.63 میں آپ a اور b کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos at)\boldsymbol{i} + (\sin at)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$

کے رویہ پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر کو استعمال کریں۔

سوال 12.62: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $b = 1$ اور $a = 1, 2, 4, 6$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ a کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

سوال 12.63: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $a = 1$ اور $b = 1/4, 1/2, 2, 4$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ b کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

12.2 گولا کی حرکت کی نمونہ کشی

ایک گولا چلانے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ حدف کو مار سکے گا (کیا حدف تک پہنچے گا)؟ یہ گولا کس بلندی تک پہنچے گا (کیا یہ پہاڑی کو پار کر پائے گا)؟ اور یہ حدف پر کتنی دیر میں پہنچے گا (نتائج کب حاصل ہوں گے)؟ یہ تمام معلومات گولے کی ابتدائی سمتیہ رفتار سے نیوٹن کے دوسرے قانون کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

گولا کی حرکت کی مقدار معلوم مثالی مساوات

حرکت گولا کی مثالی مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک ذرہ کی مانند مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس پر صرف مستقل قوت کشش سیدھا نیچے رخ عمل کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ مفروضے درست نہیں ہیں۔ زمین گھومنے کی بنا گولے کے نیچے زمین حرکت میں ہوتی ہے، ہوائی رگڑ جو گولے کی رفتار اور بلندی پر منحصر ہے گولا پر عمل کرتی ہے، اور قوت کشش ایک مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت گولا کی بلندی پر منحصر ہے۔ اگرچہ ان تمام کے اثرات کو بھی دیکھنا ہو گا، ہم یہاں انہیں نظر انداز کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی سمتیہ رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کے ساتھ مبدا سے گولا ربع اول میں مارا جاتا ہے (شکل 12.6)۔ اگر افقی زمین کے ساتھ $\boldsymbol{v}_0$ کا زاویہ α ہو تب

$$\boldsymbol{v}_0 = (|\boldsymbol{v}_0| \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (|\boldsymbol{v}_0| \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{12.7}$$

ہو گا۔ اس میں $|\boldsymbol{v}_0|$ کو سادہ علامت v_0 سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0 \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{12.8}$$

گولا کا ابتدائی مقام درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}_0 = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} \tag{12.9}$$

(ا) لمحہ $t = 0$ پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

(ب) کچھ دیر بعد لمحہ t پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

شکل 12.6: گولا کی مثالی پرواز۔

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے حرکت کے تحت کمیت ضرب اسراع یعنی $m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ عامل قوت کے برابر ہو گا جہاں لمحہ t پر گولے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اگر صرف قوت کشش $-mg\boldsymbol{j}$ عمل کرتی ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} \tag{12.10}$$

ہو گا۔ ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0, \ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{پر} \quad t = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

پہلا تکمل

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(gt)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0$$

دیگا۔ دوسرا تکمل

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$$

دیگا۔ ہم مساوات 12.8 اور مساوات 12.9 سے $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{r}_0$ کی قیمتیں پر کر کے

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \underbrace{(v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)t\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_0 t} + \boldsymbol{0}$$

یعنی

$$\boldsymbol{r} = (v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + \left((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} \tag{12.11}$$

حاصل کرتے ہیں۔

مساوات 12.11 گولے کی مثالی حرکت کی سمتی مساوات ہے۔ زاویہ α گولا **چلانے کا زاویہ** ہے جبکہ v_0 اس کی **ابتدائی رفتار** ہے۔

مساوات 12.11 درج ذیل دو غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12.12}$$

انہیں گولا کی مثالی پرواز کی مقدار معلوم مساوات کہتے ہیں۔ اگر وقت کو سیکنڈوں میں اور فاصلہ کو میٹروں میں ناپا جائے تب $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا اور مساوات 12.12 میں x اور y میٹر میں ہوں گے۔

مثال 12.9: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ گولا 10 سیکنڈ بعد کہاں ہو گا؟

حل: ہم $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60$ ، $g = 9.8$ لیتے ہوئے مساوات 12.12 استعمال کر کے لمحہ $t = 10$ پر گولے کا مقام معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 2500\,\mathrm{m}\\
y &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\\
&= 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10)^2\\
&= 2500\sqrt{3} - 490\\
&\approx 3840\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

گولا چلانے کے دس سیکنڈ بعد 3840 میٹر کی بلندی پر حدف کی طرف 2500 میٹر دور ہو گا۔ □

بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار

ہم مساوات 12.12 سے مثالی گولا کی پرواز کے بارے میں عموماً سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

گولا اپنی بلند ترین مقام پر اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی رفتار کا انتصابی حصہ صفر ہو:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلندتر}} = (v_0 \sin\alpha)\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big) - \frac{1}{2}g\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{12.13}$$

افقی میدان میں داغے گئے گولا کی پرواز کا دورانیہ جاننے کی خاطر ہم مساوات 12.12 میں $y = 0$ پر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0\\
t\Big(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\Big) &= 0\\
t = 0, \quad t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (12.14)
\end{aligned}$$

چونکہ $t = 0$ وہ لمحہ ہے جب گولا داغا گیا لہٰذا $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ وہ لمحہ ہو گا جب گولا واپس زمین پر گرتا ہے۔

گولے کی مار R جاننے کی خاطر ہم مبدا سے گولا گرنے کے مقام تک فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ ہم $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ پر x تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t\\
R &= (v_0 \cos\alpha)\Big(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\Big)\\
&= \frac{v_0^2}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad (12.15)
\end{aligned}$$

زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $\sin 2\alpha = 1$ یعنی $\alpha = 45°$ پر حاصل ہو گا۔

مثال 12.10: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے $60°$ کے زاویہ پر چلایا جاتا ہے۔ گولا کی زیادہ سے زیادہ بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار تلاش کریں (مثال 12.9)۔

حل:

$$
\begin{aligned}
y_{\text{بلند تر}} &= \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g} && \text{زیادہ سے زیادہ بلندی (مساوات 12.13)} \\
&= \frac{(500 \sin 60^\circ)^2}{2(9.8)} \approx 9566\,\mathrm{m} \\
t &= \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} && \text{دورانیہ پرواز (مساوات 12.14)} \\
&= \frac{2(500) \sin 60^\circ}{9.8} \approx 88\,\mathrm{s} \\
R &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha && \text{فاصلہ مار (مساوات 12.15)} \\
&= \frac{(500)^2 \sin 120^\circ}{9.8} \approx 22\,092\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

□

گولا کی مثالی پرواز قطع مکافی ہو گی

ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثالی پرواز، قطع مکافی راہ اپناتی ہے۔ مساوات 12.12 کی ایک جزو سے $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ حاصل کر کے دوسرے جزو میں پر کرتے ہوئے

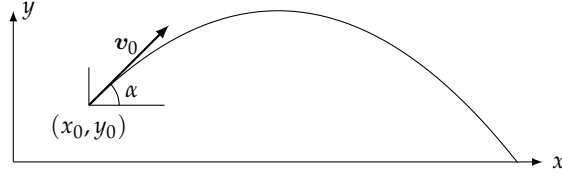
$$y = -\Big(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\Big)x^2 + (\tan \alpha)x$$

حاصل ہوتا ہے جس کی روپ $y = ax^2 + bx$ ہے جو ایک قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانا

مبدا کی بجائے نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانے سے مساوات 12.12 کی جگہ درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی (شکل 12.7) جنہیں آپ سوال 12.82 میں حاصل کریں گے۔

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12.16}$$

مثال 12.11: ایک نشانہ باز $2\,\mathrm{m}$ بلندی سے $30\,\mathrm{m}$ دور درخت پر $20\,\mathrm{m}$ بلندی پر لگائی گئی نشانی کو تیر کا نشانہ بناتا ہے۔ تیر نشانہ پر عین اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ ہو۔ (ا) ابتدائی رفتار v_0 اور زاویہ α کی صورت میں زیادہ سے زیادہ بلندی

شکل 12.7: نقطہ (x_0, y_0) سے ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مارے گئے گولا کی راہ۔

$y_{\text{بلند تر}}$ لکھیں۔ (ب) اگر $y_{\text{بلند تر}} = 20\,\text{m}$ ہو تب جزو-ا کے نتیجہ سے $v_0 \sin\alpha$ معلوم کریں۔ (ج) تیر $30\,\text{m}$ افقی فاصلہ طے کر کے درخت تک پہنچتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $v_0 \cos\alpha$ کی قیمت معلوم کریں۔ (د) تیر کا ابتدائی زاویہ تلاش کریں۔

حل: (ا) ہم نشانہ باز کو مبدا پر تصور کرتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $x_0 = 0$ اور $y_0 = 2$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
y &= y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && \text{مساوات } 12.16\\
&= 2 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && y_0 = 2
\end{aligned}
$$

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ سے وہ لمحہ t تلاش کرتے ہیں جب تیر زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہو گا:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = 2 + (v_0 \sin\alpha)\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big) - \frac{1}{2}g\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big)^2 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

(ب) ہم مساوات 12.16 میں $g = 9.8$ اور $y_{\text{بلند تر}} = 20$ پر کر کے جزو-ا سے

$$20 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(9.8)}$$

یعنی

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(18)(19.6)}$$

(ج) ہم جزو-ا میں حاصل زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت t اور افقی فاصلہ $x = 30\,\text{m}$ مساوات 12.16 میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x &= x_0(\cos\alpha)t && \text{مساوات } 12.16\\
30 &= 0 + (v_0 \cos\alpha)t && x = 30,\ x_0 = 0\\
&= (v_0 \cos\alpha)\Big(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\Big) && t = (v_0 \sin\alpha)/g
\end{aligned}
$$

اس مساوات کو $v_0 \cos \alpha$ کے حل کر کے اس میں جزو-ب کا نتیجہ پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 \cos \alpha = \frac{30g}{v_0 \sin \alpha}$$

(د) ہم جزو-ب اور جزو-ج سے

$$\tan \alpha = \frac{(18)(19.6)}{(30)(9.8)} \approx 0.876$$

یعنی

$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.876) = 50.2^\circ$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

درج ذیل سوالات میں گولا کی حرکت کو مثالی تصور کیا جائے۔ تمام زاویات افقی میدان سے ناپے جائیں گے۔ جہاں اس کے برعکس ذکر نہ کیا گیا ہو، گولا کو مبدا سے افقی میدان میں چلایا جاتا ہے۔

سوال 12.64: ایک گولا 60° زاویہ پر $840\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔یہ حدف کے رخ کتنی دیر میں $21\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرے گا؟

سوال 12.65: ایک توپ کی زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $24.5\,\mathrm{km}$ ہے۔ اس کے نالی میں گولے کی رفتار معلوم کریں۔

سوال 12.66: ایک گولا 45° زاویہ پر $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ (ا) اس کا فاصلہ مار کتنا ہو گا؟ (ب) افقی رخ $5\,\mathrm{km}$ فاصلہ پر گولا کتنا بلند ہو گا؟ (ج) یہ گولا کتنی بلندی تک پہنچے گا؟

سوال 12.67: ایک گیند $10\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے 30° زاویہ اور $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ یہ گیند کب اور کتنے فاصلہ پر زمین کو مس کرے گی؟

سوال 12.68: ایک کھلاڑی $7\,\mathrm{kg}$ کا گولا $2\,\mathrm{m}$ بلندی سے 45° زاویہ پر $13.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکتا ہے۔ یہ گیند کتنی دیر بعد اور کتنے فاصلہ پر زمین پر گرے گی؟

سوال 12.69: اگر سوال 12.68 میں گیند 40° پر پھینکی جاتی تب یہ نسبتاً زیادہ دور گرتی۔ فاصلہ میں اضافہ کتنا ہو گا؟

سوال 12.70: ایک گیند کو 45° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔یہ $10\,\mathrm{m}$ فاصلہ پر گرتا ہے۔ اس کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ کن دو زاویات پر پھینکنے سے اس گیند کا فاصلہ مار $6\,\mathrm{m}$ ہو گا؟

سوال 12.71: ٹیلی ویژن کے ٹیوب میں ایک الیکٹران $5 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے $40\,\mathrm{cm}$ دور ٹیلی ویژن کے شیشہ کے رخ افقی سمت خارج ہوتا ہے۔ یہ الیکٹران شیشہ پر لگنے سے پہلے کتنا نیچے گرتا ہے؟

سوال 12.72: تجربہ گاہ میں گالف گیند کو پرکھنے کے دوران 100 داب[14] کی گیند کو $160\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار پر چلتے ہوئے لاٹھ سے مار کر 9° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند $227\,\mathrm{m}$ دور گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال 12.73: ایک تماش گاہ میں ایک مسخرہ کو انسانی توپ سے $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ توقع کی جاتی ہے کہ یہ $60\,\mathrm{m}$ دور نرم گدی پر جا گرے گا۔ یہ تماش گاہ ایک بڑے کمرہ میں منعقد ہوتا ہے جس کی چھت $23\,\mathrm{m}$ بلند ہے۔ کیا مسخرہ کو یوں داغا جا سکتا ہے کہ یہ چھت کو نہ لگے؟ اگر ایسا ممکن ہو تب توپ کا زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

سوال 12.74: ایک گالف گیند زمین سے 30° پر $35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے روانہ ہوتا ہے۔ کیا یہ $45\,\mathrm{m}$ میٹر دور $15.2\,\mathrm{m}$ اونچے درخت کو پار کر پائے گا؟

سوال 12.75: ایک گیند کو $15\,\mathrm{m}$ کی گہرائی سے 45° پر $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے اچھال کر میدان میں پھینکا جاتا ہے۔یہ گیند کتنا افقی فاصلہ طے کر کے زمین پر گرے گا؟

سوال 12.76: ایک گیند کو $2.5\,\mathrm{m}$ اونچائی سے 40° زاویہ سے نیچے میدان میں پھینکا جاتے ہے۔ یہ ٹھیک $65\,\mathrm{m}$ دور جا گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

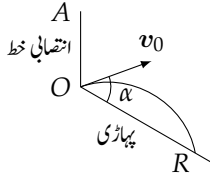
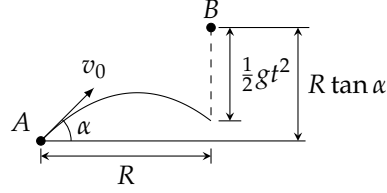
سوال 12.77: کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو $50\,\mathrm{cm}$ اونچائی سے 30° زاویہ پر مارتا ہے۔ یہ گیند $90\,\mathrm{m}$ دور $12\,\mathrm{m}$ اونچی دیوار کو پار کرتی ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 12.78: دکھائیں کہ زاویہ α اور زاویہ $90 - \alpha$ پر داغے گئے گولوں کا فاصلہ مار ایک دوسرے کے برابر ہے۔ (اگر ہوائی رگڑ کو شامل کیا جائے تب ایسا نہیں ہو گا۔)

سوال 12.79: ایک گولا کی ابتدائی رفتار $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اس کا نشانہ $16\,\mathrm{km}$ دور ایک مورچا ہے۔ گولے کی ابتدائی دو ایسے زاویات تلاش کریں جن پر یہ نشانہ کو مار پائے گا۔

سوال 12.80: دکھائیں کہ ابتدائی زاویہ تبدیل کیے بغیر ایک گولا کی ابتدائی رفتار دگنی کرنے سے اس کا فاصلہ مار 4 گنّا ہو گا۔ گولے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور فاصلہ مار دگنی کرنے کے لئے اس کی ابتدائی رفتار کتنے فی صد بڑھانی ہو گی؟

---

[14] 100 compression

شکل 12.9: پہاڑی سے گیند پھینکا جاتا ہے (سوال 12.87)

شکل 12.8: دو گیند (سوال 12.86)

سوال 12.81: دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت کے نصف وقت میں گولا اس اونچائی کے $\frac{3}{4}$ تک پہنچ پاتا ہے۔

سوال 12.82: ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j} \quad t = 0$$

کو مستوی میں سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے لئے حل کرتے ہوئے مساوات 12.16 حاصل کریں۔

سوال 12.83: ابتدائی زاویہ $\alpha = 50.2°$ لیتے ہوئے مثال 12.11 میں تیر کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال 12.84: مثال 12.11 میں تیر کب نشانہ سے $2\,\mathrm{m}$ کے افقی فاصلہ پر ہو گا؟ اس لمحہ یہ کتنا بلند ہو گا؟

سوال 12.85: ایک گیند کو $5\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ کتنی دیر بعد زمین پر گرے گا؟

سوال 12.86: گیند A کو α زاویہ پر v_0 ابتدائی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اسی لمحہ R افقی فاصلہ دور $R\tan\alpha$ اونچائی سے گیند B کو گرنے دیا جاتا ہے (شکل 12.8)۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں گیند کسی بھی v_0 کے لئے ایک دوسرے کو ٹکراتے ہیں۔ کیا یہ اتفاق ہے یا ایسا ہونا لازم ہے؟ جواب پیش کریں۔

سوال 12.87: ایک گیند کو پہاڑی سے نیچے پھینکا جاتا ہے (شکل 12.9)۔ (ا) دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی سمتی رفتار، زاویہ AOR کو نصف میں قطع کرتا ہو۔ (ب) اگر گیند کو پہاڑی پر اوپر پھینکا جائے تب زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی زاویہ کیا ہونا چاہیے؟

سوال 12.88: مبدا سے لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{v}_0$ سمتی رفتار سے ایک مثالی گولا کو داغا جاتا ہے۔ قوت کشش کی بنا اس گولا کی نیچے رخ اسراع $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{k}$ ہو گی۔ لمحہ پر گولے کی سمتی رفتار اور مقام تلاش کریں۔

سوال 12.89: رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت
ایک گولا جس کی کمیت m اور ابتدائی رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کو رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت کا سامنا ہے۔ گولے پر کل قوت $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} - k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

دکھائیں کہ اس کا پہلا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j}$$

اس مساوات کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{(k/m)t}$ سے ضرب دیں۔ بایاں ہاتھ اب ایک تفاعل کا تفرق ہو گا لہٰذا دونوں اطراف قابل تکمل ہوں گے۔ اب دوسرا تکمل لیں۔ تفاعل $e^{(k/m)t}$ کو اس تفرقی مساوات کا جزو تکمل کہتے ہیں۔

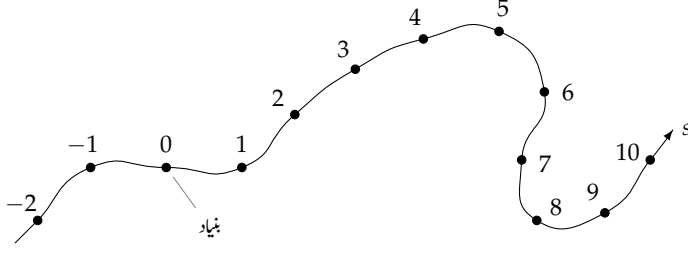
سوال 12.90: ایک گولا کو زمین سے α زاویہ پر v_0 رفتار سے داغا جاتا ہے۔ زاویہ α کو متغیر اور v_0 کو مستقل تصور کریں۔ ہر $\alpha, 0 \le \alpha \le \pi/2$ کے لئے ہمیں قطع مکافی راہ ملی ہے۔ دکھائیں کہ مستوی میں زیادہ سے زیادہ اونچائی کے تمام نقطے درج ذیل ترخیم پر پائے جاتے ہیں جہاں $x \ge 0$ ہے۔

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

12.3 لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لئے اہم ہیں۔ ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔ اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کہ بنا ایسے منحنیات کی اہم ہیں۔

منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔ یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو بنیاد تصور کرتے ہوئے، بنیاد سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s ، سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں (شکل 12.10)۔ یہ محددی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔ متحرک جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لئے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لئے ایک فطری متغیر ہے۔ فضا میں حرکت پر غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

شکل 12.10: ہموار منحنی پر بنیادی نقطہ سے فاصلہ کو پیمانہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}, \; a \le t \le b$ جس پر $t = a$ تا $t = b$ صرف ایک بار چلا جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{12.17}$$

□

مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات 12.17 میں جذر، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t \tag{12.18}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 12.12: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

شکل 12.11: پیچ دار منحنی برائے مثال 12.12

شکل 12.12: منحنی پر بنیاد $N(t_0)$ سے کسی نقطہ $N(t)$ تک فاصلہ $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau$ ہو گا۔

حل: پیچ دار منحنی $t = 0$ سے $t = 2\pi$ تک ایک چکر مکمل کرتی ہے (شکل 12.11)۔اس حصہ کی لمبائی

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b |\boldsymbol{v}| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ہو گی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔ □

اگر ہم ہموار منحنی C ، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو بنیادی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t) = (x(t), y(t), z(t))$ اور **سمت بند فاصلہ**

$$
s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \tag{12.19}
$$

دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا (شکل 12.12)۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t_0)$ سے $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہو گا۔ اگر $t < t_0$ ہو تب $s(t)$ ، فاصلہ کے نفی کا برابر ہو گا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہٰذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا **مقدار معلوم لمبائی قوس** کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

بنیاد $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس

$$
s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2} \, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \tag{12.20}
$$

مثال 12.13: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau && \text{مساوات } 12.20 \\ &= \int_0^t \sqrt{2}\,\mathrm{d}\tau && \text{مساوات 12.12 کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$ ، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$ ، وغیرہ، ہوں گے۔ □

مثال 12.14: ایک لکیر پر لمبائی
دکھائیں اگر $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیہ ہو، تب لکیر

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_3)\boldsymbol{k}$$

پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہو گا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہو گی۔

حل:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_0 + tu_3)\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t |\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\tau = t$$

□

ہموار منحنی پر رفتار

چونکہ مساوات 12.20 میں جذر کے اندر تفرقات استمراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\boldsymbol{v}(t)\right| \tag{12.21}$$

جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی مقدار ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں بنیادی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات 12.21 میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ پر چلتے ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا بنیادی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لئے $|\boldsymbol{v}|$ غیر صفر ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہو گا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

چونکہ زیر بحث منحنیات کے لئے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہے لہٰذا s ایک ایک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے گا (حصہ 7.1)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.22}$$

یوں $\boldsymbol{r}$ متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.23}$$

مساوات 12.23 کہتی ہے کہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\boldsymbol{v}$ کے رخ ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ کو $\boldsymbol{r}$ کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{T}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 12.13)۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

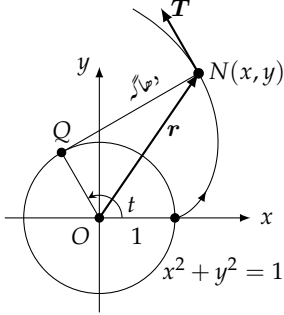
$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{12.24}$$

□

جہاں بھی $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام کی حرکت پر غور میں مستعمل، **متحرک حوالہ چھوکٹے**[15]، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔

---

[15] reference frame

شکل 12.13: ہم v کو $|v|$ سے تقسیم کر کے مماسی اکائی سمتیہ T حاصل کرتے ہیں۔

شکل 12.14: دائرہ پر لپٹے دھاگہ کو کھولتے ہوئے اس کا سر جس راہ پر چلتا ہو، وہ اس دائرے کا در پیچیدہ کہلاتا ہے۔ یہاں اکائی دائرہ مستوی xy میں ہے۔

مثال 12.15: درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

حل:

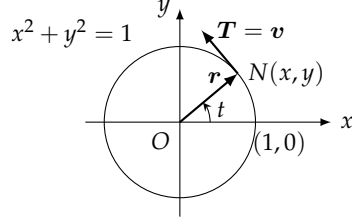
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

□

مثال 12.16: دائرہ کا در پیچیدہ (شکل 12.14)
درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} \qquad t > 0$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} \\
&= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = t \qquad \text{ہے } |t| = t \text{ کی بنا } t > 0 \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{t} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

شکل 12.15: حرکت $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$ برائے مثال 12.17

□

مثال 12.17: اکائی دائرہ

$$\boldsymbol{v}=(-\sin t)\boldsymbol{i}+(\cos t)\boldsymbol{j}$$

کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}$$

کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{v}$ ہے (شکل 12.15)۔ □

سوالات

سوال 12.91 تا سوال 12.98 میں منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔ وقفہ پر منحنی کی لمبائی بھی دریافت کریں۔

سوال 12.91: $\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t)\boldsymbol{i}+(2\sin t)\boldsymbol{j}+\sqrt{5}t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le \pi$

سوال 12.92: $\boldsymbol{r}(t)=(6\sin 2t)\boldsymbol{i}+(6\cos 2t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le \pi$

سوال 12.93: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le 8$

سوال 12.94: $\boldsymbol{r}(t)=(2+t)\boldsymbol{i}-(t+1)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le 3$

سوال 12.95: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t)\boldsymbol{j}+(\sin^3 t)\boldsymbol{k},\quad 0\le t\le \pi/2$

سوال 12.96: $\boldsymbol{r}(t)=6t^3\boldsymbol{i}-2t^3\boldsymbol{j}-3t^3\boldsymbol{k},\quad 1\le t\le 2$

سوال 12.97: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال 12.98: $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

سوال 12.99: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 26π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (5\sin t)\boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$$

سوال 12.100: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے مخالف رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 13π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (12\sin t)\boldsymbol{i} - (12\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$$

سوال 12.101 تا سوال 12.104 میں $t = 0$ سے دور کسی نقطہ پر مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$s = \int_0^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad \text{مساوات } 12.19$$

اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال 12.101: $\boldsymbol{r}(t) = (4\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

سوال 12.102: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

سوال 12.103: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$

سوال 12.104: $\boldsymbol{r}(t) = (1+2t)\boldsymbol{i} + (1+3t)\boldsymbol{j} + (6-6t)\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 0$

سوال 12.105: نقطہ $(0,0,1)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k}$$

سوال 12.106: ہم نے مثال 12.12 میں پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی $2\pi\sqrt{2}$ تلاش کی۔ ایک مربع جس کا ضلع 2π ہو کے وتر کی لمبائی بھی یہی ہو گی۔ دکھائیں کہ جس نلکی پر پیچ دار منحنی کا ایک چکر لپٹا گیا ہے، اس کو انتصابی کاٹ کر سیدھا کرنے سے یہی مربع حاصل ہو گا۔

سوال 12.107:

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (1 - \cos t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ ایک ترخیم ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}$ قائمہ دائری نلکی اور ایک مستوی کا مطقاطع ہے۔ ان قائمہ دائری نلکی اور مستوی کی مساواتیں تلاش کریں۔

ب. نلکی پر ترخیم کا خاکہ کھینچیں اور اس پر نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر اکائی مماسی سمتیات بنائیں۔

ج. دکھائیں کہ سمتیہ اسراع ہر صورت مستوی کو متوازی ہو گا (مستوی کے عمودی سمتیہ کو قائمہ ہو گا)۔ یوں اگر آپ اسراع کو ترخیم کے ساتھ جڑا دکھائیں تب یہ ترخیم کے مستوی میں پایا جائے گا۔ نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر سمتیات اسراع کو خاکہ میں شامل کریں۔

د. ترخیم کی لمبائی کا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کرنے کی کوشش نہ کریں چونکہ یہ ایک غیر بنیادی تکمل ہے۔

ہ. اعدادی ترکیبات سے ترخیم کی لمبائی دو اعشاریہ درست معلوم کریں۔

سوال 12.108: لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے۔
یہ دکھانے کی خاطر کہ لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے، ہم پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی درج ذیل (مختلف) مقدار معلوم مساواتیں استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 4t)\boldsymbol{i} + (\sin 4t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t/2))\boldsymbol{i} + (\sin(t/2))\boldsymbol{j} + (t/2)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}, \quad -2\pi \le t \le 0$

شکل 12.16: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چھوکٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔

شکل 12.17: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ T مڑتا ہے۔نقطہ P پر $|dT/\,ds|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحنا کہتے ہیں۔

12.4 انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چھوکٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل 12.16)۔ اس چھوکٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ T ہے۔ دوسرا N ہے جو $\frac{dR}{ds}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $B=T\times N$ ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left|\frac{dR}{ds}\right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی **انحنا**[16] کہتے ہیں۔ عدد $-(dB/\,ds)\cdot N$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی **مروڑ**[17] کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل 12.16 پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنا ہو گی۔ سمتیات T اور N کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہو گی۔

مستوی منحنی کی انحنا

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $T=\frac{dr}{ds}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ T اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر T کی شرح تبدیلی کو انحنا کہتے ہیں (شکل 12.17)۔ انحنا کو روایتی طور پر یونانی حرف κ (کاپا) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

---

[16] curvature
[17] torsion

تعریف: ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہو، کا تفاعل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

□

اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحنا زیادہ ہو گی۔ اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ صفر کے قریب ہو تب $\boldsymbol{T}$ کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحنا کم ہو گی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہو گی۔

مثال 12.18: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہو گی
سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s| = |\mathbf{0}| = 0$ ہو گا (شکل 12.18)۔ □

مثال 12.19: رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی
ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.19)۔

$$\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (a\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

یوں

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

اور

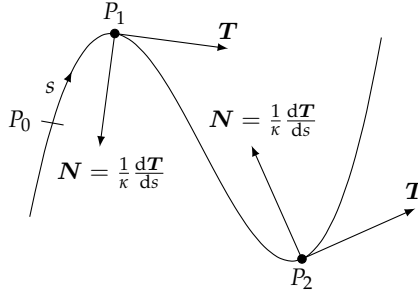
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} - (\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \qquad a > 0 \text{ کی بنا } |a| = a \text{ ہو گا}
\end{aligned}$$

□

شکل 12.18: سیدھے لکیر پر $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کی انحنا $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر ہو گی۔

شکل 12.19: دائرہ برائے مثال 12.19

شکل 12.20: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ ہے۔

صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ $\boldsymbol{T}$ کی لمبائی اکائی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ اور $\boldsymbol{T}$ آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ 12.1)۔ یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا (شکل 12.20)۔

تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

□

موڑ پر سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ دائیں ہو گا اور اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل 12.20)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوال 12.118 میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کے لئے ہو گی لہٰذا $\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|}\\ &= \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\mathrm{d}s|}\\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|}\end{aligned} \tag{12.25}$$

اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر $\boldsymbol{N}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال 12.20: درج ذیل دائری حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم پہلے $\boldsymbol{T}$ دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j},\\ |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2,\\ \boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\\ &= -(\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

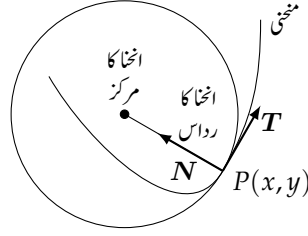
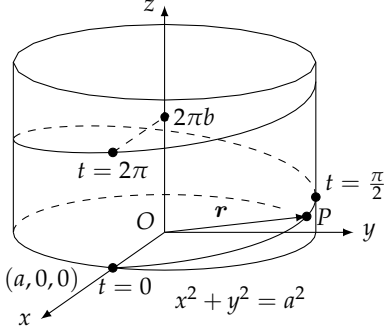
یوں

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -(2\cos 2t)\boldsymbol{i} - (2\sin 2t)\boldsymbol{j},\\ \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2\end{aligned}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}t|}\\ &= -(\cos 2t)\boldsymbol{i} - (\sin 2t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

□

شکل 12.22: مثبت a ، b کے لئے $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$

شکل 12.21: نقطہ $P(x, y)$ پر دائرہ انحنا منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔

انحنا کا دائرہ اور انحنا کا رداس

مستوی منحنی پر نقطہ P جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، **دائرہ انحنا**[18] سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

ا. نقطہ P پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

ب. نقطہ P پر اس کی انحنا اور منحنی کی انحنا ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل 12.21)۔

نقطہ P پر منحنی کے **رداس انحنا**[19] سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انحنا کا رداس ہے، جو مثال 12.19 کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$\text{رداس انحنا} = \rho = \frac{1}{\kappa} \tag{12.26}$$

رداس انحنا جاننے کے لئے ہم κ معلوم کر کے اس کا بالعکس تناسب لیتے ہیں۔ نقطہ P پر **مرکز انحنا**[20] سے مراد یہاں کے دائرہ انحنا کا مرکز ہو گا۔

---

[18] circle of curvature
[19] radius of curvature
[20] center of curvature

فضائی منحنیات کی انحنا اور عمودی سمتیات

مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لئے مقدار معلوم لمبائی قوس s ، مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحنا سے مراد

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{12.27}$$

لیتے ہیں۔ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \tag{12.28}$$

مثال 12.21: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحنا دریافت کریں (شکل 12.22)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}\\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}\\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

اب زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}[-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}]
\end{aligned}$$

زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}\right|\\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{12.29}$$

ہم مساوات 12.29 سے دیکھتے ہیں کہ مستقل a کے لئے b بڑھانے سے انحنا کم ہوتی ہے۔ مستقل b کے لئے a کم کرنے سے بھی انحنا آخر کار انحنا کم کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر $b = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس a اور انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی۔ اگر $a = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی، محور z پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحنا 0 ہو گی۔ □

مثال 12.22: گزشتہ مثال میں منحنی کے لئے $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}] && \text{12.21 مثال}\\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} && \text{12.28 مساوات}\\
&= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]\\
&= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□

مروڑ اور دوہری عمودی سمتیہ

فضا میں منحنی کا **دوہری عمودی سمتیہ**[21] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے جو $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ دونوں کو عمودی ہو گا (شکل 12.23)۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چھوکٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

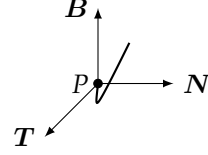
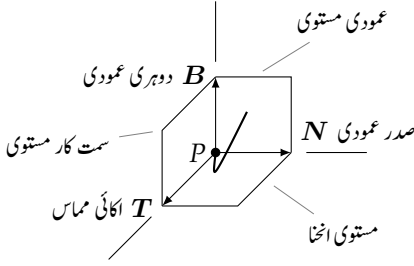
سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} \tag{12.30}$$

[21] binormal vector

شکل 12.24: سمتیات T ، N ، B کے پیدا تین مستوی کے نام۔

شکل 12.23: سمتیات T ، N اور B (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں۔

چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا۔

چونکہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{T}$ کے مستوی کو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ عمودی ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کے متوازی ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا مستقل مضرب ہو گا۔ اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau \boldsymbol{N}$$

لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی τ ، منحنی پر مروڑ کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$ ہے۔ تب ہموار منحنی کا تفاعل **مروڑ**[22] درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

□

انحنا κ کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ τ مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

منحنیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل 12.24)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحنا $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر $\boldsymbol{T}$ کے لحاظ سے سطح منحنی انحنا کی مڑنے کی شرح کو مروڑ $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیمائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

---

[22] torsion

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی بنا کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی بنا پیدا ہوتی ہے۔ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے لئے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2\boldsymbol{N}
\end{aligned}$$

اس کو

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{T} \tag{12.31}$$

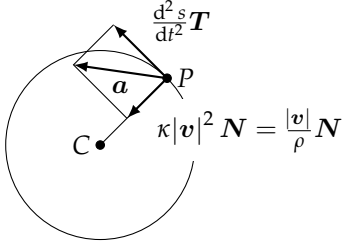
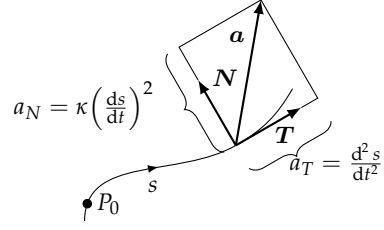
لکھا جا سکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو a_T اور غیر سمتی عمودی جزو a_N درج ذیل ہوں گے۔

$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|, \qquad a_N = \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{12.32}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 12.31 میں $\boldsymbol{B}$ نہیں پایا جاتا ہے۔ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کی عمودی پائی جائے گی۔یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ $\kappa(\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t)^2$ ہو گی (شکل 12.25)۔

ہم مساوات 12.32 سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع $\boldsymbol{a}$ سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو a_T سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو a_N ہمیں $\boldsymbol{v}$ کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ a_N انحنا ضرب رفتار کا مربع ہو گا۔اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ $|\boldsymbol{v}|$) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی κ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحنا کے لئے چار گنّا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے (شکل 12.26)۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ صفر ہو گا اور تمام اسراع $\boldsymbol{N}$ کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب $\boldsymbol{a}$ کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔

شکل 12.26: ایک جسم جس کی رفتار ایک دائری راہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے بڑھ رہی ہو کے اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ دائرہ کا رداس ρ ہے۔

شکل 12.25: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ اسراع $\boldsymbol{a}$ ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کے عمودی پایا جاتا ہے۔

اسراع کا عمودی جزو a_N معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ استعمال کرتے ہیں جو a_N کے لئے مساوات $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر κ معلوم کیے، a_N معلوم کر سکتے ہیں۔

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{12.33}$$

مثال 12.23: درج ذیل حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ حاصل کئے بغیر اسراع $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

یہ راہ شکل 12.27 میں دکھائے دائرہ کا در پیچیدہ ہے۔

حل: ہم پہلے مساوات 12.32 سے a_T حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \qquad \text{مثال } 12.16$$

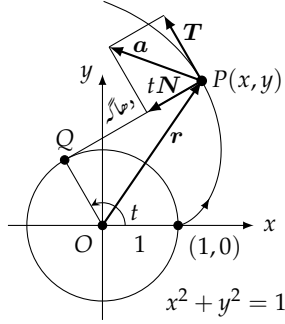
$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \text{مساوات } 12.32$$

اب مساوات 12.33 استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{کچھ الجبرا کے بعد}$$

$$\begin{aligned} a_N &= \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \\ &= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t \end{aligned}$$

شکل 12.27: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء (مثال 12.23)

اس کے بعد ہم مساوات 12.31 سے $\boldsymbol{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}$$

□

انحنا اور مروڑ کے کلیات

ہم اب ہموار منحنیات کے انحنا اور مروڑ تلاش کرنے کے چند کلیات پیش کرتے ہیں جو استعمال میں آسان ثابت ہوتے ہیں۔ مساوات 12.31 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} &= \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\Big)\times\Big[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T}+\kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^2\boldsymbol{N}\Big] && \text{مساوات 12.24 سے } \boldsymbol{v}=\tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\\
&= \Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\Big)(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T})+\kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^3(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})\\
&= \kappa\Big(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big)^3\boldsymbol{B} && \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

یوں

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}| = \kappa\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|^3|\boldsymbol{B}| = \kappa|\boldsymbol{v}|^3 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}| \text{ اور } |\boldsymbol{B}|=1$$

ہو گا جس کو κ کے لئے حل کر کے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

انحنا کا سمتی کلیہ

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} \tag{12.34}$$

مساوات 12.34 ہمیں منحنی پر چلتے ہوئے سمتی رفتار جہاں $\boldsymbol{v}$ غیر صفر ہو اور اسراع کی کسی بھی روپ سے انحنا، جو منحنی کی جیومیٹریائی خاصیت ہے، دیتی ہے۔ ذرہ رک کر اس حیرت کن حقیقت پر غور کریں۔ منحنی پر حرکت کے کسی بھی کلیہ سے، چاہے حرکت کتنا بھی متغیر کیوں نہ ہو (جب تک $\boldsymbol{v}$ صفر نہ ہو)، ہم منحنی کی طبعی خاصیت دریافت کر سکتے ہیں جس کا ظاہری طور پر منحنی پر چلنے سے کوئی تعلق نہیں ہے۔

مروڑ کا ایک مقبول کلیہ جو اعلیٰ نصاب میں حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہے جہاں ایک نقطہ، t کے لحاظ سے ایک تفرق کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ اور $\dddot{x}=\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}$ ہوں گے۔

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|^2} \tag{12.35}$$

جہاں $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ہو

یہ کلیہ $\boldsymbol{r}$ کے تفاعل اجزاء $x=f(t)$ ، $y=g(t)$ اور $z=h(t)$ سے مروڑ دیتا ہے۔ مقطع کا پہلا صف $\boldsymbol{v}$ سے، دوسرا صف $\boldsymbol{a}$ سے اور تیسرا صف $\dot{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال 12.24: درج ذیل پیچ دار کا κ اور τ مساوات 12.34 اور مساوات 12.35 سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k},\quad a,b\geq 0,\ a^2+b^2\neq 0$$

حل: ہم انحنا کو مساوات 12.34 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=-(a\sin t)\boldsymbol{i}+(a\cos t)\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{a}&=-(a\cos t)\boldsymbol{i}-(a\sin t)\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}\\ &=(ab\sin t)\boldsymbol{i}-(ab\cos t)\boldsymbol{j}+a^2\boldsymbol{k},\\ \kappa&=\frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3}=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}\end{aligned} \tag{12.36}$$

مساوات 12.36 اور مساوات 12.29 جہاں ہم نے انحنا کو اس کی تعریف سے حاصل کیا، ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں۔

مروڑ کے لئے مساوات 12.35 استعمال کرنے سے پہلے ہم مقطع کے اندراج تلاش کرتے ہیں۔ ہم $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ جانتے ہیں لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}=(a\sin t)\boldsymbol{i}-(a\cos t)\boldsymbol{j}$$

ہو گا۔یوں مروڑ درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\left|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\right|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} \quad \text{مساوات 12.36 کی قیمتیں}$$

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2} \tag{12.37}$$

□

ہم مساوات 12.37 سے دیکھتے ہیں کہ دائری نلکی پر پیچ دار راہ کا مروڑ مستقل ہو گا۔درحقیقت فضا میں تمام منحنیات میں پیچ دار منحنی کی نشانی اس کی مستقل انحنا اور مستقل مروڑ ہیں۔

ڈی این اے[23] زندگی کا بنیادی سالمہ ہے۔ یہ دو پیچ دار حصوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے کے گرد لپٹے ہوتے ہیں۔ لپٹی صورت کی بنا سالمہ بہت کم جگہ لیتی ہے اور خرابی کی صورت میں (مستقل انحنا اور مروڑ کی بنا) خراب حصہ کو سالماتی قینچی سے کاٹا جا سکتا ہے۔سالماتی قینچی استعمال کرتے ہوئے سائنس دان امید رکھتے ہیں کہ وہ انسانیت کو ہر قسم کی بیماری سے نجات دے پائیں گے۔

فضا میں منحنیات کے کلیات

[23] DNA

اکائی مماسی سمتیہ	$\boldsymbol{T}=\dfrac{\boldsymbol{v}}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert}$
صدر اکائی عمودی سمتیہ	$\boldsymbol{N}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t\rvert}$
دوہری عمودی سمتیہ	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$
انحنا	$\kappa=\left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right\rvert=\dfrac{\lvert\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\rvert}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert^3}$
مروڑ	$\tau=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{N}=\dfrac{\begin{vmatrix}\dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z}\\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z}\end{vmatrix}}{\lvert\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}\rvert^2}$
اسراع	$\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$
اسراع کا مماسی جزو	$a_T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lvert\boldsymbol{v}\rvert$
اسراع کا عمودی جزو	$a_N=\kappa\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2=\sqrt{\lvert\boldsymbol{a}\rvert-a_T^2}$

سوالات

مستوی منحنیات

سوال 12.109 تا سوال 12.112 میں مستوی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور κ تلاش کریں۔

سوال 12.109: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(\ln\cos t)\boldsymbol{j},\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

سوال 12.110: $\boldsymbol{r}(t)=(\ln\sec t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j},\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$

سوال 12.111: $\boldsymbol{r}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+(5-t^2)\boldsymbol{j}$

سوال 12.112: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j},\quad t>0$

سوال 12.113 اور سوال 12.114 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ معلوم کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 12.113: $\boldsymbol{r}(t)=(2t+3)\boldsymbol{i}+(t^2-1)\boldsymbol{j}$

سوال 12.114: $\boldsymbol{r}(t)=\ln(t^2+1)\boldsymbol{i}+(t-2\tan^{-1}t)\boldsymbol{j}$

سوال 12.115: مستوی xy میں تفاعل کی ترسیم کی انحنا کا کلیہ۔

ا. مستوی xy میں ترسیم $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = x, y = f(x)$ ہے اور سمتی کلیہ $r(t) = xi + f(x)j$ ہو گا۔ اگر f دو بار قابل تفرق ہو تب اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

ب. جزو-ا میں κ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $y = \ln(\cos x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کی انحنا تلاش کریں۔اپنے جواب کا سوال 12.109 کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. دکھائیں کہ نقطہ تصریف پر انحنا صفر ہو گی۔

سوال 12.116: مستوی میں مقدار معلوم روپ میں دی گئی منحنی کی انحنا کا کلیہ

ا. دکھائیں کہ دو بار قابل تفرق تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ پر مبنی ہموار منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کی انحنا درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنیات کے انحنا تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + (\ln \sin t)j, \quad 0 < t < \pi$

ج. $r(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]i + (\ln \cosh t)j$

سوال 12.117: مستوی منحنیات کے عمود

ا. دکھائیں کہ نقطہ $(f(t), g(t))$ پر منحنی $r(t) = f(t)i + g(t)j$ کے عمودی سمتیات $n(t) = -g'(t)i + f'(t)j$ اور $-n(t) = g'(t)i - f'(t)j$ ہیں۔ کسی مخصوص مستوی کا N تلاش کرنے کی خاطر ہم n اور $-n$ میں جو مقعر رخ ہو کو منتخب کر کے اس سے اکائی سمتیہ حاصل کرتے ہیں (شکل 12.20)۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا N تلاش کریں۔

ب. $r(t) = ti + e^{2t}j$

ج. $r(t) = \sqrt{4 - t^2}i + tj, \quad -2 \le t \le 2$

سوال 12.118:

ا. منحنی $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+\frac{t^3}{3}\boldsymbol{j}$ کا $\boldsymbol{N}$ وقفہ $t<0$ اور وقفہ $t>0$ پر سوال 12.117 کے کلیہ سے حاصل کریں۔

ب. جزو-ا میں منحنی کے لئے

$$\boldsymbol{N}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|},\quad t\neq 0$$

حاصل کریں۔ کیا $t=0$ پر $\boldsymbol{N}$ موجود ہے؟ اس منحنی کو ترسیم کریں اور منفی سے مثبت جانب گزرتے ہوئے $\boldsymbol{N}$ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

فضائی منحنیات

سوال 12.119 تا سوال 12.126 میں فضائی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ اور τ دریافت کریں۔

سوال 12.119: $\boldsymbol{r}(t)=(3\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4t\boldsymbol{k}$

سوال 12.120: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos t+t\sin t)\boldsymbol{i}+(\sin t-t\cos t)\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

سوال 12.121: $\boldsymbol{r}(t)=(e^t\cos t)\boldsymbol{i}+(e^t\sin t)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال 12.122: $\boldsymbol{r}(t)=(6\sin 2t)\boldsymbol{i}+(6\cos 2t)\boldsymbol{j}+5t\boldsymbol{k}$

سوال 12.123: $\boldsymbol{r}(t)=\frac{t^3}{3}\boldsymbol{i}+\frac{t^2}{2}\boldsymbol{j},\quad t>0$

سوال 12.124: $\boldsymbol{r}(t)=(\cos^3 t)\boldsymbol{i}+(\sin^3 t)\boldsymbol{j},\quad 0<t<\frac{\pi}{2}$

سوال 12.125: $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(a\cosh\frac{t}{a})\boldsymbol{j},\quad a>0$

سوال 12.126: $\boldsymbol{r}(t)=(\cosh t)\boldsymbol{i}-(\sinh t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k}$

سوال 12.127 اور سوال 12.128 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a}=a_T\boldsymbol{T}+a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 12.127: $\boldsymbol{r}(t)=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j}+bt\boldsymbol{k}$

سوال 12.128: $\boldsymbol{r}(t)=(1+3t)\boldsymbol{i}+(t-2)\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}$

سوال 12.129 اور سوال 12.132 میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر، دیے گئے t پر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال 12.129: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال 12.130: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 12.131: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t + \frac{t^3}{3})\boldsymbol{j} + (t - \frac{t^3}{3})\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 12.132: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال 12.133 اور سوال 12.134 میں دیے گئے $\boldsymbol{r}$ پر $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ معلوم کریں۔اس کے بعد در پیچیدہ مستوی، عمودی مستوی اور سمت کار مستوی کی مساوات اس t پر حاصل کریں۔

سوال 12.133: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال 12.134: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

طبعی استعمال

سوال 12.135: آپ کی گاڑی کا رفتار پیا برقرار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھا رہا ہے۔ کیا آپ کی اسراع ممکن ہے؟ جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.136: کیا مستقل رفتار سے چلتے ہوئے ذرہ کی اسراع کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.137: ایک ذرہ کی اسراع ہر لمحہ اس کی سمتی رفتار کے عمودی ہے۔ اس کی رفتار کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.138: ایک جسم جس کی کمیت m ہے قطع مکافی $y = x^2$ پر مستقل رفتار $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ نقطہ $(0,0)$ اور نقطہ $(\sqrt{2}, 2)$ پر اسراع کی بدولت اس پر کتنی قوت ہو گی؟ اپنا جواب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کی روپ میں لکھیں۔ (نیوٹن کا کلیہ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ذہن میں رکھیں۔)

سوال 12.139: ایک منحنی پر کسی جسم کو مستقل رفتار سے حرکت دینے کے لئے درکار قوت، قوانین نیوٹن کے تحت، حرکت کی انحنا کی مستقل مضرب ہو گی۔ حساب سے دکھائیں کہ یہ فقرہ کیوں درست ہے۔

سوال 12.140: دکھائیں اگر ایک ذرے کی اسراع کا عمودی جزو صفر ہو تب یہ متحرک ذرہ سیدھا حرکت کرے گا۔

انحنا پر مزید سوالات

سوال 12.141: دکھائیں کہ قطع مکافی $y = ax^2,\ a \neq 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا راس کی راس پر ہو گی جبکہ کسی بھی نقطہ پر کم سے کم انحنا نہیں ہو گی۔ (چونکہ منحنی کو فضا میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے یا گھمانے سے انحنا تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہ حقیقت کسی بھی قطع مکافی کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 12.142: دکھائیں کہ ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا اس کی محور اکبر پر اور کم سے کم انحنا اس کی محور اصغر پر ہو گی۔ (گزشتہ سوال کی طرح یہ حقیقت بھی ہر ترخیم کے لئے درست ہو گا۔)

سوال 12.143: پیچ دار منحنی کی زیادہ سے زیادہ انحنا
ہم نے مثال 12.21 میں دیکھا کہ پیچ دار $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k},\ (a, b \geq 0)$ کی انحنا $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ ہو گی۔ کسی بھی b کے لئے زیادہ سے زیادہ انحنا کتنی ہو گی؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.144: اگر آپ کو $|a_N|$ اور $|\boldsymbol{v}|$ معلوم ہوں تب کلیہ $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2$ سے انحنا حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کی انحنا اور رداس انحنا دریافت کریں۔ (a_N اور $|\boldsymbol{v}|$ کی قیمتیں مثال 12.23 سے لیں۔)

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

سوال 12.145: دکھائیں کہ درج ذیل خط کے لئے κ اور τ صفر ہوں گے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + At)\boldsymbol{i} + (y_0 + Bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + Ct)\boldsymbol{k}$$

سوال 12.146: مکمل انحنا
ہم ایک منحنی پر $s = s_0$ سے $s = s_1 > s_0$ تک حصہ کی مکمل انحنا حاصل کرنے کی خاطر s_0 تا s_1 انحنا κ کا تکمل لیتے ہیں۔ اگر منحنی کا متغیر s کی بجائے t ہو تب مکمل انحنا درج ذیل ہو گی، جہاں s_0 اور s_1 کے مطابقتی قیمتیں t_0 اور t_1 ہیں۔

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa \,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\boldsymbol{v}| \,\mathrm{d}t$$

وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کی مکمل انحنا معلوم کریں۔

سوال 12.147: گزشتہ سوال جاری
درج ذیل منحنیات کی مکمل انحنا دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b\ (a > 0)$ (انحنا معلوم کرنے کا آسان طریقہ سوال 12.144 میں پیش کیا گیا ہے۔ مثال 12.23 کی قیمتیں استعمال کریں۔)

ب. $y = x^2, \quad -\infty < x < \infty =$

سوال 12.148:

ا. نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 1)$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔ (یہ مستوی xy میں $y = \sin x$ کی مقدار معلوم روپ ہے۔)

ب. نقطہ $(0, -2)$ جہاں $t = 1$ ہے پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln t)\boldsymbol{i} - (t + \frac{1}{t})\boldsymbol{j},\ e^{-2} \le t \le e^2$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 12.149: مستوی منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ جو کافی قابل تفرق ہو کی مروڑ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.150: پیچ دار کی مروڑ
ہم نے مثال 12.24 میں دیکھا کہ پیچ دار

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \ge 0$$

کی انحنا $\frac{b}{a^2+b^2}$ ہے۔ کسی مستقل a کے لئے τ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.151: صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔
صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔ یہ اس حقیقت کی ایک مخصوص صورت ہے کہ ایک ذرہ جس کی سمتی رفتار کسی مقررہ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کی عمودی ہو، ایسی مستوی میں حرکت کرتا ہے جو C کو عمودی ہو گا، اور یہ حقیقت از خود درج ذیل مسئلہ کا حل ہے۔

فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ دو بار قابل تفرق ہو، اور $t = a$ پر $\boldsymbol{r} = 0$ ہو اور $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ ہو تب $[a, b]$ میں تمام t پر $h(t) = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کو حل کریں۔ (اشارہ: اسراع $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ سے شروع کریں اور ابتدائی معلومات الٹ رخ لاگو کریں۔)

سوال 12.152: ایک کلیہ جو $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{v}$ سے τ حاصل کرتا ہے
اگر ہم تعریف $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$ سے شروع کر کے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کو زنجیری قاعدہ سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

لکھیں تب ہمیں درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\cdot \boldsymbol{N}\Big)$$

یہ کلیہ استعمال میں، اخذ کرنے میں اور بیان کرنے میں مساوات 12.35 سے زیادہ آسان ہے۔ اس میں قباحت یہ ہے کہ کمپیوٹر کے بغیر اسے استعمال کرنے میں بہت زیادہ کام کرنا ہو گا۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مثال 12.24 میں پیچ دار کی مروڑ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال مروڑ کا کلیہ

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}$$

جسے ہم نے سوال 12.115 میں اخذ کیا، دو بار قابل تفرق مستوی منحنی $y = f(x)$ کی انحنا κ کو x کا تفاعل دیتا ہے۔ سوال 12.153 تا سوال 12.156 میں دی گئی منحنیات کا تفاعل انحنا تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر $\kappa(x)$ اور $f(x)$ کو ترسیم کریں۔ آپ چند دلچسپ حقائق دیکھیں گے۔

سوال 12.153: $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

سوال 12.154: $y = \frac{x^4}{4}, \quad -2 \le x \le 2$

سوال 12.155: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

سوال 12.156: $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

دائرہ انحنا

سوال 12.157 تا سوال 12.164 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے مستوی منحنی میں نقطہ P پر، جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، دائرہ انحنا پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مستوی منحنی کی صورت دیکھنے کی خاطر دیے گئے وقفہ پر منحنی ترسیم کریں۔

ب. دیے گئے نقطہ t_0 پر منحنی کی انحنا κ کی قیمت سوال 12.115 یا سوال 12.116 میں دیے کلیہ سے معلوم کریں۔ اگر منحنی بطور تفاعل $y = f(x)$ دی گئی ہو تب اس کی مقدار معلوم روپ $x = t, y = f(t)$ استعمال کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔دھیان رہے کہ t_0 پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا گھڑی کے رخ یا گھڑی کے رخ کے مخالف رخ گھومنا، $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء کی علامتیں تعین کرتا ہے (سوال 12.117)۔

د. اگر مبدا سے دائرہ انحنا کے مرکز (a, b) تک سمتیہ $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب مرکز $\boldsymbol{C}$ درج ذیل سمتی مساوات سے معلوم کریں۔

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{N}(t_0)$$

منحنی پر نقطہ $P(x_0, y_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔

ھ. دائرہ انحنا کی خفی مساوات $(y-b)^2 + (x-a)^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ ترسیم کریں۔اس کے بعد منحنی اور دائرہ انحنا کو اکٹھے ترسیم کریں۔(قابل دید ترسیمات حاصل کرنے کی خاطر افقی اور انتصابی پیمائش برابر رکھتے ہوئے، آپ کو مختلف وقفوں پر ترسیم کرنا پڑ سکتا ہے۔)

سوال 12.157: $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (5\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 12.158: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 12.159: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t^3 - 3t)\boldsymbol{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = \frac{3}{5}$

سوال 12.160: $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\boldsymbol{i} + \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

سوال 12.161: $\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin t)\boldsymbol{i} + (2 - 2\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال 12.162: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\boldsymbol{i} + (e^{-t}\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال 12.163: $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال 12.164: $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

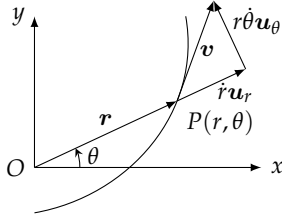
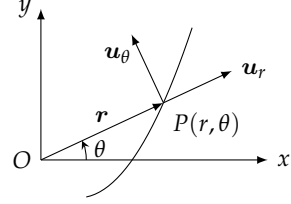
انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹے

سوال 12.165 تا سوال 12.168 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ t پر چار اعشاریہ درستگی تک $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{a}$ ، رفتار، $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ ، τ اور اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء تلاش کریں۔

سوال 12.165: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = \sqrt{3}$

سوال 12.166: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t = \ln 2$

سوال 12.167: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{-t}\boldsymbol{k}, \quad t = -3\pi$

سوال 12.168: $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^2)\boldsymbol{i} + (3t^2)\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

شکل 12.28: نقطہ P کا قطبی محدد r سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی مقدار ہو گی۔یوں $\boldsymbol{u}_r$ ، جو $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ ہے $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا۔

شکل 12.29: قطبی محدد میں سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$ ہو گا۔

12.5 فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت

اس حصہ میں ہم قوانین نیوٹن اور قوت کشش کی مدد سے سیاروں کی حرکت کے قوانین کیپلر اخذ کریں گے اور زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر بحث کریں گے۔قوانین نیوٹن سے قوانین کیپلر کا حصول احصاء کی اہم کامیابی ہے۔اس میں وہ سب کچھ درکار ہو گا جو ہم نے اب تک پڑھا ہے جیسا فضا میں سمتیات کا الجبرا اور جیومیٹری، سمتی تفاعل کا احصاء، تفرقی مساوات کے حل، ابتدائی قیمت مسائل اور ترخیمی حصوں کی قطبی محددی تشریح۔

قطبی اور نلکی محدد میں حرکت کی سمتی مساواتیں

ہم یہاں قطبی محدد کو r ، θ اور نلکی محدد کو r ، θ ، z لکھیں گے۔ایک ذرہ قطبی محددی مستوی میں حرکت کرتا ہو، ہم اس کے مقام، سمتی رفتار اور اسراع کو متحرک اکائی سمتیات

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{12.38}$$

کی روپ میں لکھتے ہیں (شکل 12.28)۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کا رخ سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کے رخ ہے لہٰذا $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ ہو گا۔اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_\theta$ بڑھتے θ کے رخ یعنی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کو عمودی ہے۔

مساوات 12.38 سے ہمیں درج ذیل ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} &= -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -(\cos\theta)\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r\end{aligned} \tag{12.39}$$

ہم وقت کے لحاض سے $\boldsymbol{u}_r$ اور $\boldsymbol{u}_\theta$ کی تبدیلی دیکھنے کی خاطر ان کا تفرق t کے لحاض سے زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r \tag{12.40}$$

یوں سمتی رفتار (شکل 12.29)

$$v = \dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r u_r) = \dot{r} u_r + r\dot{u}_r = \dot{r} u_r + r\dot{\theta} u_\theta \tag{12.41}$$

اور اسراع درج ذیل ہو گا۔

$$a = \dot{v} = (\ddot{r} u_r + \dot{r}\dot{u}_r) + (\dot{r}\dot{\theta} u_\theta + r\ddot{\theta} u_\theta + r\dot{\theta}\dot{u}_\theta) \tag{12.42}$$

جب $\dot{u}_r$ اور $\dot{u}_\theta$ کے حصول کے لئے مساوات 12.40 استعمال کیا جائے اور اجزاء کو علیحدہ کیے جائیں تب اسراع کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) u_\theta \tag{12.43}$$

ہم مساوات $r = r u_r$ کے دائیں ہاتھ جزو zk جمع کر کے ان مساواتوں کو وسعت دے کر فضا میں حرکت کے لئے قابل استعمال بنا سکتے ہیں۔ یوں نلکی محدد میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} r &= r u_r + zk \\ v &= \dot{r} u_r + r\dot{\theta} u_\theta + \dot{z}k \\ a &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) u_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) u_\theta + \ddot{z}k \end{aligned} \tag{12.44}$$

دھیان رہے کہ $z \neq 0$ کی صورت میں $|r| = r$ ہو گا۔

سمتیات u_r ، u_θ اور k دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں جس میں درج ذیل ہوں گے (شکل 12.30)۔

$$u_r \times u_\theta = k, \quad u_\theta \times k = u_r, \quad k \times u_r = u_\theta \tag{12.45}$$

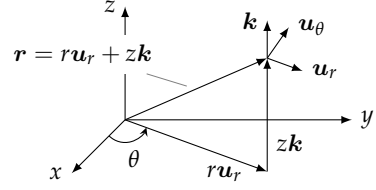
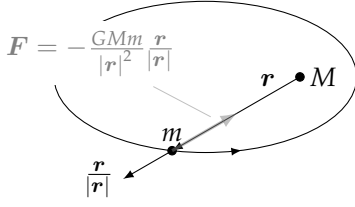
سیارے مستوی میں حرکت کرتے ہیں

نیوٹن کا قانون تجاذب کہتا ہے کہ اگر سورج کی کمیت M ، سیارہ کی کمیت m اور سورج کے کمیتی مرکز سے سیارہ کے کمیتی مرکز تک رداس سمتیہ r ہو تب سیارہ اور سورج کے بیچ قوت کشش F درج ذیل ہو گا (شکل 12.31) جہاں G (عالمگیر) **تجاذبی مستقل**[24] کہلاتا ہے۔

$$F = -\frac{GMm}{|r|^2}\frac{r}{|r|} \tag{12.46}$$

اگر قوت کی اکائی نیوٹن، کمیت کی اکائی کلو گرام اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہو تب $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہو گا۔ نیوٹن کے دوسرے قانون $F = m\ddot{r}$ کو مساوات 12.46 کے ساتھ ملا کر

[24] gravitational constant

شکل 12.30: نلکی محدد میں تعین گر سمتیہ اور بنیادی اکائی سمتیات

شکل 12.31: قوت کشش دونوں کمیتوں کے بیچ سیدھے خط پر ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}
\end{aligned}
\tag{12.47}
$$

حاصل ہو گا۔ سیارہ ہر لمحہ سورج کی جانب اسراع پذیر ہے۔

مساوات 12.47 کہتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ کا غیر سمتی مضرب $\ddot{\boldsymbol{r}}$ ہے لہٰذا

$$
\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}
\tag{12.48}
$$

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہ $\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}$ از خود $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$ کا تفرق ہے:

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}
\tag{12.49}
$$

یوں مساوات 12.48 درج ذیل کا معادل ہے

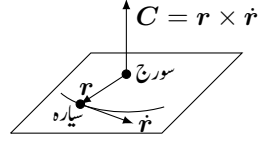
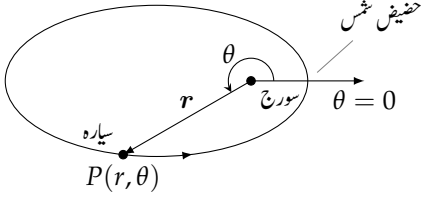
$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0}
\tag{12.50}
$$

جس کا تکمل

$$
\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C}
\tag{12.51}
$$

ہے جہاں $\boldsymbol{C}$ مستقل سمتیہ ہے۔

ہمیں مساوات 12.51 بتاتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}$ ہر لمحہ ایک ایسے مستوی میں ہوں گے جو $\boldsymbol{C}$ کو عمودی ہو گا۔ یوں سورج کے مرکز سے گزرتی مستوی میں سیارے حرکت کرتے ہیں (شکل 12.32)۔

شکل 12.33: حرکت سیارہ کا محددی نظام۔اوپر سے دیکھتے ہوئے حرکت، $\dot{\theta} > 0$ کی بنا، گھڑی کے مخالف رخ ہے۔

شکل 12.32: سورج کے گرد سیارہ اس مستوی میں حرکت کرتا ہے جو $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کو عمودی ہو اور سورج کے کمیتی مرکز سے گزرتا ہے۔

محدد اور ابتدائی معلومات

ہم نلکی محدد کے مرکز کو سورج کے کمیتی مرکز پر رکھتے ہیں اور سیارے کی حرکت کو قطبی محددی سطح لیتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{r}$ سیارے کا تعین گر سمتیہ ہو گا۔یوں $|\boldsymbol{r}| = r$ اور $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ ہوں گے۔ہم $\boldsymbol{C}$ کو محور z پر رکھتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{C}$ کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کے ساتھ وہی دائیں ہاتھ کا تعلق ہو گا جو اس کے ساتھ $\boldsymbol{C}$ کا ہے اور مثبت z محور سے دیکھتے ہوئے سیارہ گھڑی کے مخالف رخ گھومے گا۔اس طرح t بڑھنے سے θ بڑھے گا لہٰذا تمام t کے لئے $\dot{\theta} > 0$ ہو گا۔ہم اس لمحہ کو ابتدائی لمحہ منتخب کرتے ہیں جب سیارہ سورج کے قریب ترین ہو اور نلکی محدد کو (اگر ضرورت ہو) محور z کے گرد یوں گھماتے ہیں کہ ابتدائی لمحہ پر $\boldsymbol{r}$ اور ابتدائی شعاع ہم مکان ہوں۔یوں ابتدائی شعاع سیارے کے **حضیض شمس**[25] سے گزرے گا (شکل 12.33)۔

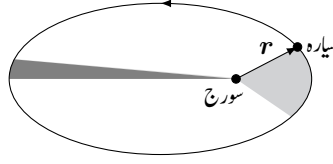
اگر ہم وقت کی پیمائش یوں کریں کہ حضیض شمسی پر $t = 0$ ہو تب سیارے کی حرکت کی ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

ا. لمحہ $t = 0$ پر $r = r_0$ ہو گا جو کم سے کم رداس ہے،

ب. لمحہ $t = 0$ پر (r کی قیمت کم سے کم ہونے کی بنا) $\dot{r} = 0$ ہو گا،

ج. لمحہ $t = 0$ پر $\theta = 0$ ہو گا،

د. لمحہ $t = 0$ پر $|\boldsymbol{v}| = v_0$ ہو گا۔

[25] perihelion

شکل 12.34: سورج اور سیارہ کے بیچ سیدھی لکیر مساوی اوقات میں مساوی رقبوں کو واضح کرتی ہے۔

مزید

$$
\begin{aligned}
v_0 &= |\boldsymbol{v}|_{t=0} \\
&= \left|\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \text{مساوات } 12.41 \\
&= \left|r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && t=0 \text{ پر } \dot{r}=0 \\
&= \left(\left|r\dot{\theta}\right||\boldsymbol{u}_\theta|\right)_{t=0} \\
&= \left|r\dot{\theta}\right|_{t=0} && |\boldsymbol{u}_\theta| = 1 \\
&= (r\dot{\theta})_{t=0} && r \text{ اور } \dot{\theta} \text{ دونوں مثبت ہیں}
\end{aligned}
$$

کی بنا ہم درج ذیل بھی جانتے ہیں۔

ھ. لمحہ $t = 0$ پر $r\dot{\theta} = v_0$ ہو گا۔

کیپلر کا پہلا قانون (قانون مخروط حصہ)

کیپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کی حرکت مخروطی ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج پایا جاتا ہے۔ اس مخروط کی سنک

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{12.52}$$

اور قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{12.53}$$

کیپلر کا دوسرا قانون (قانون یکساں رقبہ)

کیپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج سے سیارہ تک رداسی سمتیہ (جو ہمارے نمونہ میں $\boldsymbol{r}$ ہو گا) مساوی اوقات میں مساوی علاقوں کو واضح کرتا ہے (شکل 12.34)۔ اس قانون کو اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات 12.41 استعمال کرتے ہوئے مساوات 12.51 میں دی گئی حاصل صلیبی

ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C} &= \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \\ &= r\boldsymbol{u}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) && \text{مساوات } 12.41 \\ &= r\dot{r}\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_r)}_{\boldsymbol{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta)}_{\boldsymbol{k}} \\ &= r(r\dot{\theta})\boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{12.54}$$

لمحہ $t = 0$ پر اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{C} = [r(r\dot{\theta})]_{t=0}\boldsymbol{k} = r_0 v_0 \boldsymbol{k} \tag{12.55}$$

مساوات 12.54 میں $\boldsymbol{C}$ کی یہ قیمت پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \quad \text{یعنی} \quad r_0 v_0 \boldsymbol{k} = r^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} \tag{12.56}$$

قطبی محدد میں تفرقی رقبہ درج ذیل لکھا جاتا ہے (حصہ 10.9)۔

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

یوں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0 v_0 \tag{12.57}$$

جو کپلر کا دوسرا قانون ہے۔

زمین کے لئے r_0 تقریباً $1.5 \times 10^8\,\mathrm{km}$ ، v_0 تقریباً $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ تقریباً $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2\,s^{-1}}$ ہو گا۔یوں آپ کے دل کی ہر ایک دھڑکن میں زمین اپنے مدار میں $30\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتی ہے اور سورج سے زمین تک رداسی خط $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2}$ رقبہ واضح کرتا ہے۔

کپلر کے پہلے قانون کا ثبوت

یہ دکھانے کی خاطر کہ سورج کے گرد سیارے کا مدار مخروطی ہوتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہوتا ہے، ہمیں r کو متغیر θ کا تفاعل لکھنا ہو گا۔ایسا کرنے کی خاطر ہمیں ایک لمبا حساب کرنا ہو گا۔

ہم وقتی طور پر $\dot{\theta}$ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات 12.43 اور مساوات 12.47 میں $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ کے عددی سر ایک دوسرے کے برابر پر لکھ کر درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{12.58}$$

اس میں ہم مساوات 12.56 سے $\dot{\theta}$ کی جگہ $\frac{r_0 v_0}{r^2}$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{12.59}$$

حاصل کرتے ہیں۔ہم متغیرات تبدیل کرتے ہوئے اس سے درجہ اول کی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔یوں زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$p = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

لکھ کر مساوات 12.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{12.60}$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \tag{12.61}$$

لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $r = r_0$ اور $\dot{r} = 0$ سے C_1 کی قیمت تعین ہو گی۔

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

اس طرح مساوات 12.61 کو ترتیب دینے کے بعد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\dot{r}^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\Big) + 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big) \tag{12.62}$$

مساوات 12.58 سے مساوات 12.62 حاصل کرنے میں ہم نے r کی دو درجی تفرقی مساوات سے r کی ایک درجی تفرقی مساوات حاصل کی۔ ہمیں اب θ کی روپ میں r کو لکھنا باقی ہے لہٰذا ہم θ کو دوبارہ مساوات میں لاتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات 12.62 کے دونوں اطراف کو مساوات $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$ (مساوات 12.56) کے مطابقتی اطراف سے تقسیم کر کے حقیقت $\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}r/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\Big)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big) \tag{12.63}$$

$$= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big) \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \tag{12.64}$$

اس کی مزید سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$u=\frac{1}{r},\quad u_0=\frac{1}{r_0},\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta},\quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=\frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=u_0^2-u^2+2hu-2hu_0=(u_0-h)^2-(u-h)^2 \tag{12.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\mp\sqrt{(u_0-h)^2-(u-h)^2} \tag{12.66}$$

ہمیں کس علامت کا انتخاب کرنا ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $\dot{\theta}=\frac{r_0v_0}{r^2}$ مثبت ہے۔ساتھ ہی $t=0$ پر r کم سے کم قیمت سے شروع ہوتا ہے لہٰذا یہ یکدم گھٹ نہیں سکتا ہے، اور ابتدائی مثبت لمحات میں $\dot{r}\geq 0$ ہو گا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\leq 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}\geq 0$$

ہو گا۔مساوات 12.66 میں منفی علامت درست ہو گی۔ یہ جاننے کے بعد ہم مساوات 12.66 کو ترتیب دے کر θ کے لحاظ سے دونوں اطراف اک تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{gathered}\frac{-1}{\sqrt{(u_0-h)^2-(u-h)^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=1\\ \cos^{-1}\left(\frac{u-h}{u_0-h}\right)=\theta+C_2\end{gathered} \tag{12.67}$$

چونکہ $\theta=0$ پر $u=u_0$ ہو گا اور $\cos^{-1}(1)=0$ ہوتا ہے لہٰذا C_2 صفر ہو گا۔یوں

$$\frac{u-h}{u_0-h}=\cos\theta \tag{12.68}$$

اور

$$\frac{1}{r}=u=h+(u_0-h)\cos\theta \tag{12.69}$$

ہو گا جس کو چند الجبرائی اقدام کے بعد

$$r=\frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{12.70}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$e=\frac{1}{r_0h}-1=\frac{r_0v_0^2}{GM}-1 \tag{12.71}$$

ہوں گے۔ مساوات 12.70 اور مساوات 12.71 مل کر کہتے ہیں کہ سیارے کی راہ مخروطی ہو گی جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہو گا اور جس کی سنک $e=\frac{r_0v_0^2}{GM}-1$ ہو گی۔ یہ قانون کیپلر اول کی جدید مساوات ہے۔

کیپلر کا تیسرا قانون (قانون وقت اور فاصلہ)

ایک سیارہ جتنے وقت T میں اپنے سورج کے گرد ایک چکر کاٹتا ہے، اس کو سیارہ کا **دوری عرصہ**[26] کہتے ہیں۔ کیپلر کا تیسرا قانون کہتا ہے کہ T اور سیارے کے مدار کے نصف محور اکبر a کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{12.72}$$

چونکہ کسی بھی شمسی نظام کے اندر اس مساوات کا دایاں ہاتھ ایک مستقل ہو گا لہٰذا اس نظام میں تمام سیاروں کے لئے T^2 اور a^3 کا تناسب یکساں ہو گا۔

کیپلر کا تیسرا قانون ہمیں ہمارے نظام شمسی کی جسامت کی معلومات حاصل کرنے کا موقع دیتا ہے۔ ہم ہر ایک سیارے کے نصف محور اکبر کو فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ زمین کے نصف محور اکبر کی لمبائی فلکیاتی اکائی کہلاتی ہے۔ ہم کسی بھی لمحہ تمام سیاروں کے بیچ فاصلوں کو بھی فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ اب آخری کام، ان تمام فاصلوں میں کسی ایک کی لمبائی، کلومیٹروں میں معلوم کرنا رہ گیا ہے۔ زہرہ سے ٹکرانے کے بعد ریڈار کی واپس پلٹی موجوں سے ہم زمین اور زہرہ کے بیچ فاصلہ ناپ سکتے ہیں۔ اس قسم کے تجربات سے ہم اب جانتے ہیں کہ ایک فلکیاتی اکائی $149\,597\,870\,\mathrm{km}$ کے برابر ہے۔

ہم سیارے کے ترخیمی مدار میں گھیرے گئے رقبہ کے دو مختلف کلیات کو ملا کر کیپلر کا تیسرا قانون اخذ کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ} &= \pi ab && \text{کلیہ } 1\\
\text{رقبہ} &= \int_0^T \mathrm{d}S && \text{کلیہ } 2\\
&= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \,\mathrm{d}t && \text{مساوات } 12.57\\
&= \frac{1}{2} T r_0 v_0
\end{aligned}$$

ان دو مساوات کو ایک دوسرے کے مساوی رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \qquad \text{ترخیم کے لئے } b = a\sqrt{1-e^2} \text{ ہوتا ہے} \tag{12.73}$$

ہمیں اب a اور e کو r_0 ، v_0 ، G اور M کی روپ میں لکھنا ہے۔ مساوات 12.71 ہمیں e دیتی ہے جبکہ مساوات 12.70 میں θ کو π کے برابر پر کرنے سے

$$r_{\text{بلند تر}} = r_0 \frac{1+e}{1-e}$$

---

[26] orbital period

جدول 12.1: شمسی سیاروں کے a ، e اور T کی قیمتیں۔

سیارہ	نصف محور $a^{\dagger}$	سنک e	دوری عرصہ T
عطارہ	57.95	0.2056	87.967 دن
زہرہ	108.11	0.0068	224.701 دن
زمین	149.57	0.0167	365.256 دن
مریخ	227.84	0.0934	1.8808 سال
مشتری	778.14	0.0484	11.8613 سال
زحل	1427.0	0.0543	29.4568 سال
یورانس	2870.3	0.0460	84.0081 سال
نیپچون	4499.9	0.0082	164.784 سال
پلوٹو	5909	0.2481	248.35 سال
	† ملین کلومیٹر (10^6 km)		

حاصل ہوتا ہے لہٰذا a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$2a = r_0 + r_{\text{بلندتر}} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0GM}{2GM - r_0v_0^2} \tag{12.74}$$

مساوات 12.73 کے دونوں اطراف کا مربع لے کر اس میں مساوات 12.71 اور مساوات 12.74 کے نتائج پر کرنے سے کیپلر کا تیسرا قانون حاصل ہو گا (سوال 12.182)۔

مدار

اگرچہ کیپلر نے یہ قوانین تجرباتی طور پر دریافت کیے، قوانین نیوٹن سے قوانین کیپلر کے حصول کے بعد ہم جانتے ہیں کہ یہ قوانین ہر اس جسم پر لاگو ہوں گے جس پر بالعکس مربع قانون کے تحت قوت لاگو ہو۔یہ سورج کے گرد ہالی دم دار ستارہ اور آئکارس سیارچہ کی مدار اور زمین کے گرد چاند کے مدار پر لاگو ہوں گے۔اسی طرح یہ چاند کے گرد اپالو 8 کے خلائی جہاز کے مدار پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ایٹم کے مرکزہ پر مارے گئے بار بردار ذرات قوانین کیپلر کو مطمئن کرتے ہوئے قطع زائد راہوں پر فشاں ہوتے ہیں۔

جدول 12.1 میں نظام شمسی کے سیاروں کے مدار کی معلومات دی گئی ہے۔مصنوعی سیاروں کے حاصل مواد سے ہم سمندروں میں پانی کی سطح میں فرق جان سکے اور بحر الکاہل میں دور ترین جزیروں کا درست مقام معلوم کر سکے۔اس مواد سے ہمیں یہ بھی معلوم ہوا کہ سورج اور چاند کی قوت کشش زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر اثر انداز ہوں گے اور شمسی اخراج اتنا دباو پیدا کرتا ہے کہ مدار کی شکل تبدیل ہو جائے۔

جدول 12.2 اور جدول 12.3 میں مزید مواد پیش کیا گیا ہے۔

جدول 12.2: زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کی معلومات

نام	پرواز	خلائی زندگی	کمیت	دوری عرصہ ††	حضیض †	اوج †	نصف محور اکبر †	سنک
سپٹنک 1	اکتوبر 1957	57.6 دن	83.6	96.2	215	939	6955	0.052
ونگارڈ 1	مارچ 1958	300 سال	1.47	138.5	649	4340	8872	0.208
سنکام 3	اگست 1964	$> 10^6$ سال	39	1436.2	35718	35903	42189	0.002
سکائے لیب 4	نومبر 1973	84.06 دن	13980	93.11	422	437	6808	0.001
ٹائرس 11	اکتوبر 1978	500 سال	734	102.12	850	866	7236	0.001
گوس 4	ستمبر 1980	$> 10^6$ سال	627	1436.2	35776	35800	42166	0.0003
انٹل سیٹ 5	دسمبر 1980	$> 10^6$ سال	1928	1417.67	35143	35707	41803	0.007

† کلو میٹر
†† منٹ

جدول 12.3: اعدادی مواد

تجاذبی مستقل	$6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
کمیت شمس	$1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
کمیت زمین	$5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
استوائی رداس زمین	$6378.533\,\mathrm{km}$
قطبی رداس زمین	$6356.912\,\mathrm{km}$
زمین کا ہم دوری عرصہ	1436.1 منٹ
زمین کا سورج کے گرد دوری عرصہ	365.256 دن (ایک سال)

سوالات

سوال 12.169: سکائی لیب 4 کا نصف محور اکبر $a = 6808\,\text{km}$ ہے۔ کیپلر کے تیسرے قانون میں زمین کی کمیت کو M لیتے ہوئے دوری عرصہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔اس کا حساب لگائیں۔ جدول 12.2 میں دی گئی قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 12.170: حضیض شمسی پر سورج سے زمین کا فاصلہ تقریباً $149\,577\,000\,\text{km}$ ہوتا ہے اور سورج کے گرد زمین کے مدار کی سنک 0.0167 ہے۔ حضیض شمس پر زمین کی رفتار v_0 تلاش کریں (مساوات 12.52 استعمال کریں)۔

سوال 12.171: روس نے جولائی 1965 میں پروٹان 1، مصنوعی سیارہ مدار میں چھوڑا جس کی کمیت (چھوڑتے وقت) $12\,200\,\text{kg}$، بلندی حضیض $183\,\text{km}$، بلندی اوج $589\,\text{km}$ اور دوری عرصہ 92.25 منٹ تھا۔ زمین کی کمیت اور تجاذبی مستقل کی قیمتیں استعمال کر کے مساوات 12.72 سے نصف محور اکبر a تلاش کریں۔اس کا موازنہ اس عدد سے کریں جو حضیض اور اوج کے مجموعہ کے ساتھ زمین کا قطر جمع کرنے سے حاصل ہو گا۔

سوال 12.172: (ا) وائکنگ 1 مصنوعی سیارہ، جس کا دوری عرصہ 1639 منٹ تھا، نے اگست 1975 تا جون 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ مریخ کی کمیت $6.418 \times 10^{23}\,\text{kg}$ لیتے ہوئے وائکنگ 1 کا نصف محور اکبر تلاش کریں۔ (ب) مریخ کی سطح سے وائکنگ 1 کا کم سے کم فاصلہ $1499\,\text{km}$ اور زیادہ سے زیادہ فاصلہ $35\,800\,\text{km}$ تھا۔ ان حقائق اور جزو-ا میں حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مریخ کے اوسط قطر کی اندازاً قیمت معلوم کریں۔

سوال 12.173: وائکنگ 2 مصنوعی سیارہ نے ستمبر 1975 تا اگست 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ اس کے نصف محور اکبر $22\,030\,\text{km}$ تھا۔ اس کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

سوال 12.174: ہم عصر مدار
زمین کی استوائی مستوی میں کئی مصنوعی سیاروں کے مدار تقریباً دائری ہے اور ان کا دوری عرصہ عین ایک دن کے برابر ہے۔ یوں یہ بلندی پر رہتے ہوئے سطح زمین کے اوپر ساکن نظر آتے ہیں۔ ایسے مدار کو **ہم عصر مدار**[27] کہتے ہیں۔

ا. ہم عصر مصنوعی سیارے کا نصف محور اکبر تقریباً کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. زمین کی سطح سے ہم عصر مدار کتنی بلندی پر ہو گا؟

ج. جدول 12.2 میں دیے گئے مصنوعی سیاروں میں کس کا مدار تقریباً ہم عصر ہے؟

[27] geosynchronous orbit, geostationary orbit

سوال 12.175: مریخ کی کمیت 6.418×10^{23} kg ہے جبکہ مریخ کا ایک دن 1477.4 منٹ ہے۔ مریخ کے گرد مدار میں ایک مصنوعی سیارہ جس کا دوری عرصہ مریخی دن کے برابر ہو، سطح مریخ سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 12.176: زمین کے گرد چاند کا دوری عرصہ $2.360\,55 \times 10^{6}$ سیکنڈ ہے۔ چاند کتنا دور ہے؟

سوال 12.177: زمین کے گرد ایک مصنوعی سیارہ دائری مدار میں حرکت کرتا ہے۔ مصنوعی سیارے کی رفتار کو مدار کے رداس کا تفاعل لکھیں۔

سوال 12.178: نظام شمسی میں سیاروں کا $\frac{T^2}{a^3}$ کتنا ہو گا؟ زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے کتنا ہو گا؟ چاند کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے یہ کتنا ہو گا؟ (چاند کی کمیت 7.354×10^{22} kg ہے۔)

بغیر کیلکولیٹر استعمال کئے قلم و کاغذ سے حل کریں

سوال 12.179: مساوات 12.52 میں v_0 کی کس قیمت کے لئے مساوات 12.53 کا مدار دائری ہو گا؟ ترخیمی ہو گا؟ قطع مکافی ہو گا؟ قطع زائد ہو گا؟

سوال 12.180: دکھائیں کہ دائری مدار میں سیارہ یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ (اشارہ: یہ قوانین کیپلر کی بدولت ہو گا۔)

سوال 12.181: فرض کریں ایک مستوی میں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور یہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی شرح سے رقبہ واضح کرتا ہے۔ محدد متعارف کئے بغیر اور مطلوبہ تفرقات کی موجودگی تصور کرتے ہوئے، بڑھوتری اور حد پر مبنی درج ذیل مساوات کی جیومیٹریائی جواز پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\right|$$

سوال 12.182: کیپلر کے تیسرے قانون کا اشتقاق پورا کریں (مساوات 12.73 کے بعد حصہ۔)

سوال 12.183: کسی ستارہ کے گرد دو سیارے دائری مدار میں طواف کرتے ہیں۔ سیارہ A ستارے کے قریب ہے جبکہ سیارہ B ستارہ سے زیادہ فاصلہ پر ہے۔ فرض کریں لمحہ t پر ان کے مقام بالترتیب

$$\boldsymbol{r}_A(t) = 2\cos(2\pi t)\boldsymbol{i} + 2\sin(2\pi t)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}_B(t) = 3\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 3\sin(\pi t)\boldsymbol{j}$$

ہیں جہاں ستارہ کا مقام مبدا ہے اور فاصلوں کو فلکیاتی اکائیوں میں ناپا گیا ہے۔ (دھیان رہے کہ سیارہ A کی رفتار سیارہ B سے زیادہ ہے۔)

سیارہ A پر رہائش پذیر لوگوں کا خیال ہے کہ ان کا سیارہ، ان کے شمسی نظام کا مرکز ہے۔

ا. سیارہ A کو نئی محددی نظام کا مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کے مقام کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ اپنا جواب $\cos(\pi t)$ اور $\sin(\pi t)$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. سیارہ A کو مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کی راہ ترسیم کریں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان لوگوں کو سیاروں کی حرکت سمجھنے میں کتنی دشواری ہو گی۔ کپلر سے پہلے یہی حال ہمارا تھا۔

سوال 12.184: کپلر نے دریافت کیا کہ سورج کے گرد زمین ترخیمی راہ پر طواف کرتی ہے اور سورج اس کے ایک ماسکہ پر پایا جاتا ہے۔ سورج کے مرکز سے زمین کے مرکز تک لمحہ t پر تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ زمین کے جنوبی قطب سے شمالی قطب تک سمتیہ $\boldsymbol{w}$ لیں۔ہم جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{w}$ مستقل ہے اور ترخیم کے مستوی کو عمودی نہیں ہے (زمین کا محور جھکا ہے)۔ سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{r}(t)$ کے روپ میں (ا) حضیض شمسی، (ب) اوج شمسی، (ج) اعتدالین (جب دن اور رات ایک دوسرے کے برابر ہوں)، (د) لمبا ترین دن (گرم ترین دن)، (ہ) چھوٹا ترین دن (سرد ترین دن) کے ریاضی معنی پیش کریں۔

نلکی محددی نظام

سوال 12.185: نلکی محدد میں مقام اور حرکت کے اکائی سمتیات۔
فضا میں متحرک ذرے کا مقام نلکی محدد میں لکھتے ہوئے ہم

$$\boldsymbol{u}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

اور $\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیات استعمال کرتے ہیں۔یوں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں r مبدا سے ذرے کا مثبت قطبی فاصلہ ہے۔

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ ، اسی ترتیب میں، اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{u}_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{u}_r$$

ج. یہ فرض کرتے ہوئے کہ t کے لحاظ سے درکار تفرقات موجود ہیں، $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ اور $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ کو $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ ، $\boldsymbol{k}$ ، $\dot{r}$ اور $\dot{\theta}$ کی صورت میں لکھیں۔(نقطہ t کے لحاظ سے تفرق کو ظاہر کرتا ہے، لہٰذا $\dot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) حصہ 12.5 میں ان کلیات کو اخذ کیا گیا ہے اور ساتھ ہی ان سمتیات کو فلکیاتی سیاروں کی حرکت بیان کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

سوال 12.186: نلکی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو نلکی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ایک ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-ا کے نتیجہ کی تشریح کریں۔ اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = e^\theta,\ z = e^\theta,\ 0 \le \theta \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-ا کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

کروی محددی نظام

سوال 12.187: مقام اور رفتار کے لئے مستعمل کروی محدد کے اکائی سمتیات

فضا میں نقطہ P کے کروی محددی محور r ، θ اور ϕ میں کسی دو کو مستقل رکھتے ہوئے تیسرے کو بڑھنے دیں۔ جس رخ P بڑھتا ہے اس رخ کا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ لیں جس کے ساتھ مطابقتی زیر نوشت منسلک ہو۔ ایسے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ہوں گے۔

ا. $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ کو $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = 0$ ہو گا۔

ج. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ، اسی ترتیب میں، آپس میں عمودی سمتیات کا دایاں ہاتھ چھوکٹ دیتے ہیں۔

سوال 12.188: کروی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو کروی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ٹھوس کرہ سے کاٹے گئے ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-ا کے نتیجہ کی تشریح کریں۔ اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = 2e^\theta,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ 0 \le \phi \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-ا میں حاصل نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

باب 13

کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات

جائزہ

سائنس میں دو یا دو سے زائد غیر تابع متغیرات کے تفاعل ایک متغیر کے تفاعل سے زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں اور ان کی علم احصاء زیادہ عمدہ ہوتی ہے۔زیادہ متغیرات ایک دوسرے پر زیادہ طریقوں سے اثر انداز ہو سکتے ہیں جس کی بنا ان کے تفرقات مختلف اور زیادہ دلچسپ صورتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ ان کے تکملات زیادہ اقسام کے عملی مسائل میں کام آتے ہیں۔ احتمال، سیالی حرکیات، اور برقیات، وغیرہ، پر غور کے دوران ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔ان تفاعل کی ریاضیات، سائنس کی عظیم کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

13.1 کثیر متغیرات کے تفاعل

کئی تفاعل ایک سے زائد متغیرات کے تابع ہوتے ہیں۔دائری نلکی کا حجم، اس کے رداس اور قد سے، تفاعل $H = \pi r^2 h$ دیتا ہے۔ مستوی xy میں نقطہ $N(x, y)$ کے دو محدد سے، قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قد تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ دیتا ہے۔اس حصہ میں ہم ایک سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل متعارف کرتے ہیں اور ان کو ترسیم کرنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

تفاعل اور متغیرات

کثیر غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی تعریف بالکل واحد متغیر کے تفاعل کی طرح کی جاتی ہے۔ان کے وقفے حقیقی (تین، چار، وغیرہ) اعداد کے مرتب جوڑی کے سلسلے ہوں گے اور ان کی سعت، اس طرح کے حقیقی اعداد کے سلسلے ہوں گے جن کے ساتھ ہم کام کرتے آ رہے ہیں۔

تعریفات : فرض کریں n عدد حقیقی اعداد $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کا سلسلہ D ہے۔ تب D پر **حقیقی قیمت تفاعل**[1] f سے مراد وہ قاعدہ ہے جو D کے ہر رکن کو حقیقی عدد

$$w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

مختص کرتا ہو۔ سلسلہ D اس تفاعل کا **دائرہ کار**[2] ہو گا۔ تفاعل f کی w قیمتوں کا سلسلہ f کی **سعت**[3] ہو گی۔ علامت w تفاعل f کا **تابع متغیر**[4] ہو گا اور f کو n **غیر تابع متغیرات**[5] x_1 تا x_n کا تفاعل کہتے ہیں۔ ہم ان x کو تفاعل کے **داخلی متغیرات**[6] اور w کو تفاعل کا **خارجی متغیر**[7] بھی کہتے ہیں۔

□

اگر f دو غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب عموماً ہم ان غیر تابع متغیرات کو x اور y کہتے ہیں اور f کے دائرہ کار کو مستوی xy میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔ اگر f تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب ہم ان متغیرات کو x ، y اور z کہتے ہیں اور تفاعل کے دائرہ کار کو فضا میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ہم وہ حروف استعمال کرتے ہیں جو ہمیں ان چیزوں کی یاد دلا سکیں جن کے لئے یہ متغیرات استعمال کیے گئے ہوں۔ یہ کہنے کی خاطر کہ دائری نلکی کا حجم اس کے رداس r اور قد h کا تفاعل ہو گا، ہم $H = f(r,h)$ لکھ سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم $f(r,h)$ کی جگہ وہ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں جو r اور h کی قیمتوں سے H کی قیمت دیتا ہو، یعنی ہم $H = \pi r^2 h$ لکھ سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں r اور h غیر تابع متغیرات ہوں گے اور H تابع متغیر ہو گا۔

ہمیشہ کی طرح، ہم تفاعل کی تعریفی کلیہ میں غیر تابع متغیرات کی قیمتیں پر کر کے مطابقتی تابع متغیر کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال 13.1: نقطہ $(3,0,4)$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(3,0,4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

---

[1] real valued function
[2] domain
[3] range
[4] dependent variable
[5] independent variable
[6] input variable
[7] output variable

وقفے

ایک سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کی تعریف میں، ہمیشہ کی طرح، ہم ان مداخل کو شامل نہیں کرتے ہیں جو مخلوط اعداد دیتے ہوں یا جن کی وجہ سے تقسیم صفر کا عمل پیدا ہوتا ہو۔یوں $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ میں y کی قیمت x^2 کی قیمت سے کم نہیں ہو سکتی ہے اور $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ میں xy کی قیمت صفر نہیں ہو سکتی ہے۔ان شرائط کو مطمئن کرتے ہوئے، تفاعل کے دائرہ کار سے مراد وہ بڑے سے بڑا سلسلہ ہو گا جس پر تفاعل کا تعریفی قاعدہ حقیقی اعداد پیدا کرتا ہو۔

مثال 13.2: دو متغیرات کے تفاعل

سعت	دائرہ کار	تفاعل
$[0,\infty)$	$y\geq x^2$	$w=\sqrt{y-x^2}$
$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	$xy\neq 0$	$w=\frac{1}{xy}$
$[-1,1]$	پورا مستوی	$w=\sin xy$

□

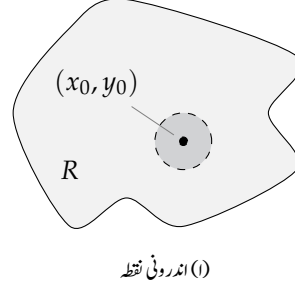
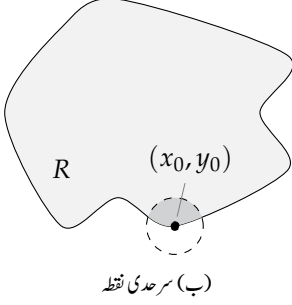
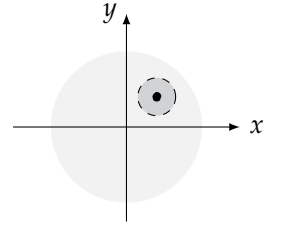
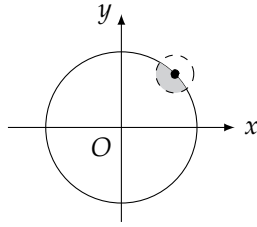
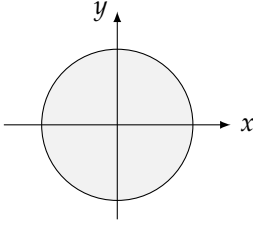
مثال 13.3: تین متغیرات کے تفاعل

سعت	دائرہ کار	تفاعل
$[0,\infty)$	پوری فضا	$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$(0,\infty)$	$(x,y,z)\neq(0,0,0)$	$w=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$
$(-\infty,\infty)$	z>0 نصف فضا	$w=xy\ln z$

□

بالکل حقیقی لکیر کے وقفوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کی طرح، مستوی کے حصوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے ہو سکتے ہیں۔

تعریفات: مستوی xy میں خطہ (سلسلہ) R میں نقطہ (x_0,y_0) تب R کا **اندرونی نقطہ**[8] ہو گا جب یہ اس قرص کا مرکز ہو جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہو (شکل 13.1)۔ نقطہ (x_0,y_0) تب R کا **سرحدی نقطہ**[9] ہو گا جب ہر اس قرص میں، جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو، R کے بیرونی اور R کے اندرونی نقطے پائے جاتے ہوں۔(ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ ازخود R میں شامل ہو۔)

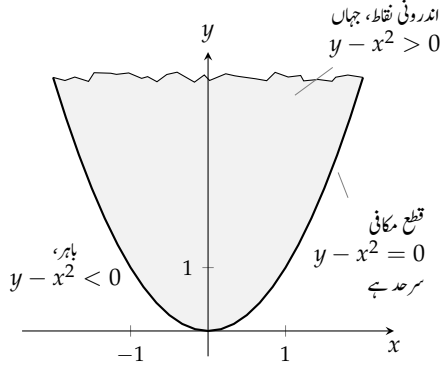
[8] interior point
[9] boundary point

شکل 13.1: مستوی خطہ R کا اندرونی نقطہ اور سرحدی نقطہ۔اندرونی نقطہ لازماً R کا حصہ ہو گا جبکہ ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ R کا حصہ ہو۔

شکل 13.2: مستوی میں اکائی قرص کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے۔

ایک خطہ کے اندرونی نقطے، بطور ایک سلسلہ، اس خطہ کی **اندرون**[10] ہوں گے۔ اس خطہ کے سرحدی نقطے اس کی **سرحد**[11] ہیں۔ایسا خطہ جو مکمل طور پر اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[12] خطہ کہلاتا ہے۔ ایسا خطہ جس میں اس کے تمام سرحدی نقطے شامل ہوں **بند**[13] خطہ کہلاتا ہے۔

□

حقیقی اعداد کے وقفوں کی طرح، مستوی میں بعض خطے نا کھلا اور نا ہی بند ہوتے ہیں۔ شکل 13.2 کے کھلا قرص میں چند، نا کہ تمام، سرحدی نقطے شامل کرنے سے ایسا خطہ حاصل ہو گا جو نا کھلا ہو گا اور نا ہی بند ہو گا۔اس میں شامل سرحدی نقطے اس کو کھلا وقفہ بننے سے روکتے ہیں جبکہ اس میں نا شامل سرحدی نقطے اس کو بند خطہ بننے سے روکتے ہیں۔

---

[10] interior
[11] boundary
[12] open
[13] closed

شکل 13.3: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار سایہ دار خطہ ہے اور اس کی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ہے۔

تعریف : مستوی میں مقررہ رداس کے قرص میں پائے جانے والا خطہ **محدود**[14] ہو گا۔ ایسا خطہ جو محدود نا ہو **غیر محدود**[15] ہو گا۔

□

مثال 13.4:

مستوی میں محدود سلسلے: خطی قطعات؛ مثلثیں؛ مثلثوں کی اندرون؛ مستطیلیں؛ اقراص۔

مستوی میں غیر محدود سلسلے: خطوط؛ محددی محور؛ لا متناہی وقفہ پر معین تفاعل کی ترسیم؛ ربعات، نصف مستوی؛ مستوی از خود۔

□

مثال 13.5: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار بند اور غیر محدود ہے (شکل 13.3)۔ قطع مکافی $y = x^2$ اس دائرہ کار کی سرحد ہے۔ قطع مکافی سے اوپر نقطے دائرہ کار کی اندرون ہیں۔ □

فضا میں اندرون، سرحد، کھلا، بند، محدود اور غیر محدود کی تعریفیں عین مستوی میں انہیں کی تعریفوں کی طرح ہیں۔ اضافی بعد کی بنا ہم قرص کی بجائے گیند لیتے ہیں۔ **بند گیند**[16] میں کرہ کی اندرونی نقطوں کے ساتھ گیند بھی شامل ہو گا۔ **کھلا گیند**[17] میں گیند کی اندرونی نقطے شامل ہوں گے جبکہ گیند از خود اس میں شامل نہیں ہو گا۔

---

[14] bounded
[15] unbounded
[16] closed ball
[17] open ball

تعریفات: فضا میں خطہ D میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) اس صورت D کا **اندرونی نقطہ**[18] ہو گا جب یہ نقطہ ایسے گیند کا مرکز ہو جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ اگر ہر گیند، جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) ہو، میں شامل نقطوں میں کچھ نقطے D کے اندرونی اور کچھ اس کے بیرونی نقطے ہوں تب یہ نقطہ D کا **سرحدی نقطہ**[19] ہو گا۔ خطہ D کے اندرونی نقطوں کا سلسلہ D کا **اندرون**[20] ہو گا۔ خطہ D کے سرحدی نقطوں کا سلسلہ D کا **سرحد**[21] ہو گا۔

ایک ایسا خطہ جو صرف اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[22] خطہ کہلائے گا۔ ایک خطہ جس میں خطے کا پورا سرحد شامل ہو **بند**[23] خطہ کہلائے گا۔

□

مثال 13.6:

فضا میں کھلا سلسلے کھلا گیند؛کھلا نصف فضا $z > 0$ ؛ ربع اول (بغیر تحدیدی سطحیں) ؛ فضا از خود

فضا میں بند سلسلے خطوط؛ مستوی؛ بند گیند؛ بند نصف فضا $z \geq 0$ ؛ ربع اول بمع اس کے تحدیدی سطحیں؛ فضا از خود

نا کھلا اور نا بند بند گیند جس میں تحدیدی کرہ کا کچھ حصہ شامل نہ ہو؛ ٹھوس مربع جس میں ایک تحدیدی سطح یا کنارہ یا کونا شامل نہ ہو

□

دو متغیرات کے تفاعل کی ترسیمات اور ہم قد منحنیات

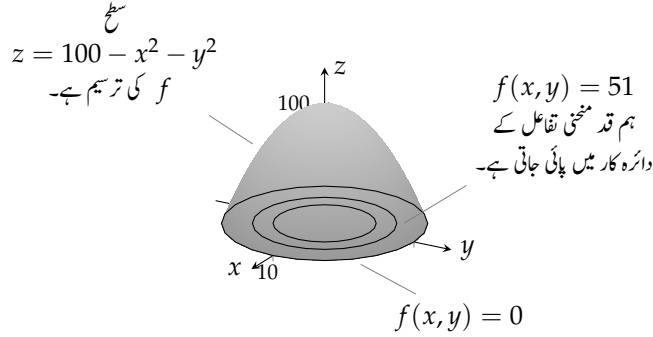
تفاعل $f(x, y)$ کی تصویر کشی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔ اول، ہم اس دائرہ کار میں f کی منحنیات ترسیم کر سکتے ہیں جس پر f کی قیمت مستقل ہو۔ دوم، ہم فضا میں سطح $z = f(x, y)$ ترسیم کر سکتے ہیں۔

تعریفات: اس مستوی میں نقطوں کا سلسلہ جہاں $f(x, y)$ کی قیمت ایک مستقل c $f(x, y) = c$ ہو، f کی **ہم قد منحنی**[24] کہلاتا ہے۔ فضا میں f کے دائرہ کار میں (x, y) کے لئے تمام نقطوں $(x, y, f(x, y))$ کا سلسلہ f کی **ترسیم**[25] کہلاتا ہے۔ تفاعل f کی ترسیم کو **سطح**[26] $z = f(x, y)$ بھی کہتے ہیں۔

□

دھیان رہے کہ ہم قد منحنیات اس مستوی میں پائی جاتی ہیں جس پر تفاعل کا دائرہ کار پایا جاتا ہو۔

---

[18] interior point
[19] boundary point
[20] interior
[21] boundary
[22] open
[23] closed
[24] level curve
[25] graph
[26] surface

شکل 13.4: تفاعل کی ترسیم اور منتخب ہم قد منحنیات۔

سوالات

مثال 13.7: تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ ترسیم کریں اور مستوی میں f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنیات $f(x,y) = 0$ ، $f(x,y) = 51$ اور $f(x,y) = 75$ ترسیم کریں۔

حل: تفاعل f کا دائرہ کار پورا xy مستوی ہے جبکہ اس کی سعت 100 جتنا یا اس سے کم تمام حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ قطع مکافی $z = 100 - x^2 - y^2$ اس کی ترسیم ہے جس کا کچھ حصہ شکل 13.4 میں دکھایا گیا ہے۔

مستوی xy میں ان نقطوں کا سلسلہ جن پر درج ذیل ہو، ہم قد منحنی $f(x,y) = 0$ ہو گی جو ایک دائرہ ہے جس کا رداس 10 اور جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 0 \quad \text{یعنی} \quad x^2 + y^2 = 100$$

اسی طرح ہم قد منحنیات $f(x,y) = 51$ اور $f(x,y) = 75$ درج ذیل دائرے ہوں گے جو xy مستوی میں پائے جاتے ہیں اور جن کے مراکز عین مبدا پر پائے جاتے ہیں۔

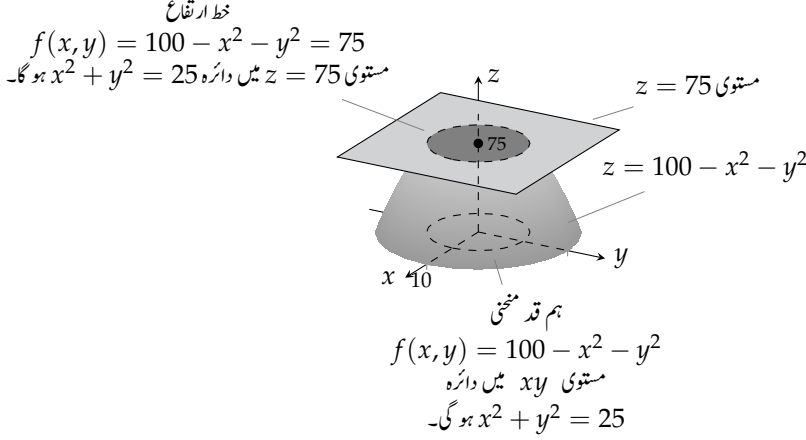
$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 51 \quad \text{یعنی} \quad x^2 + y^2 = 49$$
$$f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 75 \quad \text{یعنی} \quad x^2 + y^2 = 25$$

ہم قد منحنی $f(x,y) = 100$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔(اس کے باوجود یہ ایک ہم قد منحنی ہے۔) □

خطوط ارتفاع

فضا میں وہ منحنی جس میں مستوی $z = c$ سطح $z = f(x,y)$ کو مس کرتا ہو، ان نقطوں پر مشتمل ہو گی جو تفاعل $f(x,y) = c$ کو ظاہر کرتی ہے۔ اس کو **خط ارتفاع**[27] $f(x,y) = c$ کہتے ہیں تا کہ اس کے بیچ اور f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x,y) = c$

---

[27] contour line

شکل 13.5: تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ کی ترسیم اور مستوی $z = 75$ کے ساتھ اس کا تقاطع۔

کے بیچ تمیز کرنا ممکن ہو۔ شکل 13.5 میں تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ کی سطح $z = 100 - x^2 - y^2$ پر خط ارتفاع $f(x,y) = 75$ دکھایا گیا ہے۔ یہ خط ارتفاع ٹھیک دائرہ $x^2 + y^2 = 25$، جو تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x,y) = 75$ ہے، کے اوپر کچھ بلندی پر پایا جاتا ہے۔

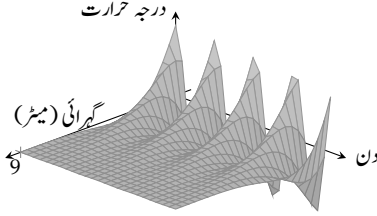
بعض ریاضی دان خط ارتفاع اور ہم قد منحنی میں تمیز نہیں کرتے ہیں اور دونوں کو کسی ایک نام سے پکارتے ہیں۔ ایسی صورت میں متن سے آپ جان سکتے ہیں کہ کس کی بات کی گئی ہے۔ عموماً نقشات پر (سطح سمندر سے) مستقل بلندی کو ظاہر کرنے والی منحنیات کو خط ارتفاع پکارا جاتا ہے نا کہ ہم قد منحنیات۔

سہ متغیری تفاعل کی ہم قد منحنیات

مستوی میں جن نقطوں پر دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y) = c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار میں ایک منحنی تشکیل دیتے ہیں۔ فضا میں جن نقطوں پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y,z) = c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار ایک سطح تشکیل دیتے ہیں۔

تعریف: فضا میں ان نقطوں (x,y,z) کا سلسلہ جن پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x,y,z) = c$ ہو، f کی **ہم قد سطح**[28] کہلاتا ہے۔

□

[28] level surface

شکل 13.6: سطح زمین کی نسبت سے گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت۔

مثال 13.8: درج ذیل تفاعل کے ہم قد سطحوں پر تبصرہ کریں۔

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

حل: تفاعل f کی قیمت، مبدا سے نقطہ (x,y,z) تک فاصلہ ہو گا۔ ہر ہم قد سطح $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = c,\ c > 0$ رداس c کا کرہ ہو گا جس کا مرکز مبدا پر ہو گا۔ ہم قد سطح $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔

ہم یہاں تفاعل کو ترسیم نہیں کر رہے ہیں۔ایک تفاعل جو نقاط $(x,y,z,\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ پر مشتمل ہو، چار متغیری فضا میں پایا جائے گا۔اس کی بجائے ہم تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد سطحوں کو دیکھ رہے ہیں۔

اس تفاعل کی ہم قد سطحیں ہمیں تفاعل کے دائرہ کار میں چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت کی تبدیلی دکھاتی ہیں۔اگر ہم رداس c کے کرہ ،جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر چہل قدمی کریں تب تفاعل کی قیمت بدستور c رہے گی۔ایک کرہ سے دوسری کرہ منتقل ہونے پر تفاعل کی قیمت تبدیل ہو گی۔مبدا سے دوری تفاعل کی قیمت بڑھاتی ہے جبکہ مبدا کے قریب ہونے سے اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا دارومدار ہمارے چلنے کے رخ پر ہو گا۔تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا رخ پر انحصار ایک اہم حقیقت ہے جس پر حصہ 13.7 میں غور کیا جائے گا۔ □

کمپیوٹر ترسیم کشی

کمپیوٹر کی مدد سے دو متغیرات کا تفاعل با آسانی ترسیم کیا جا سکتا ہے۔عموماً ترسیم ہمیں کلیہ سے زیادہ معلومات جلدی فراہم کرتی ہے۔

مثال 13.9: تفاعل $w = \cos(1.7\times10^{-2}t - 0.656x)e^{-0.656x}$ کی ترسیم کو شکل 13.6 میں دکھایا گیا ہے ، جہاں وقت کو t اور فاصلہ کو x ظاہر کرتے ہیں۔یہ ترسیم سطح زمین سے نیچے درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت دکھاتی ہے۔گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی w کو سطحی تبدیلی کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔چار میٹر کی گہرائی پر سطح تبدیلی کے 6.3 فی صد جتنی تبدیلی پائی جاتی ہے۔نو میٹر گہرائی پر پورے سال درجہ حرارت میں تبدیلی قابل نظر انداز ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 4 میٹر گہرائی پر درجہ حرارت سطحی درجہ حرارت سے تقریباً آدھا سال پیچھے ہے۔یوں اس گہرائی پر گرمی کی موسم میں کم سے کم اور سردی کی موسم میں زیادہ سے زیادہ درجہ حرارت ہو گا۔(میں مشورہ دوں گا کہ زیر زمین ایک کمرہ ضرور بنائیں۔) □

سوالات

دائرہ کار، سعت اور ہم قد منحنیات

سوال 13.1 تا سوال 13.12 میں (ا) تفاعل کا دائرہ کار تلاش کریں، (ب) تفاعل کی سعت تلاش کریں، (ج) تفاعل کی ہم قد منحنی پر تبصرہ کریں، (د) تفاعل کے دائرہ کار کی سرحد معلوم کریں، (ہ) کیا دائرہ کار کھلا خطہ، بند خطہ یا دونوں میں سے کوئی نہیں ہے، (و) کیا دائرہ کار محدود یا غیر محدود ہے؟

سوال 13.1: $f(x,y)=y-x$

سوال 13.2: $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

سوال 13.3: $f(x,y)=4x^2+9y^2$

سوال 13.4: $f(x,y)=x^2-y^2$

سوال 13.5: $f(x,y)=xy$

سوال 13.6: $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$

سوال 13.7: $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

سوال 13.8: $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

سوال 13.9: $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

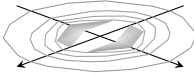
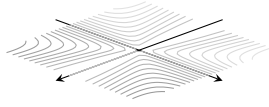
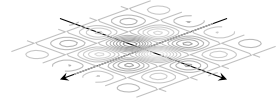
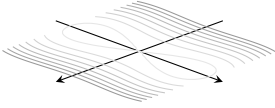
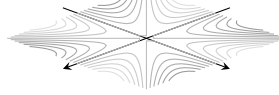
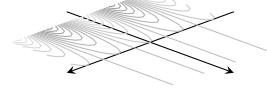
سوال 13.10: $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$

سوال 13.11: $f(x,y)=\sin^{-1}(y-x)$

سوال 13.12: $f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$

ہم قد ترسیمات اور تفاعل کی پہچان

سوال 13.13 تا سوال 13.18 میں دی گئی ہم قد ترسیمات کی سطحیں شکل 13.18 تا شکل 13.17 میں دی گئی ہیں۔ ہم قد ترسیمات کی سطح پہچانیے۔

سوال 13.13: ہم قد ترسیم شکل 13.7 میں دی گئی ہے۔

شکل 13.7 شکل 13.8 شکل 13.9

شکل 13.10 شکل 13.11 شکل 13.12

سوال 13.14: ہم قد ترسیم شکل 13.8 میں دی گئی ہے۔

سوال 13.15: ہم قد ترسیم شکل 13.9 میں دی گئی ہے۔

سوال 13.16: ہم قد ترسیم شکل 13.10 میں دی گئی ہے۔

سوال 13.17: ہم قد ترسیم شکل 13.11 میں دی گئی ہے۔

سوال 13.18: ہم قد ترسیم شکل 13.12 میں دی گئی ہے۔

دو متغیرات کے تفاعل کی پہچان

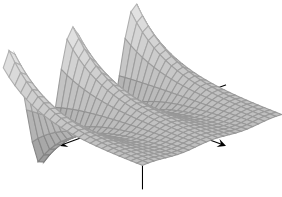
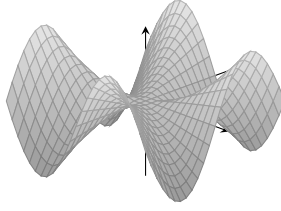
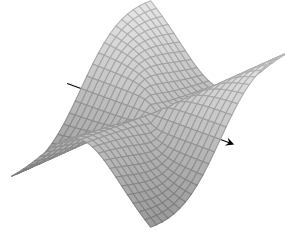
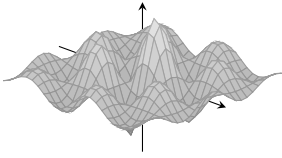
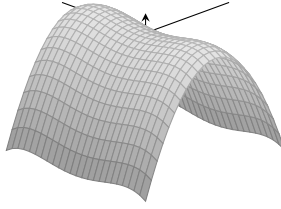
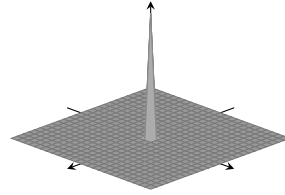
سوال 13.19 تا سوال 13.28 میں تفاعل کی قیمتوں کو دو طرح دکھائیں۔ (ا) سطح $z = f(x, y)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اور (ب) تفاعل کے دائرہ کار میں منتخب ہم قد منحنیات ترسیم کرتے ہوئے۔ ہر ایک ہم قد منحنی کی نشاندہی تفاعل کی قیمت سے کریں۔

سوال 13.19: $f(x, y) = y^2$

سوال 13.20: $f(x, y) = 4 - y^2$

سوال 13.21: $f(x, y) = x^2 + y^2$

سوال 13.22: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

سوال 13.23: $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$

شکل 13.13

شکل 13.14

شکل 13.15

شکل 13.16

شکل 13.17

شکل 13.18

سوال 13.24: $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

سوال 13.25: $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

سوال 13.26: $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

سوال 13.27: $f(x,y) = 1 - \lvert y \rvert$

سوال 13.28: $f(x,y) = 1 - \lvert x \rvert - \lvert y \rvert$

ہم قد سطحیں

سوال 13.29 تا سوال 13.36 میں تفاعل کا ایک علامتی ہم قد سطح کا خاکہ بنائیں۔

سوال 13.29: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

سوال 13.30: $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

سوال 13.31: $f(x,y,z) = x + z$

سوال 13.32: $f(x,y,z)=z$

سوال 13.33: $f(x,y,z)=x^2+y^2$

سوال 13.34: $f(x,y,z)=y^2+z^2$

سوال 13.35: $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

سوال 13.36: $f(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}$

ہم قد منحنی کی تلاش

سوال 13.37 تا سوال 13.40 میں تفاعل $f(x,y)$ کی اس ہم قد منحنی کی مساوات تلاش کریں جو دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہو۔

سوال 13.37: $f(x,y)=16-x^2-y^2, \quad (2\sqrt{2},\sqrt{2})$

سوال 13.38: $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}, \quad (1,0)$

سوال 13.39: $f(x,y)=\int\limits_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad (-\sqrt{2},\sqrt{2})$

سوال 13.40: $f(x,y)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1,2)$

ہم قد سطح کی تلاش

سوال 13.41 تا سوال 13.44 میں دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہم قد سطح کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13.41: $f(x,y,z)=\sqrt{x-y}-\ln z, \quad (3,-1,1)$

سوال 13.42: $f(x,y,z)=\ln(x^2+y+z^2), \quad (-1,2,1)$

سوال 13.43: $g(x,y,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!z^n}, \quad (\ln 2,\ln 4,3)$

سوال 13.44: $g(x,y,z)=\int\limits_x^y \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}+\int\limits_{\sqrt{2}}^z \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}, \quad (0,\frac{1}{2},2)$

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.45: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت۔
کیا لکیر $x = 20 - t,\ y = t,\ z = 20$ پر تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ:اس لکیر پر $w = (f, y, z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 13.46: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی کم سے کم قیمت۔
کیا لکیر $x = t - 1,\ y = t - 2,\ z = t + 7$ پر تفاعل $f(x, y, z) = xy - z$ کی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ:اس لکیر پر $w = (f, y, z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال 13.47: جہاز کا صوتی دھماکا
ایک جہاز کے نیچے زمین پر اس خطہ کی چوڑائی w جہاں جہاز کا صوتی دھماکا انسان برائے راست (جو فضا میں ہوا کی مختلف سطحوں سے منعکس نہ ہو) سن سکتا ہو، درج ذیل کا تفاعل ہو گا۔

- T زمین پر ہوا کی درجہ حرارت (کیلون)
- h جہاز کی بلندی (کلو میٹر)
- d درجہ حرارت کی انتصابی شرح تبدیلی (کیلون فی کلو میٹر)

اس چوڑائی کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$w = 4\sqrt{\frac{Th}{d}}$$

یہ جہاز $16.8\,\mathrm{km}$ کی بلندی پر پرواز کرتا ہوا بحیرہ عرب سے کراچی شہر پہنچ رہا ہے۔ اگر سطحی درجہ حرارت $290\,\mathrm{K}$ اور انتصابی شرح حرارت $5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ ہو تب جہاز ساحل سے کتنا دور ہو گا جب اس کا صوتی دھماکا سنائی دے۔

سوال 13.48: جیسا کہ آپ جانتے ہیں، واحد حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم دو محددی فضا کا سلسلہ ہو تا ہے۔ دو غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم تین محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ تین غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم چار محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ آپ چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟۔ آپ n غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟

کمپیوٹر کا استعمال۔ صریح سطح

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال 13.49 تا سوال 13.52 میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر سطح ترسیم کریں۔

ب. اس مستطیل میں کئی ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی f کی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

سوال 13.49: $f(x,y) = x\sin\frac{y}{2} + y\sin 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال 13.50: $f(x,y) = (\sin x)(\cos x)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال 13.51: $f(x,y) = \sin(x + 2\cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le 2\pi$

سوال 13.52: $f(x,y) = e^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2+y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le \pi$

کمپیوٹر کا استعمال۔ خفی سطح

سوال 13.53 تا سوال 13.56 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ہم قد سطحیں ترسیم کریں۔

سوال 13.53: $4\ln(x^2+y^2+z^2) = 1$

سوال 13.54: $x^2+z^2 = 1$

سوال 13.55: $x+y^2-3z^2 = 1$

سوال 13.56: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2+z^2} = 2$

کمپیوٹر کا استعمال۔ مقدار معلوم سطح

جیسا آپ کسی مقدار معلوم وقفہ I پر مستوی میں منحنیات کو مقدار معلوم مساوات $x = f(t), y = g(t)$ کی روپ میں لکھتے ہیں، آپ بعض اوقات کسی مقدار معلوم مستطیل $a \le u \le b, c \le v \le d$ وقفہ پر فضا میں سطحوں کو مقدار معلوم تین مساوات $x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v)$ کی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔کمپیوٹر اس قسم کی مقدار معلوم مساواتوں سے سطح ترسیم کر سکتا ہے۔سوال 13.57 تا سوال 13.60 میں کمپیوٹر کی مدد سے سطحیں ترسیم کریں۔ساتھ ہی xy مستوی میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

سوال 13.57: $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u, \quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

سوال 13.58: $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

سوال 13.59: $x = (2+\cos u)\cos v, y = (2+\cos u)\sin v, z = \sin u,$
$0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$

سوال 13.60: $x = 2\cos u\cos v, \quad y = 2\cos u\sin v, \quad z = 2\sin u$
$0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \pi$

13.2 حد اور استمرار

اس حصہ میں کثیر المتغیر تفاعل کی حد اور استمرار پر غور کیا جائے گا۔

حد

اگر نقطہ (x_0, y_0) کے قریب تمام نقاط (x, y) کے لئے تفاعل $f(x, y)$ کی قیمتیں کسی مقررہ حقیقی عدد L کے بہت زیادہ قریب ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے (x, y) نقطہ (x_0, y_0) تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، تفاعل f کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ تعریف، واحد متغیر کے تفاعل کی حد کی تعریف کی مانند ہے۔البتہ، دھیان رہے کہ اگر (x_0, y_0) تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون میں پایا جاتا ہو تب (x, y) نقطہ (x_0, y_0) تک کسی بھی رخ سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔جیسا آپ نیچے دی گئی مثالوں میں سے چند میں دیکھیں گے، قریب پہنچنے کا رخ بعض اوقات مسئلہ کھڑا کر سکتا ہے۔

تعریف: اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ f کے دائرہ کار میں تمام (x, y) کے لئے

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon \tag{13.1}$$

ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ (x_0, y_0) تک (x, y) پہنچنے سے $f(x, y)$ کی قیمت حد[29] L تک پہنچتی ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

□

حد کی تعریف میں $\delta\sigma$ کی شرط اس کی معادل ہے کہ، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لئے درج ذیل ہو (سوال 13.119)۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{اور} \quad 0 < |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon \tag{13.2}$$

یوں حد کی قیمت تلاش کرتے ہوئے ہم مستوی میں فاصلوں کی صورت یا محدد میں فرق کی صورت میں سوچ سکتے ہیں۔

حد کی تعریف، تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون کے ساتھ سرحدی نقاط (x_0, y_0) کے لئے بھی کارآمد ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x, y) ہر وقت دائرہ کار کے اندر رہے۔

---

[29] limit

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح درج ذیل دکھائے جا سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0\\
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0 \qquad (13.3)\\
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k
\end{aligned}
$$

k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے

یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ دو تفاعل کے مجموعہ کا حد، ان تفاعل کے انفرادی حد (اگر دونوں موجود ہوں) کا مجموعہ ہو گا۔اسی طرح کے نتائج فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، مستقل مضرب اور طاقت کے لئے بھی دکھائے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ 13.1: دو متغیرات کے تفاعل کی حد کے خواص
اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

ہوں تب درج ذیل قواعد کارآمد ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim[f(x,y) + g(x,y)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim[f(x,y) - g(x,y)] = L - M$

قاعدہ مستقل مضرب: $\lim kf(x,y) = kL$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ اگر $M \neq 0$ ہو۔

قاعدہ طاقت: $\lim[f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$ اگر m اور n اعداد صحیح اور $L^{m/n}$ ایک حقیقی عدد ہو۔

تمام حد $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کی صورت میں حاصل کیے جائیں گے اور L ، M کا حقیقی اعداد ہونا لازمی ہے۔

مساوات 13.3 پر مسئلہ 13.1 کے اطلاق سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی حد ہم (x_0,y_0) پر تفاعل کی قیمت سے حاصل کرتے ہیں۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x_0,y_0) پر تفاعل معین ہو۔

مثال 13.10:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-xy+3}{x^2y+5xy-y^3} = \frac{0-(0)(1)+3}{(0)^2(1)+5(0)(1)-(1)^3} = -3$$
$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

مثال 13.11: درج ذیل حاصل کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

حل: چونکہ $(x,y)\to(0,0)$ پر نسب نما 0 کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم قاعدہ حاصل تقسیم (مسئلہ 13.1) استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ نسب نما اور شمار کنندہ کو $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ سے ضرب دے کر ایسا معادل حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے جس کا حد ہم تلاش کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} && \text{الجبرا} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) && \text{جزو } (x-y) \text{ کاٹا گیا} \\
&= 0(\sqrt{0}+\sqrt{0}) = 0
\end{aligned}$$

□

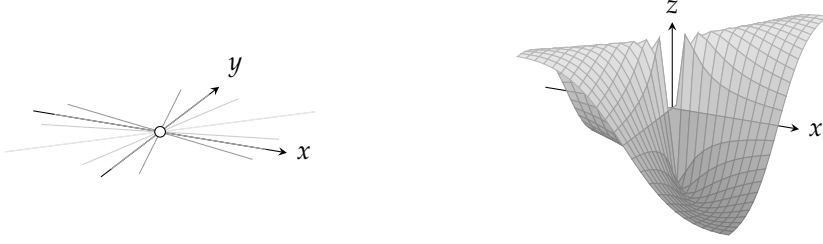
استمرار

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمرار کی تعریف حد کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر

ا. (x_0,y_0) پر f معین ہو،

ب. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود ہو،

ج. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ہو،

شکل 13.19: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے۔

تب تفاعل f **نقطہ** (x_0, y_0) **پر استمراری**[30] ہو گا۔ ایک تفاعل جو اپنے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری ہو **استمراری**[31] ہو گا۔

□

حد کی تعریف کی طرح، استمرار کی تعریف بھی f کے دائرہ کار کے تمام اندرونی نقاط کے ساتھ ساتھ سرحدی نقاط پر بھی قابل اطلاق ہوتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ پورے وقت نقطہ (x,y) تفاعل کے دائرہ کار میں رہے۔

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، مسئلہ 13.1 کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ استمراری تفاعل کے الجبرائی جوڑ ہر اس نقطہ پر استمراری ہوں گے جس پر تمام شامل تفاعل استمراری ہوں۔اس کا مطلب ہے کہ جہاں تمام استمراری تفاعل استمراری ہوں وہاں ان کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، مستقل مضرب، حاصل تقسیم اور طاقت استمراری ہوں گے۔ بالخصوص دو متغیرات کی کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

اگر x اور y کا استمراری تفاعل $z = f(x,y)$ ہو جبکہ z کا استمراری تفاعل $z = g(z)$ ہو، تب مرکب $w = g(f(x,y))$ استمراری ہو گا۔یوں ہر نقطہ (x,y) پر درج ذیل استمراری ہوں گے۔

$$e^{x-y}, \quad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \quad \ln(1+x^2y^2)$$

واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمراری تفاعل کا مرکب بھی استمراری ہو گا، بس اتنا ضروری ہے کہ وہاں ہر تفاعل استمراری ہو۔

مثال 13.12: دکھائیں کہ ماسوائے مبدا درج ذیل ہر نقطہ پر استمراری ہے (شکل 13.19)۔

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

---

[30] continuous
[31] continuous

حل: ہر نقطہ $(x, y) \neq (0, 0)$ پر تفاعل کی قیمت x اور y کے ناطق تفاعل سے حاصل کی جاتی ہے لہٰذا f استمراری ہو گا۔

نقطہ $(0, 0)$ پر f کی قیمت معین ہے، لیکن ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $(x, y) \to (0, 0)$ کرتے ہوئے اس کا حد غیر موجود ہے۔اس کی وجہ، جیسا ہم دیکھیں گے، یہ ہے کہ مبدا تک مختلف راہوں سے پہنچتے ہوئے مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

درج ذیل کی بنا، سوراخ دار لکیر $y = mx,\ x \neq 0$ پر m کی ہر قیمت کے لئے تفاعل f کی ایک مستقل قیمت ہو گی۔

$$f(x, y)\big|_{y=mx} = \left.\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

یوں اس لکیر پر جیسے جیسے (x, y) مبدا تک پہنچتا ہے، f کی حد اتنی ہو گی:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{خط } y = mx \text{ پر}}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ حد کی قیمت m پر منحصر ہے۔یوں ایسی کوئی یکتا قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کو مبدا تک (x, y) پہنچنے پر ہم f کی حد کہہ سکیں۔ مبدا پر حد غیر موجود ہے لہٰذا مبدا پر تفاعل غیر استمراری ہو گا۔ □

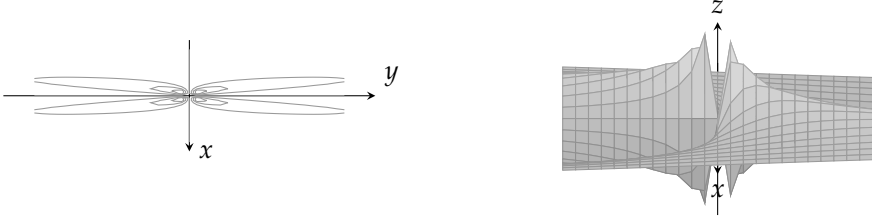
دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل کے حد کے بارے میں ایک اہم نقطہ مثال 13.12 میں اجاگر ہوا۔ ایک نقطہ پر حد کی موجودگی کے لئے ضروری ہے کہ اس نقطہ تک تمام آمد راہوں پر حد کی قیمت ایک جیسی ہو۔ یوں جب بھی ہم ایک نقطہ تک ایسی راہیں تلاش کریں جن پر حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب اس نقطہ پر تفاعل کا حد غیر موجود ہو گا۔

حد کی غیر موجودگی کی دو راہ پرکھ

اگر (x, y) تک نقطہ (x_0, y_0) ایسی دو مختلف راہوں سے پہنچے جن پر $f(x, y)$ کے حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ غیر موجود ہو گا۔

□

مثال 13.13: دکھائیں کہ $(0, 0)$ تک (x, y) پہنچنے سے درج ذیل تفاعل کا کوئی حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل 13.20)۔

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

شکل 13.20: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y)=2x^2y/(x^4+y^2)$ استمراری ہے۔

حل: منحنی $y=kx^2,\ x\neq 0$ پر اس تفاعل کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$f(x,y)\big|_{y=kx^2}=\left.\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right|_{y=kx^2}=\frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2}=\frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{2k}{1+k^2}$$

یوں

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2 \text{ پر}}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\,f(x,y)\big|_{y=kx^2}\right]=\frac{2k}{1+k^2}$$

ہو گا جو آمد راہ پر منحصر ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک قطع مکافی $y=x^2$ راہ پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k=1$ ہے، تب حد 1 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک محور x پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k=0$ ہے، تب حد 0 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں دو راہ پر کھ کے تحت $(0,0)$ تک (x,y) کے پہنچنے سے f کا کوئی حد حاصل نہیں ہو گا۔ □

یہاں آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ مبدا تک نقطہ (x,y) کے پہنچنے سے بہت سارے مختلف حد ملتے ہیں لہٰذا یہ کہنا درست نہیں کہ f کا حد غیر موجود ہے۔ یہی وہ نقطہ ہے جسے سمجھنا ضروری ہے۔ حد کی تعریف کہتی ہے کہ حد کی قیمت راہ پر منحصر نہیں ہو سکتی۔

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو متغیرات کے تفاعل کے حد اور استمرار کی تعریف اور ان تفاعل کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، طاقت اور مرکب کے بارے میں حاصل نتائج تین یا تین سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہیں۔ درج ذیل تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہیں

$$\ln(x+y+z) \quad \text{اور} \quad \frac{y\sin z}{x-1}$$

اور درج ذیل طرز کا حد، جہاں N نقطہ (x,y,z) کو ظاہر کرتا ہے، حاصل کرنے کے لئے تفاعل میں نقطہ پر کیا جاتا ہے۔

$$\lim_{N\to(1,0,-1)}\frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}=\frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0}=\frac{1}{2}$$

سوالات

حد کی قیمت کی تلاش

سوال 13.61 تا سوال 13.72 میں حد کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.61: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

سوال 13.62: $\lim_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

سوال 13.63: $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

سوال 13.64: $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

سوال 13.65: $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$

سوال 13.66: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \frac{x^2+y^3}{x+y+1}$

سوال 13.67: $\lim_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

سوال 13.68: $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left|1+x^2y^2\right|$

سوال 13.69: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

سوال 13.70: $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{\left|xy\right|-1}$

سوال 13.71: $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$

سوال 13.72: $\lim_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y+1}{y-\sin x}$

حاصل تقسیم کے حد

حاصل تقسیم کو ترتیب دیتے ہوئے سوال 13.73 تا سوال 13.80 میں حد تلاش کریں۔

سوال 13.73: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

سوال 13.74: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

سوال 13.75: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

سوال 13.76: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

سوال 13.77: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

سوال 13.78: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

سوال 13.79: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

سوال 13.80: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

تین متغیرات کے تفاعل کا حد

سوال 13.81 تا سوال 13.86 میں حد تلاش کریں۔

سوال 13.81: $\lim\limits_{N\to(1,3,4)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

سوال 13.82: $\lim_{N\to(1,-1,-1)} \frac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

سوال 13.83: $\lim_{N\to(3,3,0)} (\sin^2 x+\cos^2 y+\sec^2 z)$

سوال 13.84: $\lim_{N\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

سوال 13.85: $\lim_{N\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

سوال 13.86: $\lim_{N\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

مستوی میں استمرار

سوال 13.87 تا سوال 13.90 میں کس نقطہ (x,y) پر مستوی میں تفاعل استمراری ہیں؟

سوال 13.87: (ا) $f(x,y)=\sin(x+y)$ (ب) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

سوال 13.88: (ا) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ (ب) $f(x,y)=\frac{y}{x^2+1}$

سوال 13.89: (ا) $g(x,y)=\sin\frac{1}{xy}$ (ب) $g(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$

سوال 13.90: (ا) $g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ (ب) $g(x,y)=\frac{1}{x^2-y}$

فضا میں استمرار

سوال 13.91 تا سوال 13.94 میں کس نقطہ (x,y,z) پر فضا میں تفاعل استمراری ہیں؟

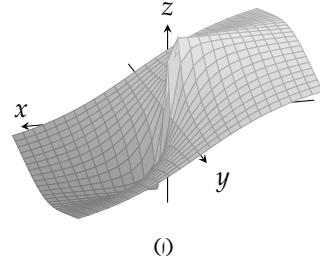
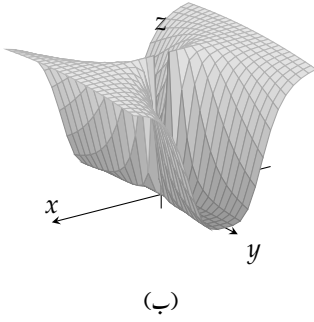
سوال 13.91: (ا) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ (ب) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

سوال 13.92: (ا) $f(x,y,z)=\ln xyz$ (ب) $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$

سوال 13.93: (ا) $h(x,y,z)=xy\sin\frac{1}{z}$ (ب) $h(x,y,z)=\frac{1}{x^2+z^2-1}$

سوال 13.94: (ا) $h(x,y,z)=\frac{1}{|y|+|z|}$ (ب) $h(x,y,z)=\frac{1}{|xy|+|z|}$

(ب)

(ا)

شکل 13.21

نقطہ پر حد غیر موجود

نقطہ تک مختلف راہ پر پہنچتے ہوئے سوال 13.95 تا سوال 13.102 میں دکھائیں کہ $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے تفاعل کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

سوال 13.95: $f(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (شکل 13.21-ا)

سوال 13.96: $h(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$ (شکل 13.21-ب)

سوال 13.97: $h(x,y) = \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

سوال 13.98: $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$

سوال 13.99: $g(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

سوال 13.100: $g(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

سوال 13.101: $h(x,y) = \frac{x^2+y}{y}$

سوال 13.102: $h(x,y) = \frac{x^2}{x^2-y}$

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.103: کیا $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ کی صورت میں (x_0,y_0) کا معین ہونا لازمی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.104: اگر $f(x_0,y_0) = 3$ ہو تب درج ذیل کے بارے میں (ا) (x_0,y_0) پر استمراری f کی صورت میں،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

(ب) (x_0,y_0) پر غیر استمراری f کی صورت میں کیا کہا جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بیچ کہتا ہے کہ اگر ایک قرص، جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو، کے اندر تمام $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ پر $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ ہو، اور $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے g اور h دونوں کا حد متناہی اور L ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ہو گا۔ سوال 13.105 تا سوال 13.110 میں اس نتیجہ کا سہارا لیتے ہوئے جواب دیں۔

سوال 13.105: کیا

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

جانتے ہوئے آپ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$

کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.106: کیا

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

جانتے ہوئے

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.107: کیا $\left|\sin(1/x)\right| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

سوال 13.108: کیا $\left|\cos(1/y)\right| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

سوال 13.109: (ا) دوبارہ مثال 13.12 کو پڑھیں۔اب درج ذیل کلیہ میں $m = \tan\theta$ پر کر کے اس کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ f کی قیمت لکیر کے زاویہ میلان پر منحصر ہی گی۔

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \frac{2m}{1+m^2}$$

(ب) جزو-ا میں حاصل کلیہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ لکیر $y = mx$ پر چلتے ہوئے $(x,y) \to (0,0)$ کرنے سے f کے حد کی قیمت -1 تا 1 ہو سکتی ہے جو قریب پہنچنے کی راہ کے زاویہ پر منحصر ہو گی۔

سوال 13.110: $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں جو درج ذیل کو مبدا پر بھی استمراری بناتا ہو۔

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

قطبی محدد میں تبادلہ

اگر کارتیسی محدد میں $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ کے حصول میں پیش رفت نہ ہو تب قطبی محدد میں حد تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ کرتے ہوئے $r \to 0$ کے لئے حاصل تفاعل کا حد تلاش کریں۔دوسرے الفاظ میں یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا کوئی ایسا عدد L پایا جاتا ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو:

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کا ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left|f(r,\theta) - L\right| < \epsilon$$

اگر ایسا L موجود ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = L \tag{13.4}$$

ہو گا۔مثال کے طور پر

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$$

ہو گا۔ آخری عدم مساوات کی تصدیق کرنے کی خاطر ہمیں دکھانا ہو گا کہ $f(r,\theta) = r\cos^3\theta$ اور L مساوات 13.4 کو مطمئن کرتے ہیں۔ یعنی ہمیں دکھانا ہو گا کہ کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام r اور θ کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left| r\cos^3\theta - 0 \right| < \epsilon \tag{13.5}$$

چونکہ

$$\left| r\cos^3\theta \right| = |r| \left| \cos^3\theta \right| \le |r|\cdot 1 = |r|$$

ہوتا ہے لہٰذا $\delta = \epsilon$ لینے سے تمام r اور θ کے لئے مساوات 13.5 مطمئن ہو گا۔

اس کے برعکس $|r|$ جتنا بھی چھوٹا کیوں نا ہو درج ذیل تفاعل کی قیمت 0 سے 1 تک ہو سکتی ہے لہٰذا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ غیر موجود ہو گا۔

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

درج بالا دو تفاعل میں $r \to 0$ کرتے ہوئے حد کی موجودگی یا غیر موجودگی کا مسئلہ سیدھا تھا۔البتہ ضروری نہیں کہ قطبی محدد میں تبادلہ سود مند ثابت ہو، بلکہ بعض اوقات ایسا کرنے سے ہم بالکل غلط نتیجہ کی طرف راغب ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، تمام سیدھے خطوط $\theta = c$ ، جہاں c مستقل ہے، پر حد موجود ہو سکتا ہے اگرچہ وسیع معنوں میں حد غیر موجود ہو گا۔ مثال 13.13 میں اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے۔ قطبی محدد میں $r \neq 0$ کے لئے $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ درج ذیل ہو گا۔

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

اب θ برقرار رکھتے ہوئے $r \to 0$ کرنے سے حد 0 ملتا ہے۔البتہ راہ $y = x^2$ پر $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2} \\ &= \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1 \end{aligned}$$

سوال 13.111 تا سوال 13.116 میں $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے f کا حد تلاش کریں یا دکھائیں کہ اس کا حد غیر موجود ہے۔

سوال 13.111: $f(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}$

سوال 13.112: $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}\right)$

سوال 13.113: $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

سوال 13.114: $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+x+y^2}$

سوال 13.115: $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

سوال 13.116: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

سوال 13.117 اور سوال 13.118 میں $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں کہ f مبدا پر بھی استمراری ہو۔

سوال 13.117: $f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$

سوال 13.118: $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

$\delta\epsilon$ تعریفات کا استعمال

سوال 13.119: دکھائیں کہ حد کی تعریف (مساوات 13.1) میں $\delta\epsilon$ پر عائد شرط مساوات 13.2 میں دی گئی شرط کے مترادف ہے۔

سوال 13.120: $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے تفاعل $f(x,y)$ کے حد کی باضابطہ $\delta\epsilon$ تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے $(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)$ کرتے ہوئے $g(x,y,z)$ کے حد کی تعریف پیش کریں۔ چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل $h(x,y,z,t)$ کی حد کی تعریف کیا ہو گی؟

سوال 13.121 تا سوال 13.124 میں تفاعل $f(x,y)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یا دکھائیں کہ ایسا $\delta>0$ موجود ہے کہ (x,y) کے لئے

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta \implies \left|f(x,y)-f(0,0)\right|<\epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta>0$ موجود ہے کہ تمام (x,y) کے لئے

$$|x|<\delta,\quad \left|y\right|<\delta \implies \left|f(x,y)-f(0,0)\right|<\epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال 13.121: $f(x,y)=x^2+y^2,\quad \epsilon=0.01$

سوال 13.122: $f(x,y)=\frac{y}{x^2+1},\quad \epsilon=0.05$

سوال 13.123: $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+1},\quad \epsilon=0.01$

سوال 13.124: $f(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x},\quad \epsilon=0.02$

سوال 13.125 تا سوال 13.128 میں تفاعل $f(x,y,z)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یا دکھائیں کہ ایسا $\delta>0$ موجود ہے کہ (x,y,z) کے لئے

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta \implies \left|f(x,y,z)-f(0,0,0)\right|<\epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یا دکھائیں کہ ایسا $\delta>0$ موجود ہے کہ تمام (x,y,z) کے لئے

$$|x|<\delta,\quad \left|y\right|<\delta,\quad |z|<\delta \implies \left|f(x,y,z)-f(0,0,0)\right|<\epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

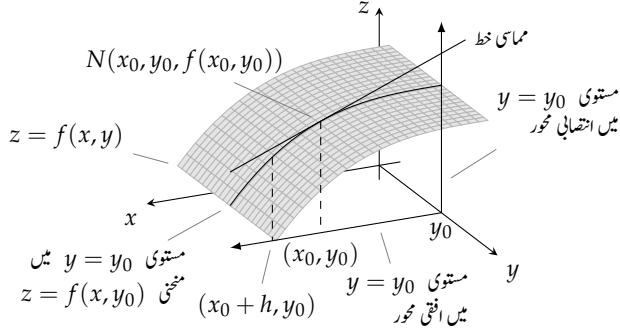
سوال 13.125: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2,\quad \epsilon=0.015$

سوال 13.126: $f(x,y,z)=xyz,\quad \epsilon=0.008$

سوال 13.127: $f(x,y,z)=\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1},\quad \epsilon=0.015$

سوال 13.128: $f(x,y,z)=\tan^2 x+\tan^2 y+\tan^2 z,\quad \epsilon=0.03$

سوال 13.129: دکھائیں کہ ہر نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر تفاعل $f(x,y,z)=x+y-z$ استمراری ہے۔

سوال 13.130: دکھائیں کہ مبدا پر $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ استمراری ہے۔

شکل 13.22: مستوی $y = y_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا تقاطع۔

13.3 جزوی تفرقات

جب ہم ماسوائے ایک غیر تابع متغیر کے باقی تمام کو برقرار رکھیں اور اس ایک متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا تفرق لیں تو ہمیں "جزوی" تفرق حاصل ہوتا ہے۔ اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ جزوی تفرقات کیسے پائے جاتے ہیں اور واحد متغیر کے تفاعل کے تفرق کے قواعد بروئے کار لاتے ہوئے جزوی تفرقات کی قیمت کے حصول کے بارے میں بتایا جائے گا۔

تعریفات اور علامتیت

اگر تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار میں (x_0, y_0) ایک نقطہ ہو تب انتصابی سطح $y = y_0$ سطح $z = f(x, y)$ کو منحنی $z = f(x, y_0)$ میں مس کرے گا (شکل 13.22)۔ یہ منحنی مستوی $y = y_0$ میں تفاعل $z = f(x, y_0)$ کی ترسیم ہو گی۔اس مستوی میں افقی محدد x ہے؛ انتصابی محدد z ہے۔

ہم نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق سے مراد نقطہ $x = x_0$ پر $f(x, y_0)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے $f(x, y)$ **کا جزوی تفرق**[32]

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{13.6}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔ (آپ ∂ کو d کی ایک قسم تصور کریں۔)

□

[32] partial derivative

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $y = y_0$ میں منحنی $z = f(x, y_0)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $y = y_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب y کی قیمت برقرار y_0 رکھی جائے تب x کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر $\boldsymbol{i}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

جزوی تفرق کی علامت اس چیز پر منحصر ہو گی جس پر ہم زور دینا چاہتے ہیں۔ یوں درج ذیل علامت اس وقت استعمال کیے جائیں گے جب ہم نقطہ (x_0, y_0) پر زور دینا چاہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

سائنس اور انجینئری میں درج ذیل علامت مقبول ہے جہاں تفاعل کا صریحاً ذکر کیے بغیر نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے z کا جزوی تفرق لیا گیا ہے۔

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

جہاں جزوی تفرق کو ایک تفاعل تصور کرنا مقصود ہو وہاں درج ذیل علامت استعمال کیے جائیں گے، جہاں x لے لحاظ سے f (یا z) کے جزوی تفرقات لیے گئے ہیں۔

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کے جزوی تفرق کی تعریف، x کے لحاظ سے f کی جزوی تفرق کی تعریف کی طرح ہے۔ ہم x کو x_0 رکھتے ہوئے y_0 پر y کے لحاظ سے $f(x_0, y)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

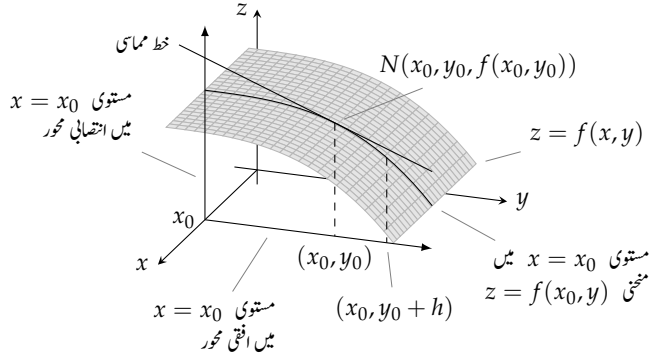
تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر y **کے لحاظ سے** $f(x, y)$ **کا جزوی تفرق**[33]

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y = y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{13.7}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $x = x_0$ میں منحنی $z = f(x_0, y)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے (شکل 13.23)۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $x = x_0$ میں وہ خط

partial derivative[33]

شکل 13.23: مستوی $x = x_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا تقاطع۔

ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب x کی قیمت برقرار x_0 رکھی جائے تب y کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر $\boldsymbol{j}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

متغیر y کے لحاظ سے جزوی تفرق کو x کے لحاظ سے جزوی تفرق کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y$$

دھیان رہے کہ نقطہ (x_0, y_0) پر اب سطح $z = f(x, y)$ کے ساتھ دو مماسی خط منسلک ہیں (شکل 13.24)۔ شکل 13.24 میں ظاہری طور پر دو مماس کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔ کیا ایسے دو مماس کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی ہو گا؟ جزوی تفرق کے بارے میں مزید معلومات جاننے کے بعد ہم اس سوال کا جواب دے پائیں گے۔

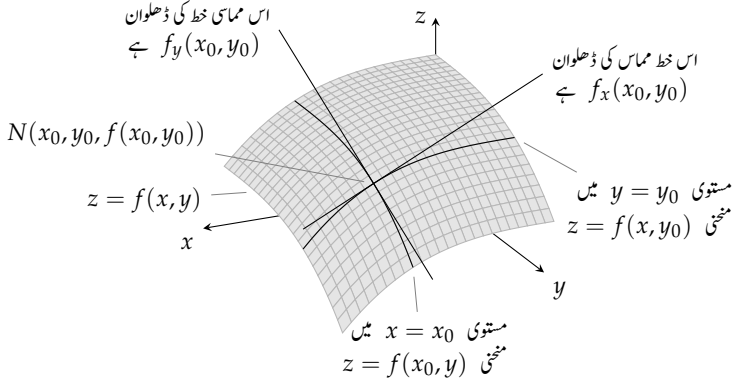
حساب

جیسا ہم مساوات 13.6 سے جانتے ہیں، y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیگا۔ اسی طرح مساوات 13.7 کہتی ہے کہ x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیگا۔

مثال 13.14: نقطہ $(4, -5)$ پر درج ذیل کے لئے $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

حل: ہم y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

شکل 13.24: نقطہ N پر دو مماس کا تعین کردہ سطح ظاہری طور پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial x}$ کی قیمت $2(4) + 3(-5) = -7$ ہو گی۔

اسی طرح ہم x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial y}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1$$

نقطہ $(4, -5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمت $3(4) + 1 = 13$ ہو گی۔ □

مثال 13.15: تفاعل $f(x, y) = y \sin xy$ کا $\frac{\partial f}{\partial y}$ معلوم کریں۔

حل: ہم x کو مستقل تصور جبکہ f کو y اور $\sin xy$ کا حاصل ضرب تصور کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(y \sin xy) = y \frac{\partial}{\partial y} \sin xy + (\sin xy) \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ &= (y \cos xy) \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \sin xy = xy \cos xy + \sin xy\end{aligned}$$

□

فنیات

جزوی تفرق کمپیوٹر آپ کو حساب میں کئی بعد تک مدد فراہم کر سکتا ہے۔ آپ ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ تمام متغیرات کی قیمتیں فراہم کر کے واحد متغیر کے لحاظ سے جزوی تفرق معلوم کر کے ترسیم کر سکتے ہیں۔ جزوی تفرق اور سادہ تفرق کے لئے کمپیوٹر کی زبان میں عموماً ایک جیسی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔ جزوی تفرقات کے حصول میں کمپیوٹر ضرور استعمال کریں۔

مثال 13.16: تفاعل $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$ کے لئے f_x تلاش کریں۔

حل: ہم f کو حاصل تقسیم تصور کر کے y کو مستقل ٹھرا کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}f_x&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2y}{y+\cos x}\Big)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}\\&=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}\end{aligned}$$

□

مثال 13.17: مستوی $x=1$ قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کو قطع مکافی میں قطع کرتا ہے۔نقطہ $(1,2,5)$ پر اس قطع مکافی کے مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

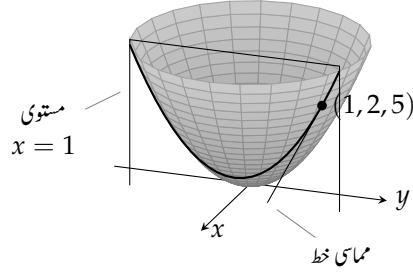
حل: مماس کی ڈھلوان نقطہ $(1,2)$ پر جزوی تفرق $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمت ہو گی (شکل 13.25):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right|_{(1,2)}=\left.2y\right|_{(1,2)}=2(2)=4$$

تصدیق کی خاطر ہم قطع مکافی کو واحد متغیر تفاعل $z=(1)^2+y^2=1+y^2$ کی مستوی $x=1$ میں ترسیم تصور کر کے $y=2$ پر اس کی ڈھلوان حاصل کرتے ہیں۔ یہ ڈھلوان جس کو سادہ تفرق سے حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=2}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1+y^2)\right|_{y=2}=\left.2y\right|_{y=2}=4$$

□

سادہ تفرق کی طرح جزوی تفرق کے لئے بھی خفی تفرق کار آمد ہے۔

شکل 13.25: مستوی $x = 1$ اور سطح $z = x^2 + y^2$ کے تقاطع منحنی کا نقطہ $(1, 2, 5)$ پر مماس (مثال 13.17)۔

مثال 13.18: اگر درج ذیل مساوات دو غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z دیتی ہو جس کا جزوی تفرق موجود ہو تب $\frac{\partial z}{\partial x}$ تلاش کریں۔

$$yz - \ln z = x + y$$

حل: ہم y کو مستقل اور z کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \\
y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + 0 && y \text{ مستقل} \\
\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 && \tfrac{\partial}{\partial x}(yz) = y\tfrac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{yz - 1}
\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی تعریف، دو متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی طرح ہے۔ یہ ایک متغیر کے لحاظ سے سادہ تفرق ہوتے ہیں جبکہ باقی تمام متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔

مثال 13.19: اگر x ، y اور z غیر تابع متغیرات ہوں جن کا تفاعل

$$f(x, y, z) = x\sin(y + 3z)$$

ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z)\\ &= x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z)\end{aligned}$$

□

مثال 13.20: متوازی جڑے برقی مزاحمت

اگر R_1 ، R_2 اور R_3 مزاحمت متوازی جڑے ہوں تب ان کا معادل مزاحمت R درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل 13.26)۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \tag{13.8}$$

برقی مزاحمتوں کی قیمتیں $R_1 = 30\,\Omega$ ، $R_2 = 45\,\Omega$ ، $R_3 = 90\,\Omega$ لیتے ہوئے جزوی تفرق $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ حاصل کریں۔

حل: ہم R_1 اور R_3 کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ تلاش کرنے کی خاطر مساوات 13.8 کے دونوں اطراف کا R_2 کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) &= \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\\ -\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} &= 0 - \frac{1}{R_2^2} + 0\\ \frac{\partial R}{\partial R_2} &= \frac{R^2}{R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2\end{aligned}$$

مزاحمتوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3+2+1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

یوں $R = 15\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

□

شکل 13.26: اس طرح جوڑے گئے مزاحمتوں کو متوازی جڑا کہتے ہیں۔

شکل 13.27: تفاعل f چار کھلے ربعات اور لکیر L_1 ، L_2 پر مشتمل ہے (مثال 13.21)۔

استمرار اور جزوی تفرق کی موجودگی کا تعلق

ایک نقطہ پر ایک تفاعل کا x اور y دونوں کے لحاظ سے جزوی تفرق موجود ہونے کے باوجود تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ یہ واحد متغیر تفاعل سے مختلف ہے جہاں تفاعل کے تفرق کی موجودگی اس کی استمرار یقینی بناتی ہے۔ہاں (جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے)، اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، $f(x, y)$ کے جزوی تفرق موجود ہوں جو پورے قرص میں استمراری ہوں تب (x_0, y_0) پر f استمراری ہو گا۔

مثال 13.21: درج ذیل تفاعل

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

نقطہ $(0, 0)$ پر غیر استمراری ہے (شکل 13.27)۔ لکیر $y = x$ پر چلتے ہوئے نقطہ (x, y) کا (x_0, y_0) تک پہنچنے سے f کا حد 0 حاصل ہوتا ہے جبکہ $f(0, 0) = 1$ ہے۔ نقطہ $(0, 0)$ پر f کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، جو شکل میں خط L_1 اور L_2 کی ڈھلوان ہیں، دونوں موجود ہیں۔ □

دو رتبی جزوی تفرقات

تفاعل $f(x,y)$ کو دو بار تفرق کرنے سے ہمیں اس تفاعل کا دو رتبی تفرق ملتا ہے۔ان تفرقات کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{یا} \quad f_{xx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{یا} \quad f_{yy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{یا} \quad f_{yx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{یا} \quad f_{xy}$$

ان کی تعریفی مساوات درج ذیل ہیں

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

جہاں تفرق لینے کی ترتیب دھیان سے دیکھیں۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$ پہلے y اور بعد میں x کے ساتھ تفرق لیں

$$f_{yx} = (f_y)_x$$ ان کا بھی یہی مطلب ہے۔

مثال 13.22: اگر $f(x,y) = x\cos y + ye^x$ ہو تب

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + ye^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = -\sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = ye^x$$

اور درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = -\sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = -x\cos y$$

□

مسئلہ یولر

آپ نے مثال 13.22 میں دھیان دیا ہو گا کہ مدغم دو رتبی جزوی تفرقات

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

کی قیمتیں ایک جیسی تھیں۔یہ محض اتفاق نہیں ہے۔جہاں بھی f ، f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} استمراری ہوں یہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ 13.2: **مدغم تفرق مسئلہ یا مسئلہ یولر**

اگر ایک کھلے خطہ میں، جس میں نقطہ (a, b) پایا جاتا ہو، $f(x, y)$ اور اس کے جزوی تفرقات f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} معین ہوں اور (a, b) پر یہ تمام استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \tag{13.9}$$

مسئلہ یولر (مسئلہ 13.2) کا ثبوت آپ کو ضمیمہ ط میں ملے گا۔

مسئلہ 13.2 کہتا ہے کہ مدغم دو رتبی جزوی تفرق کے حصول میں ہم کسی بھی ترتیب سے تفرق لے سکتے ہیں۔ بعض اوقات ایسا مدد گار ثابت ہوتا ہے۔

مثال 13.23: درج ذیل تفاعل کے لئے $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

حل: ہمیں $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ کہتا ہے کہ کہ پہلے y کے لحاظ سے تفرق لیں اور بعد میں x کے لحاظ سے تفرق لیں۔البتہ اگر ہم پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تفرق لیں تب نتیجہ زیادہ جلدی اور زیادہ آسانی سے صرف دو قدموں میں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1$$

اب پہلے y اور بعد میں x کا تفرق لیتے ہوئے اسی کو دوبارہ حل کر کے دیکھیں۔ □

مزید بلند رتبہ کے جزوی تفرقات

عملی استعمال میں یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں عموماً انہیں سے واسطہ ہو گا۔جہاں تک تفاعل کے بلند تفرقات کی بات ہے، ہم ایک تفاعل کا تفرق جتنی بار چاہیں لیں سکتے ہیں بشرطیکہ ایسے تفرقات موجود ہوں۔ یوں ہم تین رتبی اور چار رتبی تفرقات لے سکتے ہیں جنہیں درج ذیل علامتوں کی طرز پر ظاہر کیا جائے گا۔

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} = f_{yyx}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y} = f_{yyxx}$$

دو رتبی تفرق کی طرح، تفرق کی ترتیب غیر اہم ہے جب تک تمام تفرقات استمراری ہوں۔

سوالات

یک رتبی جزوی تفرق کی تلاش

سوال 13.131 تا سوال 13.152 میں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کریں۔

سوال 13.131: $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

سوال 13.132: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

سوال 13.133: $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$

سوال 13.134: $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 13.135: $f(x,y) = (xy-1)^2$

سوال 13.136: $f(x,y) = (2x-3y)^3$

سوال 13.137: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

سوال 13.138: $f(x,y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$

سوال 13.139: $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

سوال 13.140: $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

سوال 13.141: $f(x,y)=\frac{x+y}{xy-1}$

سوال 13.142: $f(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$

سوال 13.143: $f(x,y)=e^{x+y+1}$

سوال 13.144: $f(x,y)=e^{-x}\sin(x+y)$

سوال 13.145: $f(x,y)=\ln(x+y)$

سوال 13.146: $f(x,y)=e^{xy}\ln y$

سوال 13.147: $f(x,y)=\sin^2(x-3y)$

سوال 13.148: $f(x,y)=\cos^2(3x-y^2)$

سوال 13.149: $f(x,y)=x^y$

سوال 13.150: $f(x,y)=\log_y x$

سوال 13.151: تمام t کے لئے g استمراری ہے $f(x,y)=\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$

سوال 13.152: $f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n \quad (\lvert xy\rvert<1)$

سوال 13.153 تا سوال 13.164 میں f_x ، f_y اور f_z تلاش کریں۔

سوال 13.153: $f(x,y,z)=1+xy^2-2z^2$

سوال 13.154: $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

سوال 13.155: $f(x,y,z)=x-\sqrt{y^2+z^2}$

سوال 13.156: $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال 13.157: $f(x,y,z)=\sin^{-1}(xyz)$

سوال 13.158: $f(x,y,z)=\sec^{-1}(x+yz)$

سوال 13.159: $f(x,y,z)=\ln(x+2y+3z)$

سوال 13.160: $f(x,y,z)=yz\ln(xy)$

سوال 13.161: $f(x,y,z)=e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

سوال 13.162: $f(x,y,z)=e^{-xyz}$

سوال 13.163: $f(x,y,z)=\tanh(x+2y+3z)$

سوال 13.164: $f(x,y,z)=\sinh(xy-z^2)$

سوال 13.165 تا سوال 13.170 میں ہر متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا جزوی تفرق تلاش کریں۔

سوال 13.165: $f(t,\alpha)=\cos(2\pi t-\alpha)$

سوال 13.166: $g(u,v)=v^2e^{2u/v}$

سوال 13.167: $h(\rho,\theta,\phi)=\rho\sin\theta\cos\phi$

سوال 13.168: $g(r,\theta,z)=r(1-\cos\theta)-z$

سوال 13.169: قلب کا کام

$$W(P,H,\delta,v,g)=PH+\frac{H\delta v^2}{2g}$$

سوال 13.170: $A(c,h,k,m,q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$

دو رتبی جزوی تفرق کا حصول

سوال 13.171 تا سوال 13.176 میں تفاعل کے تمام دو رتبی جزوی تفرقات تلاش کریں۔

سوال 13.171: $f(x,y)=x+y+xy$

سوال 13.172: $f(x,y)=\sin xy$

سوال 13.173: $g(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

سوال 13.174: $h(x,y) = xe^y + y + 1$

سوال 13.175: $r(x,y) = \ln(x,y)$

سوال 13.176: $s(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

مدغم جزوی تفرقات

سوال 13.177 تا سوال 13.180 میں $w_{xy} = w_{yx}$ کی تصدیق کریں۔

سوال 13.177: $w = \ln(2x+3y)$

سوال 13.178: $w = e^x + x\ln y + y\ln x$

سوال 13.179: $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

سوال 13.180: $w = x\sin y + y\sin x + xy$

سوال 13.181: بغیر قلم اٹھائے بتائیں کہ درج ذیل میں x کے لحاظ سے پہلے اور y کے لحاظ سے بعد میں یا اس کے الٹ حل کرتے ہوئے f_{xy} زیادہ جلدی حاصل ہو گا۔

ا. $f(x,y) = x\sin y + e^y$

ب. $f(x,y) = \frac{1}{x}$

ج. $f(x,y) = y + \frac{x}{y}$

د. $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$

ھ. $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

و. $f(x,y) = x\ln xy$

سوال 13.182: درج ذیل میں تمام کا پانچ رتبی جزوی تفرق $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ صفر کے برابر ہے۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر آپ کس متغیر کے لحاظ سے پہلے جزوی تفرق لیں گے؟ بغیر کچھ لکھے جواب دینے کی کوشش کریں۔

ا. $f(x,y)=y^2x^4e^x+2$

ب. $f(x,y)=y^2+y(\sin x-x^4)$

ج. $f(x,y)=x^2+5xy+\sin x+7e^x$

د. $f(x,y)=xe^{y^2/2}$

جزوی تفرق کی تعریف کا استعمال

سوال 13.183 اور سوال 13.184 میں جزوی تفرق کی تعریف بذریعہ حد استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ پر تفاعل کا جزوی تفرق حاصل کریں۔

سوال 13.183: $f(x,y)=1-x+y-3x^2y,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\quad (1,2)$

سوال 13.184: $f(x,y)=4+2x-3y-xy^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\quad (-2,1)$

سوال 13.185: فرض کریں $w=f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(1,2,3)$ پر $f(x,y,z)=x^2yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

سوال 13.186: فرض کریں $w=f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(-1,0,3)$ پر $f(x,y,z)=-2xy^2+yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

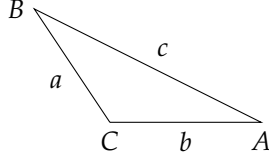
خفی جزوی تفرقات

سوال 13.187: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1,1,1)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xy+z^3x-2yz=0$$

سوال 13.188: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1,-1,-3)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xz+y\ln x-x^2+4=0$$

سوال 13.189 اور سوال 13.189 درج ذیل مثلث کے بارے میں ہے۔

سوال 13.189: A کو خفی طور پر a ، b اور c کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial A}{\partial a}$ اور $\frac{\partial A}{\partial b}$ تلاش کریں۔

سوال 13.190: a کو خفی طور پر A ، b اور B کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial a}{\partial A}$ اور $\frac{\partial a}{\partial B}$ تلاش کریں۔

سوال 13.191: غیر تابع متغیرات x اور y کی صورت میں تفاعل u اور v مساوات $x = v \ln u$ اور $y = u \ln v$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق v_x ، جو موجود ہے، کو u اور v کی صورت میں لکھیں۔ (اشارہ: دونوں مساوات کا تفرق x کے لحاظ سے لے کر v_x کے لئے حل کریں۔)

سوال 13.192: غیر تابع متغیرات u اور v کی صورت میں تفاعل x اور y مساوات $u = x^2 - y^2$ اور $v = x^2 - y$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق $\frac{\partial x}{\partial u}$ اور $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، جو موجود ہیں تلاش کریں۔ (اشارہ: سوال 13.191 میں دیا گیا اشارہ دیکھیں۔) اب $s = x^2 + y$ لیتے ہوئے $\frac{\partial s}{\partial u}$ حاصل کریں۔

مساوات لاپلاس

تین بعدی مساوات لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{13.10}$$

کو فضا میں برقرار حال حراری تقسیم $T = f(x, y, z)$ ، تجاذبی مخفی قوہ اور برقی ساکن مخفی قوہ مطمئن کرتے ہیں۔ مساوات 13.10 سے جزو $\frac{\partial f}{\partial z}$ نکالنے سے دو بعدی مساوات لاپلاس

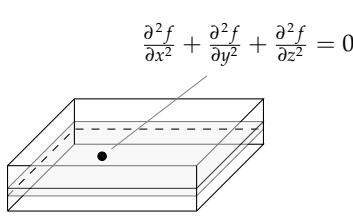
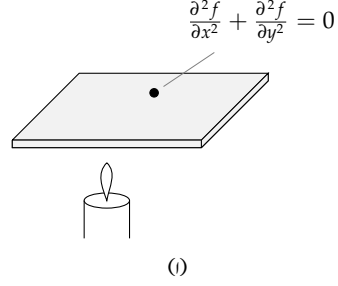
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{13.11}$$

حاصل ہوتی ہے جو مستوی میں خفی قوہ اور برقرار حال حراری تقسیم بیان کرتی ہے (شکل 13.28)۔

دکھائیں کہ سوال 13.193 تا سوال 13.198 میں دیا ہر ایک تفاعل مساوات لاپلاس میں سے کسی ایک کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال 13.193: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

سوال 13.194: $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

سوال 13.195: $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

شکل 13.28: مستوی اور ٹھوس اجسام میں برقرار حال حرارت، مساوات لاپلاس کو مطمئن کرتی ہے۔

سوال 13.196: $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال 13.197: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال 13.198: $f(x,y,z) = e^{2x+4y}\cos 5z$

مساوات موج

سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر سمندری امواج کی لی گئی تصویر میں نشیب و فراز کا ایک منظم نقش نظر آتا ہے۔ہمیں فضا میں فاصلہ کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت نظر آتی ہے۔ پانی میں کھڑے ہو کر ہم گزرتی امواج کی بنا پانی کا اتار چڑھاو محسوس کرتے ہیں۔ ہم وقت کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت دیکھتے ہیں۔طبیعیات میں اس خوبصورت تشاکلی کو یک بعدی مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{13.12}$$

بیان کرتی ہے جہاں قد موج w ، فاصلاتی متغیر x ، لمحاتی متغیر t اور موج کی رفتار c ہے۔

سمندری سطح پر فاصلہ x ہو گا لیکن دیگر عملی استعمال میں x ارتعاش پذیر تار کے ساتھ ساتھ فاصلہ، ہوا میں فاصلہ (صوتی امواج)، یا فضا میں فاصلہ (امواج نور) ہو سکتا ہے۔ عدد c کی قیمت موج کی قسم اور ذریعہ پر منحصر ہو گا۔

دکھائیں کہ سوال 13.199 تا سوال 13.205 میں تمام تفاعل مساوات موج کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال 13.199: $w = \sin(x+ct)$

سوال 13.200: $w = \cos(2x+2ct)$

سوال 13.201: $w = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$

سوال 13.202: $w = \ln(2x+2ct)$

سوال 13.203: $w = \tan(2x-2ct)$

سوال 13.204: $w = 5\cos(3x+3ct) + e^{x+ct}$

سوال 13.205: $w = f(u)$ ؛ جہاں f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل، $u = a(x+ct)$ اور a مستقل ہیں۔

13.4 تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات

اس حصہ میں ہم تفرق پذیری کی تعریف کے بعد خط بندی اور تفریقیں پیش کرتے ہیں۔ اس حصہ کے ریاضی نتائج مسئلہ بڑھوتری کی بنا ہیں۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، کثیر المتغیر تفاعل کے زنجیری قاعدہ کی بنیاد بھی یہی مسئلہ ہے۔

تفرق پذیری

نقطہ بڑھوتری کا تصور، تفرق پذیری کی ابتدا ہے۔ آپ کو یاد ہو گا کہ اگر $x = x_0$ پر ایک متغیر کا تفاعل $y = f(x)$ قابل تفرق ہو تب x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \Delta x$ کرنے سے f کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x \tag{13.13}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\Delta x \to 0$ اور $\epsilon \to 0$ ہیں۔ دو متغیرات کے تفاعل کے لئے یہی خاصیت تفرق پذیری کی تعریف بنتی ہے۔ اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بڑھوتری ہمیں یقین دلاتا ہے کہ یہ خاصیت کار آمد رہے گی:

مسئلہ 13.3: **دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بڑھوتری**
فرض کریں پورا کھلا خطہ R میں، جس میں نقطہ (x_0, y_0) پایا جاتا ہو، $f(x,y)$ کے جزوی اول تفرقات معین ہیں اور (x_0, y_0) پر f_x اور f_y استمراری ہیں۔ تب نقطہ (x_0, y_0) کو R میں دوسری جگہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ منتقل کرنے سے f میں رونما ہونے والی تبدیلی

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرے گی جہاں $\Delta x,\ \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{13.14}$$

آپ ضمیمہ ط میں اس کا ثبوت دیکھ کر جان سکیں گے کہ ϵ_1 ، ϵ_2 کہاں سے آتے ہیں۔ آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ اسی طرح کے نتائج دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کے تفاعل کے لئے کار آمد ہوں گے۔

تعریف: اگر $f_x(x_0,y_0)$ اور $f_y(x_0,y_0)$ موجود ہوں اور (x_0,y_0) پر f مساوات 13.14 کو مطمئن کرتا ہو تب (x_0,y_0) پر $f(x,y)$ **قابل تفرق** ہو گا۔ اگر f اپنے دائرہ کار کے اندر ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب f **قابل تفرق**[34] ہو گا۔

□

اس تعریف کی روشنی میں ہمیں مسئلہ 13.3 کا ضمنی نتیجہ ملتا ہے جس کے تحت جس تفاعل کے جزوی اول تفرقات استمراری ہوں وہ تفاعل قابل تفرق ہو گا۔

ضمنی نتیجہ 13.1: **برائے مسئلہ 13-3** اگر پورے کھلا وقفہ R میں تفاعل $f(x,y)$ کے جزوی تفرقات f_x اور f_x استمراری ہوں تب R کے ہر نقطہ پر f تفرق پذیر ہو گا۔

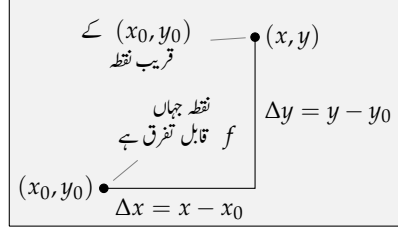
ہم مساوات 13.14 میں z کی جگہ $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ پر کر کے اس کو

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\epsilon_1\Delta x+\epsilon_2\Delta y \tag{13.15}$$

لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ اگر Δx اور Δy صفر کے قریب پہنچنے کی کوشش کرے تب نئی مساوات کا دایاں ہاتھ $f(x_0,y_0)$ کے قریب پہنچتا ہے۔اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل $f(x,y)$ ان تمام نقطوں پر استمراری ہو ہو گا جہاں یہ تفرق پذیر ہو۔

مسئلہ 13.4: اگر نقطہ (x_0,y_0) پر تفاعل $f(x,y)$ تفرق پذیر ہو تب (x_0,y_0) پر f استمراری ہو گا۔

ہم مسئلہ 13.3 اور مسئلہ 13.4 سے دیکھتے ہیں کہ اگر اس پورے خطہ میں، جس میں نقطہ (x_0,y_0) پایا جاتا ہو، f_x اور f_y استمراری ہوں تب (x_0,y_0) پر $f(x,y)$ لازماً استمراری ہو گا۔ یاد رہے کہ دو متغیرات کا تفاعل اس نقطہ پر غیر استمراری ہو سکتا ہے جہاں اس کا جزوی اول تفرق موجود ہو (مثال 13.21)۔ صرف موجودگی کافی نہیں ہے۔

[34] differentiable

شکل 13.29: اگر (x_0, y_0) پر f قابل تفرق ہو تب قریبی نقطہ (x, y) پر f کی قیمت تقریباً $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ ہو گی۔

دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی

دو متغیرات کے تفاعل پیچیدہ ہو سکتے ہیں اور بعض اوقات ہم چاہیں گے کہ ان کی جگہ ایسے نسبتاً سادہ تفاعل استعمال کریں جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو اور جو مخصوص عملی استعمال میں درکار درستگی دیتے ہوں۔ ہم واحد متغیر کے تفاعل کی خط بندی کی طرز پر ایسا کرتے ہیں (حصہ 4.7)۔

فرض کریں تفاعل $z = f(x, y)$ نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق ہے اور ہم اس نقطہ پر f ، f_x اور f_y کی قیمتیں جانتے ہیں۔ ہم اس تفاعل کا ایسا متبادل چاہتے ہیں جو (x_0, y_0) کے قریب موثر ہو۔ چونکہ f قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ (x_0, y_0) پر مساوات 13.15 تفاعل f کے لئے کار آمد ہو گا۔ یوں $\Delta x = x - x_0$ اور $\Delta y = y - y_0$ کی بڑھوتری سے (x_0, y_0) سے نقطہ (x, y) منتقل (شکل 13.29) ہونے سے f کی نئی قیمت

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

ملتی ہے جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب $\epsilon_1 \Delta x$ اور $\epsilon_2 \Delta y$ آخر کار مزید چھوٹے ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x,y)}$$

دوسرے لفظوں میں، جب تک Δx اور Δy چھوٹے ہوں، f کی قیمت تقریباً وہی ہو گی جو خطی تفاعل L کی ہو گی۔ اگر f کے ساتھ کام کرنا دشوار ہو اور L ہمیں درکار درستگی دیتا ہو تب ہم f کی جگہ L استعمال کر سکتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر، جہاں تفاعل $f(x, y)$ قابل تفرق ہو، f کا **خط بند**[35] تفاعل درج ذیل ہو گا۔

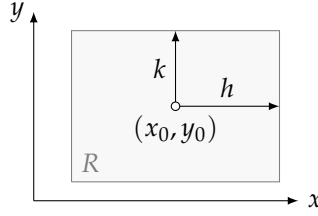
$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{13.16}$$

درج ذیل تخمین

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[36] ہے۔

---

[35] linearization
[36] standard linear approximation

شکل 13.30: مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k$ جہاں میں ہم اپنی تخمین کے خلل کی کارآمد حد بندی تلاش کر سکتے ہیں

□

ہم حصہ 13.8 میں دیکھیں گے کہ مستوی $z = L(x, y)$ سطح $z = f(x, y)$ کو نقطہ (x_0, y_0) پر مماسی ہے۔یوں جیسا واحد متغیر کی خط بندی مماسی خط تخمین دیتی ہے، اسی طرح دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی ہمیں مماسی مستوی تخمین دیتی ہے۔

مثال 13.24: نقطہ $(3, 2)$ پر درج ذیل کی خط بند تخمین تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

حل: ہم مساوات 13.16 میں درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(x_0, y_0) &= \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8 \\
f_x(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4 \\
f_y(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad \text{13.16 مساوات} \\
&= 8 + (4)(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2
\end{aligned}$$

نقطہ $(3, 2)$ پر f کی خط بندی $L(x, y) = 4x - y - 2$ ہے۔ □

معیاری خطی تخمین کی درستگی

تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ میں خلل کی تلاش میں ہم f کے دو رتبی جزوی تفرقات استعمال کرتے ہیں۔ فرض کریں ایک کھلا سلسلہ میں f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو پایا جاتا ہو۔ اس مستطیل خطہ کو درج ذیل عدم مساوات ظاہر کرتے ہیں (شکل 13.30)۔

$$|x - x_0| \le h, \quad |y - y_0| \le k$$

چونکہ R بند اور محدود ہے لہٰذا R میں تمام دو رتبی جزوی تفرقات کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمتیں ہوں گی۔ اگر ان میں B سب سے بڑی قیمت ہو تب، جیسا آگے حصہ 13.10 میں سمجھایا گیا ہے، پورے R میں معیاری خطی تخمین میں خلل $E(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$ درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \le \frac{1}{2}B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

جب ہم اس عدم مساوات کو E کی اندازاً قیمت حاصل کرنے کے لئے استعمال کریں تب ہم f_{xx} ، f_{yy} اور f_{xy} ، جو B تعین کرتے ہیں، حاصل کرنے سے قاصر ہوں گے لہٰذا ہمیں بالائی حد بندی یعنی بد ترین قیمت پر گزارہ کرنا ہو گا۔ اگر R میں $\left|f_{xx}\right|$ ، $\left|f_{yy}\right|$ اور $\left|f_{xy}\right|$ کی مشترک بالائی حد بندی M ہو، تب B کی قیمت M کے برابر یا اس سے کم ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \le \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

اس عدم مساوات سے عموماً E کی تخمینی قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ کسی M کے لئے $\left|E(x,y)\right|$ کی قیمت کم کرنے کے لئے ہم $|x - x_0|$ اور $|y - y_0|$ کو چھوٹا بناتے ہیں۔

معیاری خطی تخمین میں خلل

اگر ایک کھلا سلسلہ میں f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو پایا جاتا ہو اور R پر $\left|f_{xx}\right|$ ، $\left|f_{yy}\right|$ اور $\left|f_{xy}\right|$ کی بالائی حد بندی M ہو تب R پر $f(x,y)$ کا متبادل

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

استعمال کرنے سے پیدا خلل $E(x,y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \le \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \tag{13.17}$$

مثال 13.25: ہم نے مثال 13.24 میں $(3,2)$ پر درج ذیل کی خط بندی کی۔

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

مستطیل

$$R: \quad |x-3| \leq 0.1, \quad |y-2| \leq 0.1$$

پر تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ کے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ اس حد بندی کو مستطیل کے مرکز پر f کی قیمت $f(3,2)$ کا فی صد لکھیں۔

حل: ہم درج ذیل عدم مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0|)^2 \qquad \text{مساوات } 13.17$$

ہم معمول کے تفرق سے دیکھتے ہیں کہ f_{xx} ، f_{yy} اور f_{xy} تینوں مستقل ہیں:

$$|f_{xx}| = |2| = 2, \quad |f_{xy}| = |-1| = 1, \quad |f_{yy}| = |1| = 1$$

ان تمام میں سب سے بڑی قیمت 2 ہے لہٰذا ہم M کو 2 کے برابر رکھ سکتے ہیں۔ اب $(x_0, y_0) = (3,2)$ کے لئے R میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}(2)(|x-3| + |y-2|)^2$$

آخر میں چونکہ $|x-3| \leq 0.1$ اور $|y-2| \leq 0.1$ ہیں لہٰذا R پر

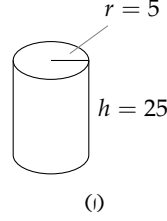
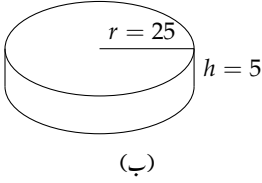
$$\left|E(x,y)\right| \leq (0.1+0.1)^2 = 0.04$$

ہو گا۔ جب تب (x,y) مستطیل R میں رہے تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ میں خلل 0.04 سے زیادہ نہیں ہو گی جو R کے مرکز پر f کی قیمت کا $0.5\,\%$ ہے۔ □

تفریق سے تبدیلی کی پیش گوئی

فرض کریں ہم نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ اور اس کے یک رتبی تفرقات کی قیمتیں جانتے ہیں اور ہم قریبی نقطہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ پر منتقل ہونے سے f کی قیمت میں تبدیلی جاننا چاہتے ہیں۔ اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب (x_0, y_0) پر f اور اس کی خط بندی کی قیمت میں تبدیلی تقریباً ایک دوسرے جیسی ہو گی لہٰذا L کی تبدیلی سے ہمیں عملاً f کی تبدیلی حاصل ہو گی۔

تفاعل f میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

شکل 13.31: بیلن-ا کا حجم r میں چھوٹی تبدیلی کو زیادہ حساس ہے جبکہ بیلن-ب کا حجم h میں چھوٹی تبدیلی کو زیادہ حساس ہے۔

ہم مساوات 13.16 میں $x - x_0 = \Delta x$ اور $y - y_0 = \Delta y$ لیتے ہوئے L میں تبدیلی

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ عموماً ΔL کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا اتنا ہی مشکل ہو گا جتنا Δf کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا مشکل ہو گا۔ البتہ L میں تبدیلی f کے کلیہ سے حاصل کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ خطی تخمین L میں تبدیلی، ایک معلوم مستقل ضرب Δx جمع دوسرا معلوم مستقل ضرب Δy ہوتا ہے۔

ہم تبدیلی ΔL کو عموماً درج ذیل خیال آفریں علامتی روپ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x اور y میں تبدیلی Δx اور Δy کی بنا خط بندی میں تبدیلی کو $\mathrm{d}f$ ظاہر کرتی ہے۔

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

حسب معمول ہم $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو x اور y کی تفریق کہتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کی مطابقتی تفریق کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ منتقلی کی بنا f کی **تفریق**[37] درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y \tag{13.18}$$

تفاعل f کی خط بندی میں اس تبدیلی کو f **کی کل تفریق**[38] کہتے ہیں۔

□

مثال 13.26: تبدیلی کے لئے حساسیت
آپ کا ادارہ دائری نلکی حوض بناتا ہے جس کا قد $25\,\mathrm{m}$ اور رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے۔ قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلی کو حوض کے حجم کی حساسیت تلاش کریں۔

---

[37] differential
[38] total differential

حل: حوض کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H(r,h) = \pi r^2 h$$

قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}h$ اور $\mathrm{d}r$ کی بنا حوض کے حجم میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= H_r(5,25)\,\mathrm{d}r + H_h(5,25)\,\mathrm{d}h && \text{مساوات } 13.18 \\ &= (2\pi rh)_{(5,25)}\,\mathrm{d}r + (\pi r^2)_{(5,25)}\,\mathrm{d}h \\ &= 250\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}h \end{aligned}$$

یوں r میں 1 اکائی تبدیلی H میں 250π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے جبکہ h میں 1 اکائی تبدیلی H میں 25π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے۔ حوض کا حجم r میں چھوٹی تبدیلی کو، h میں چھوٹی تبدیلی کے لحاظ سے 10 گنا زیادہ حساس ہے۔ یوں آپ کو رداس پر کھڑی نظر رکھنی ہو گی۔

اس کے برعکس اگر r اور h کی قیمتیں آپس میں بدل دی جائیں تا کہ $r = 25\,\mathrm{m}$ اور $h = 5\,\mathrm{m}$ ہوں تب کل تفریقی حجم

$$\mathrm{d}H = (2\pi rh)_{(25,5)}\,\mathrm{d}h + (\pi r^2)_{(25,5)}\,\mathrm{d}r = 250\pi\,\mathrm{d}r + 625\pi\,\mathrm{d}h$$

ہو گا۔اب حوض کا حجم قد میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے (شکل 13.31)۔

اس مثال سے ہم یہ قاعدہ سیکھتے ہیں کہ تفاعل ان متغیرات کو زیادہ حساس ہوتے ہیں جو سب سے بڑا جزوی تفرق دیتا ہو۔ □

مطلق، نسبتی اور فی صف تبدیلی

ایک نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ منتقلی کی بنا تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت میں تبدیلی کو تین مختلف طریقوں سے بیان کیا جا سکتا ہے:

	درست	اندازاً
مطلق تبدیلی	Δf	$\mathrm{d}f$
نسبتی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)} \times 100$

مثال 13.27: فرض کریں متغیرات r اور h کی قیمتوں $(r_0, h_0) = (1, 5)$ میں تبدیلی $\mathrm{d}r = 0.03$ اور $\mathrm{d}h = -0.1$ ہو۔ تفاعل $H = \pi r^2 h$ کی قیمت میں مطلق، نسبتی اور فی صد تبدیلی کتنی ہو گی؟

حل: تفاعل H میں تبدیلی جاننے کے لئے ہم

$$\mathrm{d}H = H_r(r_0, h_0)\,\mathrm{d}r + H_h(r_0, h_0)\,\mathrm{d}h$$

کی قیمت تلاش کر کے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= 2\pi r_0 h_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2 h\,\mathrm{d}h \\ &= 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) = 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں جبکہ $H(1,5) = \pi(1)^2(5) = 5\pi$ ہے۔ یوں مطلق تبدیلی 0.2π، نسبتی تبدیلی $\frac{0.2\pi}{5\pi} = 0.04$ اور فی صد تبدیلی $4\,\%$ ہو گی۔ □

مثال 13.28: ایک دائری بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ اس کا رداس اور قد ناپ کر حاصل کیا جاتا ہے۔ فرض کریں رداس اور قد کی ناپ میں خلل بالترتیب $2\,\%$ اور $0.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے۔ حجم کی قیمت حاصل کرنے میں خلل کتنا ہو سکتا ہے؟

حل: ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہیں۔

$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{r}\times 100\right| \le 2, \quad \left|\frac{\mathrm{d}h}{h}\times 100\right| \le 0.5$$

چونکہ

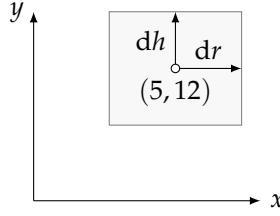
$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{2\pi rh\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h}{\pi r^2 h} = \frac{2\,\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}H}{H}\times 100\right| &= \left|2\frac{\mathrm{d}r}{r}\times 100 + \frac{\mathrm{d}h}{h}\times 100\right| \\ &\le 2\left|\frac{\mathrm{d}r}{r}\times 100\right| + \left|\frac{\mathrm{d}h}{h}\times 100\right| \le 2(2) + 0.5 = 4.5\end{aligned}$$

ہو گا۔ ہمارا اندازہ ہے کہ حجم کے حساب میں خلل $4.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

ہمیں r اور h کتنی درستگی سے ناپنا ہو گا تا کہ حجم کے حساب میں خلل مثلاً $2\,\%$ سے زیادہ نہ ہو؟ اس طرح کے سوالات کا جواب دینا مشکل ہے چونکہ اس کا کوئی ایک صحیح جواب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = 2\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

شکل 13.32: نقطہ $(5,12)$ کے گرد چھوٹا مربع (مثال 13.29)

ہے لہٰذا $\frac{dH}{H}$ کو $\frac{dr}{r}$ اور $\frac{dh}{h}$ مل کر قابو کرتے ہیں۔اگر ہم h درست ناپ سکیں تب عین ممکن ہے کہ r کی ناپ زیادہ درست نہ ہونے کی صورت میں بھی ہمیں درکار نتائج ملیں۔ اس کے برعکس h کی ناپ اتنی ناقص ہو سکتی ہے کہ ہم جتنا چاہیں r کی ناپ درست رکھیں، نتائج قابل قبول نہ ہوں۔

ایسی صورت میں ہم ناپی گئی قیمتوں (r_0, h_0) کو مرکز رکھتے ہوئے ایک مربع منتخب کرتے ہیں جس میں H کی قیمت $\pi r_0^2 h_0$ سے قابل قبول حد سے زیادہ تجاوز نہ کرتا ہو۔

مثال 13.29: نقطہ $(r_0, h_0) = (5,12)$ کو مرکز رکھتے ہوئے ایسا مربع تلاش کریں جس میں حجم $H = \pi r^2 h$ کی قیمت ± 0.1 سے زیادہ تجاوز نہ کرے (شکل 13.32)۔

حل: ہم dH کی درج ذیل تخمین لیتے ہیں۔

$$dH = 2\pi r_0 h_0 \, dr + \pi r_0^2 \, dh = 2\pi(5)(12) \, dr + \pi(5)^2 \, dh = 120\pi \, dr + 25\pi \, dh$$

چونکہ ہم جس خطہ کے اندر رہنا چاہتے ہیں وہ خطہ ایک مربع ہے لہٰذا ہم $dh = dr$ لے کر

$$dH = 120\pi \, dr + 25\pi \, dr = 145\pi \, dr$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم اب پوچھتے ہیں، dr کتنا چھوٹا ہونا چاہیے تا کہ $|dH|$ ی قیمت 0.1 سے کسی صورت زیادہ نہ ہو؟ ہم عدم مساوات

$$|dH| \le 0.1$$

سے شروع کر کے dH کو dr کی صورت

$$|145\pi \, dr| \le 0.1$$

میں لکھ کر dr کی بالائی حد بندی تلاش کرتے ہیں:

$$|dr| \le \frac{0.1}{145\pi} \approx 2.1 \times 10^{-4} \qquad \text{نیچے پورا کرتے ہیں تا کہ غلطی سے } dr \text{ بڑا نہ ہو جائے}$$

اب $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$ کی بنا ہمارا مربع درج ذیل مساوات دیں گے۔

$$|r-5| \le 2.1\times 10^{-4}, \quad |h-12| \le 2.1\times 10^{-4}$$

جب تک (r,h) اس مربع میں رہیں، ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\mathrm{d}H|$ کی قیمت 0.1 کے برابر یا اس سے کم ہو گی اور ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\Delta H|$ بھی تقریباً اتنا ہو گا۔ □

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی ایسا ہو گا۔

1. نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی خط بندی درج ذیل ہو گی۔

$$L(x,y,z) = f(N_0) + f_x(N_0)(x-x_0) + f_y(N_0)(y-y_0) + f_z(N_0)(z-z_0) \tag{13.19}$$

2. فرض کریں بند ٹھوس مستطیل R کا مرکز N_0 ہے۔ یہ مستطیل ایسے خطہ میں پایا جاتا ہے جہاں f کے دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ پورے R پر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$، $|f_{zz}|$، $|f_{xy}|$، $|f_{xz}|$ اور $|f_{yz}|$ کی قیمتیں M کے برابر یا اس سے کم ہیں۔ تب پورے R میں f کی تخمین L میں **خلل**[39] $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ کی بالائی حد بندی درج ذیل عدم مساوات دے گی۔

$$|E| \le \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|)^2 \tag{13.20}$$

3. اگر f کے دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور x، y، z کی قیمتیں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$، $\mathrm{d}z$ کی بنا x_0، y_0، z_0 سے تبدیل ہو جائیں، تب کل تفریق

$$\mathrm{d} = f_x(N_0)\,\mathrm{d}x + f_y(N_0)\,\mathrm{d}y + f_z(N_0)\,\mathrm{d}z$$

تفاعل f میں نتیجتاً تبدیلی کی اچھی تخمین ہو گی۔

مثال 13.30: نقطہ $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,0)$ پر درج ذیل تفاعل کی خط بندی $L(x,y,z)$ تلاش کریں۔

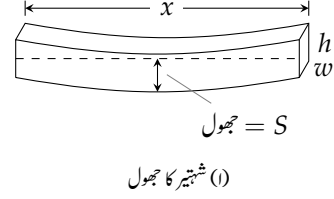
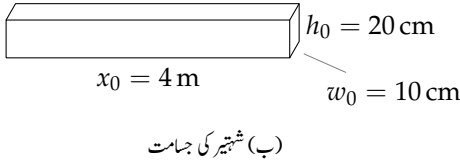
$$f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

تفاعل f کی جگہ تخمین L استعمال کرنے سے درج ذیل مستطیل میں پیدا خلل کی بالائی حد بندی دریافت کریں۔

$$R: \quad |x-2| \le 0.01, \quad |y-1| \le 0.02, \quad |z| \le 0.01$$

[39] error

(ا) شہتیر کا جھول

(ب) شہتیر کی جسامت

شکل 13.33

حل: ہم پہلے درج ذیل معلوم کرتے ہیں۔

$$f(2,1,0) = 2, f_x(2,1,0) = 3, f_y(2,1,0) = -2, f_z(2,1,0) = 3$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.19 درج ذیل دیتی ہے۔

$$L(x,y,z) = 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0) = 3x - 2y + 3z - 2$$

اسی طرح پہلے دو رتبی جزوی تفرقات حاصل کرتے ہیں۔

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{zz} = -3\sin z, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yz} = 0$$

مساوات 13.20 میں M کو $|-3\sin z|$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت یعنی 3 لے سکتے ہیں۔یوں

$$|E| \le \frac{1}{2}(3)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0024$$

ہو گا لہٰذا خلل 0.0024 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

مثال 13.31: یکساں بار بردار شہتیر کی جھول
ایک افقی مستطیل شہتیر جس کے دونوں سروں کو سہارا دیا گیا اور جس پر یکساں بوجھ (یکساں وزن فی میٹر لمبائی) ڈالا گیا ہو اس بوجھ کے نیچے جھک جائے گا (شکل 13.33-ا)۔ جھکاو S کو درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$S = C\frac{px^4}{wh}$$

اس مساوات میں متغیرات کی تفصیل درج ذیل ہے۔

p بوجھ (شہتیر کے ایک میٹر پر وزن۔وزن کی اکائی نیوٹن ہے۔)

x دونوں سروں پر سہارا کے بیچ فاصلہ (میٹر)

w شہتیر کی چوڑائی (میٹر)

h شہتیر کا قد (میٹر)

C ایک مستقل جو اس مادہ پر منحصر ہو گا جس سے شہتیر بنایا گیا ہو۔

ایک شہتیر کی لمبائی $4\,\mathrm{m}$، چوڑائی $10\,\mathrm{cm}$ اور قد $20\,\mathrm{cm}$ ہیں۔اس پر $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ بوجھ ڈالا گیا ہے (شکل 13.33-ب)۔ جھول میں تبدیلی $\mathrm{d}S$ سے شہتیر کے بارے میں کیا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

حل: چونکہ S چار متغیرات p، x، w، h کا تفاعل ہے لہٰذا اس کی کل تفریق $\mathrm{d}S$ درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}S = S_p\,\mathrm{d}p + S_x\,\mathrm{d}x + S_w\,\mathrm{d}w + S_h\,\mathrm{d}h$$

کسی مخصوص p_0، x_0، w_0، h_0 کے لئے اس کو حل کرتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے سے

$$\mathrm{d}S = S_0\Big(\frac{\mathrm{d}p}{p_0} + \frac{4\,\mathrm{d}x}{x_0} - \frac{\mathrm{d}w}{w_0} - \frac{3\,\mathrm{d}h}{h_0}\Big)$$

ملتا ہے جہاں $S_0 = S(p_0, x_0, w_0, h_0) = Cp_0x_0^4/(w_0h_0^3)$ ہے۔

اگر $p_0 = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$، $x_0 = 4\,\mathrm{m}$، $w_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ اور $h_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ ہوں تب

$$\mathrm{d}S = S_0\Big(\frac{\mathrm{d}p}{100} + \mathrm{d}x - 10\,\mathrm{d}w - 15\,\mathrm{d}h\Big) \tag{13.21}$$

اس مساوات میں چونکہ $\mathrm{d}p$ اور $\mathrm{d}x$ کے عددی سر مثبت ہیں لہٰذا p اور x جھول بڑھاتے ہیں۔اس کے برعکس $\mathrm{d}w$ اور $\mathrm{d}h$ کے عددی سر منفی ہیں لہٰذا w اور h جھول کم کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathrm{d}p$ کا عددی سر $\frac{1}{100}$ ہے لہٰذا بوجھ کا جھول پر زیادہ اثر نہیں ہو گا۔ چونکہ $\mathrm{d}h$ کا عددی سر $\mathrm{d}w$ کے عدی سر سے بڑا ہے لہٰذا شہتیر کا قد $1\,\mathrm{cm}$ بڑھانے سے جھول زیادہ کم ہو گا۔ □

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال 13.206 تا سوال 13.211 میں ایک ایک نقطہ پر خط بندی $L(x, y)$ تلاش کریں۔

سوال 13.206: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (ا) $(0, 0)$، (ب) $(1, 1)$

سوال 13.207: $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ (ا) $(0, 0)$، (ب) $(1, 2)$

سوال 13.208: $f(x, y) = 3x - 4y + 5$ (ا) $(0, 0)$، (ب) $(1, 1)$

سوال 13.209: $f(x,y)=x^3y^4$ (ا) $(1,1)$، (ب) $(0,0)$

سوال 13.210: $f(x,y)=e^x\cos y$ (ا) $(0,0)$، (ب) $(0,\pi/2)$

سوال 13.211: $f(x,y)=e^{2y-x}$ (ا) $(0,0)$، (ب) $(1,2)$

خطی تخمین کی بالائی حد بندی

سوال 13.212 تا سوال 13.217 میں N_0 پر تفاعل $f(x,y)$ کی خط بندی $L(x,y)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد مربع R میں تخمین $f(x,y)\approx L(x,y)$ کی بنا خلل کی مقدار $|E|$ کی بالائی حد بندی عدم مساوات 13.17 سے دریافت کریں۔

سوال 13.212: $f(x,y)=x^2-3xy+5,\quad N_0(2,1),\ R:|x-2|\le 0.1,\left|y-1\right|\le 0.1$

سوال 13.213: $f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{4}+3x-3y+4,$
$N_0(2,2),R:|x-2|\le 0.1,\left|y-2\right|\le 0.1$

سوال 13.214: $f(x,y)=1+y+x\cos y,N_0(0,0),R:|x|\le 0.2,\left|y\right|\le 0.2$
(خلل E کے حصول میں $\left|\cos y\right|\le 1$ اور $\left|\sin y\right|\le 1$ استعمال کریں۔)

سوال 13.215: $f(x,y)=xy^2+y\cos(x-1),N_0(1,2),R:|x-1|\le 0.1,\left|y-2\right|\le 0.1$

سوال 13.216: $f(x,y)=e^x\cos y,N_0(0,0),R:|x|\le 0.1,\left|y\right|\le 0.1$
(خلل E کے حصول میں $e^x\le 1.11$ اور $\left|\cos y\right|\le 1$ استعمال کریں۔)

سوال 13.217: $f(x,y)=\ln x+\ln y,N_0(1,1),R:|x-1|\le 0.2,\left|y-1\right|\le 0.2$

تبدیلی کو حساسیت، اندازہ

سوال 13.218: آپ ایک لمبی اور پتلی مستطیل کا رقبہ ناپنا چاہتے ہیں۔ کس ضلع کی ناپ میں زیادہ احتیاط ضروری ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.219: (ا) نقطہ $(1,0)$ کے قریب تفاعل $f(x,y)=x^2(y+1)$ متغیر x یا y میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نقطہ $(1,0)$ پر $\mathrm{d}f$ کو صفر بنانے کے لئے $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ نسبت تلاش کریں۔

سوال 13.220: تفاعل $T=x(e^y+e^{-y})$ کی قیمت x اور y ناپ کر حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ناپ بالترتیب 2 اور $\ln 2$ ہیں جن میں زیادہ سے زیادہ خلل $|\mathrm{d}x|=0.1$ اور $\left|\mathrm{d}y\right|=0.02$ ممکن ہے۔ تفاعل کی قیمت میں زیادہ سے زیادہ خلل کتنا متوقع ہے؟

سوال 13.221: متغیرات r اور h کی ناپ میں $1\,\%$ خلل کی بنا $H = \pi r^2 h$ میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 13.222: رداس $r = 5\,\mathrm{cm}$ اور قد $h = 12\,\mathrm{cm}$ ایک ملی میٹر درستگی تک ناپے جاتے ہیں۔ حجم $H = \pi r^2 h$ میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال 13.223: ایک بیلن کا رداس تقریباً $r = 2\,\mathrm{m}$ اور قد تقریباً $h = 3\,\mathrm{m}$ ہے۔ رداس اور قد کی ناپ میں خلل کو یکساں تصور کریں۔ رداس اور قد کی ناپ میں زیادہ سے زیادہ کتنا خلل قابل برداشت ہو گا اگر یوں ناپی گئی حجم میں خلل $0.1\,\mathrm{m}^3$ سے کم رکھنا ہو۔

سوال 13.224: نقطہ $(1,1)$ کو مربع کا مرکز لیتے ہوئے ایسا مربع تلاش کریں جس میں $f(x,y) = x^3y^4$ کی قیمت میں ∓ 0.1 سے زیادہ تبدیل نہ ہو۔

سوال 13.225: دو برقی مزاحمت متوازی جوڑ کر ایک برقی دور حاصل کیا جاتا ہے۔ ان کی کل مزاحمت $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ہو گی۔
(ا) درج ذیل دکھائیں۔

$$\mathrm{d}R = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \mathrm{d}R_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 \mathrm{d}r_2$$

(ب) آپ $R_1 = 100\,\Omega$ اور $R_2 = 400\,\Omega$ رکھنا چاہتے ہیں لیکن دستیاب مزاحمت کبھی بھی سو فی صد درست نہیں ہوتے۔ کیا R کی قیمت R_1 کو یا R_2 کو زیادہ حساس ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

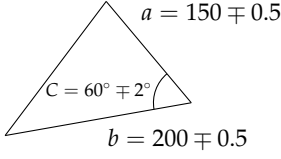
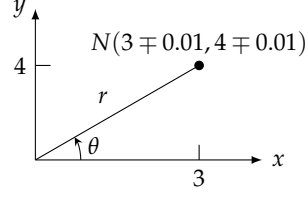
سوال 13.226: آپ سوال 13.225 کے برقی دور کی طرح دوسرے دور میں R_1 کی قیمت $20\,\Omega$ سے تبدیل کر کے $20.1\,\Omega$ کرتے ہیں جبکہ R_2 کی قیمت $25\,\Omega$ سے تبدیل کر کے $24.9\,\Omega$ کرتے ہیں۔ ان تبدیلیوں کی بنا کل مزاحمت R میں کتنے فی صد تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال 13.227: محدد کی تبدیلی میں خلل کی منتقل
(ا) اگر $x = 3 \mp 0.01$ اور $y = 4 \mp 0.01$ ہوں تب نقطہ $N(x,y)$ کے قطبی محدد r ، θ کتنی درستگی تک کلیات $r^2 = x^2 + y^2$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ سے حاصل ہوں گے؟ حاصل قطبی محدد میں تبدیلی کو نقطہ $(x_0, y_0) = (3,4)$ پر مطابقتی قیمتوں کا فی صد لکھیں۔ (ب) نقطہ $(x_0, y_0) = (3,4)$ پر r اور θ کی قیمتیں x یا y کو زیادہ حساس ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل 13.34)۔

تین متغیرات کے تفاعل

سوال 13.228 تا سوال 13.233 میں دیے نقاط پر تفاعل کی خط بندی $L(x,y)$ تلاش کریں۔

سوال 13.228: $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ (ا) $(1,1,1)$ ، (ب) $(1,0,0)$ ، (ج) $(0,0,0)$

سوال 13.229: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (ا) $(1,1,1)$ ، (ب) $(0,1,0)$ ، (ج) $(1,0,0)$

شکل 13.34

شکل 13.35

سوال 13.230: $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (ا) $(1,0,0)$، (ب) $(1,1,0)$، (ج) $(1,2,2)$

سوال 13.231: $\quad f(x,y,z) = \frac{\sin xy}{z}$ (ا) $(\frac{\pi}{2},1,1)$، (ب) $(2,0,1)$

سوال 13.232: $\quad f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$ (ا) $(0,0,0)$، (ب) $(0,\frac{\pi}{2},0)$، (ج) $(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

سوال 13.233: $\quad f(x,y,z) = \tan^{-1}(xyz)$ (ا) $(1,0,0)$، (ب) $(1,1,0)$، (ج) $(1,1,1)$

سوال 13.234 تا سوال 13.237 میں N_0 پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی خط بندی $L(x,y,z)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد خطہ R میں تخمین $f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$ سے پیدا خلل E کی مقدار کی بالائی حد بندی عدم مساوات 13.20 سے حاصل کریں۔

سوال 13.234:
$$f(x,y,z) = xz - 3yz + 2, \quad N_0(1,1,2), \qquad R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z-2| \le 0.02$$

سوال 13.235:
$$f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + \tfrac{1}{4}z^2, \quad N_0(1,1,2), \qquad R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z-2| \le 0.08$$

سوال 13.236:
$$f(x,y,z) = xy + 2yz - 3xz, \quad N_0(1,1,0) \qquad R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z| \le 0.01$$

سوال 13.237:
$$f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y+z), \quad N_0(0,0,\tfrac{\pi}{4}) \qquad R: \quad |x| \le 0.01, |y| \le 0.01, |z-\tfrac{\pi}{4}| \le 0.01$$

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.238: مثال 13.31 کی شہتیر کو پلٹا دیا جاتا ہے۔ یوں $h = 0.1\,\mathrm{m}$ اور $w = 0.2\,\mathrm{m}$ ہوں گے۔ (ا) اب $\mathrm{d}S$ کی کیا قیمت ہو گی؟ (ب) قد میں چھوٹی تبدیلی کی حساسیت اور چوڑائی میں تبدیلی کی حساسیت کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال 13.239: ایک نلکی ڈبے کا رداس $r = 2.54\,\mathrm{cm}$ اور قد $h = 12.7\,\mathrm{cm}$ ہے۔ (ا) اس کے حجم کی رداس میں تبدیلی کو حساسیت بالمقابل قد میں تبدیلی کو حساسیت کتنی ہے؟ (ب) کیا آپ ایسا نلکی ڈبہ تخلیق دے سکتے ہیں جس کا حجم ظاہری طور پر زیادہ لیکن حقیقت میں وہی ہو۔ (اس کے کئی جواب ممکن ہیں۔)

سوال 13.240: اگر $|a|$ کی قیمت $|b|$ ، $|c|$ ، $|d|$ سے بہت زیادہ ہو تب مقطع

$$f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

متغیرات a ، b ، c اور d میں کس متغیر کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.241: حاصل ضرب $p(a,b,c) = abc$ متغیرات a ، b اور c میں بیکوقت $2\,\%$ خلل کو کتنا حساس ہے؟

سوال 13.242: بغیر ڈھکن ایک خول $0.5\,\mathrm{cm}$ موٹی چادر سے بنایا جاتا ہے۔ اس خول کی اندرونی لمبائی $10\,\mathrm{cm}$ ، اندرونی چوڑائی $10\,\mathrm{cm}$ اور اندرونی گہرائی $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ اس خول میں کتنی چادر استعمال کی گئی؟

سوال 13.243: مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}ab\sin C$ کے برابر ہوتا ہے جہاں a اور b مستطیل کے دو اضلاع کی لمبائی جبکہ C ان اضلاع کے بیچ زاویہ ہے (شکل 13.35)۔ آپ $a = 150$ ، $b = 200$ اور $C = 60°$ ناپتے ہیں۔ اگر a اور b کی ناپ میں ∓ 0.5 اور C کی ناپ میں $\mp 2°$ خلل متوقع ہو تب رقبہ میں کتنا کلل ہو سکتا ہے؟ (یاد رہے کہ زاویہ ریڈیئن میں لینا ضروری ہے۔)

سوال 13.244: فرض کریں $u = xe^y + y\sin z$ ہے جہاں x ، y اور z کی ناپ میں بالترتیب زیادہ سے زیادہ ∓ 0.2 ، ∓ 0.6 اور $\mp \frac{\pi}{180}$ خلل ممکن ہے۔ آپ $x = 2$ ، $y = \ln 3$ اور $z = \frac{\pi}{2}$ ناپتے ہیں۔ بتائیں u میں زیادہ سے زیادہ کتنا خلل ممکن ہے؟

سوال 13.245: ولسن کا کلیہ برائے جسامت کھیپ
اقتصادیات کی میدان میں ولسن کا کلیہ برائے جسامت کھیپ کہتا ہے کہ مال (جوتے، برتن، وغیرہ) کی بہترین تعداد Q جو ایک دکان منگوا سکتا ہے $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ ہے جہاں مال منگواتے وقت ادائگی K ، ہفتہ وار فروخت کی تعداد M ، اور ایک رکن کو دکان میں رکھنے کا ہفتہ وار خرچ (دکان کا کرایا، دکان میں مزدوروں کی تنخواہ، وغیرہ) h ہو۔ نقطہ $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ کے قریب Q کس متغیر کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.246: کیا پورے کھلا خطہ R میں استمراری دو رتبی جزوی تفرقات والا تفاعل $f(x,y)$ خطہ R میں لازماً استمراری ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.247: کیا پورے کھلا خطہ R میں استمراری دو رتبی جزوی تفرقات والے اتفاعل $f(x,y)$ کے خطہ R میں لازماً استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جائیں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

13.5 زنجیری قاعدہ

جب ہم فضا میں کسی منحنی $x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t)$ کے مختلف نقطوں پر درجہ حرارت $w = f(x,y,z)$ جاننا چاہتے ہوں، یا کسی مائع یا گیس میں کسی راہ پر دباو میں دلچسپی رکھتے ہوں، ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں۔ یوں t کی ہر قیمت کے لئے نقطہ $(g(t),h(t),k(t))$ پر حرارت کی قیمت مرکب تفاعل $f(g(t),h(t),k(t))$ کی قیمت دے گی۔اس راہ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی ہمیں t کے لحاظ سے f کا تفرق دیگا، بشرطیکہ ایسا تفرق موجود ہو۔

بعض اوقات ہم g ، h اور k کے کلیات کو f کے کلیہ میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلا واسطہ تفرق لے سکتے ہیں۔لیکن زیادہ تر g ، h اور k کے کلیات اتنا پیچیدہ ہوتے ہیں یا ان کے کلیات با آسانی دستیاب نہیں ہوتے ہیں لہٰذا انہیں f میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلا واسطہ تفرق لینا ممکن نہیں ہو گا۔ ایسی صورتوں میں تفاعل کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم زنجیری قاعدہ کی مدد لیتے ہیں۔زنجیری قاعدہ کا روپ متغیرات کی تعداد پر منحصر ہو گا۔ ماسوائے اضافی متغیرات کے زنجیری قاعدہ عین حصہ 3.5 کے زنجیری قاعدہ کی طرح کام کرتا ہے۔

دو متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم نے حصہ 3.5 میں زنجیری قاعدہ استعمال کیا جہاں $w = f(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل تھا اور $x = g(t)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا۔ یوں w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا اور زنجیری قاعدہ کے تحت $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا تھا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

تفاعل $w = f(x,y)$ کے لئے ایسا کلیہ مسئلہ 13.5 پیش کرتا ہے۔

مسئلہ 13.5: **دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ**
اگر $w = f(x,y)$ قابل تفرق ہو اور x ، y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{13.22}$$

ثبوت: ہم نے اتنا دکھانا ہو گا کہ اگر x اور y نقطہ $t = t_0$ پر قابل تفرق ہوں تب w بھی t_0 پر قابل تفرق ہو گا اور $N_0 = (x(t_0, y(t_0))$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} \tag{13.23}$$

ہم t کو t_0 سے $t_0 + \Delta t$ منتقل کرنے سے پیدا بڑھوتری Δx ، Δy اور Δw لیتے ہیں۔ چونکہ f قابل تفرق ہے (حصہ 13.4 میں دی گئی تعریف ذہن میں رکھتے ہوئے)

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{13.24}$$

ہو گا، جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔ ہم مساوات 13.24 کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کر کے Δt کو صفر کے قریب پہنچا کر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔ تقسیم سے

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

حاصل ہو گا اور Δt کو صفر کے قریب پہنچانے سے درج ذیل ملے گا۔

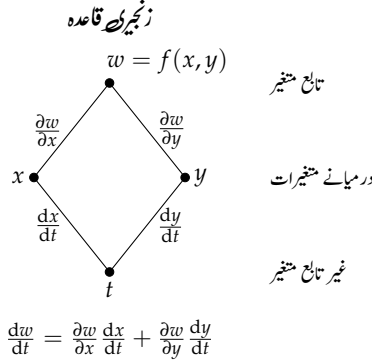
$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t}\\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\end{aligned}$$

یہ مساوات 13.23 کی تصدیق کرتی ہے لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ میں حقیقی غیر تابع متغیر t اور تابع متغیر w ہے جبکہ x اور y درمیانی متغیرات ہیں جنہیں t قابو کرتا ہے۔ زنجیری قاعدہ کا درج ذیل روپ ہمیں مساوات 13.22 میں مختلف تفرقات کے حصول کا صحیح طریقہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

یوں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ نقطہ t_0 پر حاصل کیے جائیں گے۔ حقیقی غیر تابع متغیر کی قیمت t_0 ، درمیانی متغیرات x اور y کی x_0 اور y_0 قیمتیں تعین کرتا ہے۔ جزوی تفرقات $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ نقطہ (x_0, y_0) پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

شکل 13.36: زنجیری قاعدہ یاد رکھنے کی خاطر اس شکل کو ذہن میں رکھیں۔اب $\frac{dw}{dt}$ معلوم کرنے کی خاطر w سے شروع ہو کر t تک باری باری دونوں راہ پر چل کر تفرقات کا حاصل ضرب لیں۔ آخر میں دونوں راہ کے حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔

زنجیری قاعدہ کو شکل 13.36 کی مدد سے یاد رکھنا زیادہ آسان ہو گا۔اس طرح شکل کو **شکل شجرہ**[40] کہتے ہیں۔ آپ شکل شجرہ سے دیکھ سکتے ہیں کہ جب $t=t_0$ ہو تفرقات $\frac{dx}{dt}$ اور $\frac{dy}{dt}$ کی قیمتیں t_0 پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اب قابل تفرق تفاعل x کے لئے x_0 کی قیمت t_0 تعین کرتا ہے اور قابل تفرق تفاعل y کے لئے y_0 کی قیمت t_0 تعین کرتا ہے۔ جزوی تفرقات $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ (جو از خود x اور y کے تفاعل ہیں) کی قیمتیں نقطہ $N_0(x_0,y_0)$ پر حاصل کی جاتی ہیں جو t_0 کا مطابقتی نقطہ ہے۔ حقیقی غیر تابع متغیر t ہے جبکہ x اور y درمیانے متغیرات اور w تابع متغیر ہے۔

مثال 13.32: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے راہ $x=\cos t,\ y=\sin t$ پر درج ذیل کا تفرق $\frac{dw}{dt}$ حاصل کریں۔

$$w=xy$$

نقطہ $t=\frac{\pi}{2}$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی؟

حل: ہم مساوات 13.22 کا دایاں ہاتھ $w=xy$ ، $x=\cos t$ اور $y=\sin t$ لیتے ہوئے معلوم کرتے ہیں:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=y=\sin t,\quad \frac{\partial w}{\partial y}=x=\cos t,\quad \frac{dx}{dt}=-\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$
$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}=(\sin t)(-\sin t)+(\cos t)(\cos t)$$
$$=-\sin^2 t+\cos^2 t=\cos 2t$$

[40] tree diagram

شکل 13.37: یہاں w سے t تک تین راستے ہیں۔اب بھی $\frac{dw}{dt}$ حاصل کرنے کی خاطر ہر راہ پر چلتے ہوئے تفرقات کا ضرب لے کر تمام کا مجموعہ لیں۔

شکل 13.38: پیچدار منحنی

آپ نے دیکھا کہ ہم نے $x = \cos t$ اور $y = \sin t$ کو جزوی تفرقات $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ میں پر کیا (شکل 13.37)۔ یوں حاصل تفرق $\frac{dw}{dt}$ کا اظہار غیر تابع متغیر t کی صورت میں کیا جاتا ہے (جس میں درمیانے متغیرات x اور y نہیں پائے جاتے ہیں۔)

اس مثال میں ہم حاصل نتیجہ کی تصدیق زیادہ بلا واسطہ طریقہ سے کر سکتے ہیں۔ہم w کو t کا تفاعل لکھتے ہیں:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

یوں

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\sin 2t\Big) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t = \cos 2t$$

ہو گا۔دونوں صورتوں میں $t = \frac{\pi}{2}$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2} = \cos(2\cdot\tfrac{\pi}{2}) = \cos\pi = -1$$

□

تین متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم مساوات 13.22 کے ساتھ ایک جزو جمع کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ حاصل کرتے ہیں۔

تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \tag{13.25}$$

اس کا ثبوت مساوات 13.22 کی ثبوت کی طرح ہے، بس اب دو کی بجائے تین درمیانے متغیرات ہوں گے۔

مثال 13.33: پیچ دار منحنی پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی
درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

نقطہ $t = 0$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی (شکل 13.38)؟

حل:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{مساوات } 13.25\\ &= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1)\\ &= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1\\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t\end{aligned}$$

یوں $t = 0$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2$$

□

سطح پر معین تفاعل کا زنجیری قاعدہ

اگر ہماری دلچسپی فضا میں ایک کرہ پر نقطہ (x, y, z) کے حرارت $w = f(x, y, z)$ سے ہو، ہم x ، y اور z کو متغیرات r اور s کے تفاعل تصور کر سکتے ہیں جو اس نقطہ کے عرض بلند اور طول بلند قیمتیں دیتے ہیں۔ اگر $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ اور $z = k(r, s)$ ہوں تب ہم حرارت کو r اور s کا مرکز تفاعل

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$

تصور کر سکتے ہیں۔ موزوں حالات میں r اور s دونوں کے لحاظ سے w کے جزوی تفرقات موجود ہوں گے جنہیں درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل 13.39: مرکب تفاعل اور شکل شجرہ برائے مساوات 13.26 اور مساوات 13.27

دو غیر تابع متغیرات اور تین درمیانے متغیرات کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں $w = f(x,y,z)$ ، $x = g(r,s)$ ، $y = h(r,s)$ اور $z = k(r,s)$ ہوں۔ اگر چاروں تفاعل قابل تفرق ہوں، تب r اور s کے لحاظ سے w کے جزوی تفرقات قابل پائے جائیں گے جنہیں درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{13.26}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{13.27}$$

ہم s کو مستقل تصور کر کے اور r کو t لیتے ہوئے مساوات 13.26 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔اسی طرح ہم r کو مستقل تصور کر کے اور s کو t لیتے ہوئے مساوات 13.27 کو مساوات 13.25 سے حاصل کر سکتے ہیں۔ مساوات 13.26 اور مساوات 13.27 کے اشکال شجرہ شکل 13.39 میں دکھائی گئی ہیں۔

مثال 13.34: درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial s}$ کو r اور s کی صورت میں لکھیں۔

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{x}, \quad y = r62 + \ln s, \quad z = 2r$$

حل:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\\&=(1)\Big(\frac{1}{s}\Big)+(2)(2r)+(2z)(2)\\&=\frac{1}{s}+4r+(4r)(2)=\frac{1}{s}+12r\end{aligned}$$ مساوات 13.26

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\&=(1)\Big(-\frac{r}{s^2}\Big)+(2)\Big(\frac{1}{s}\Big)+(2z)(0)=\frac{2}{s}-\frac{r}{s^2}\end{aligned}$$ مساوات 13.27

□

اگر f تین کی بجائے دو متغیرات کا تفاعل ہو تب درمیانہ متغیر z نہیں پایا جائے گا لہٰذا مساوات 13.26 اور مساوات 13.27 میں ایک ایک جزو کم ہو گا۔

اگر $w=f(x,y)$ ، $x=g(r,s)$ اور $y=h(r,s)$ ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\quad \text{اور}\quad \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\tag{13.28}$$

شکل 13.40 میں مساوات 13.28 کی شکل شجرہ دکھائی گئی ہے۔

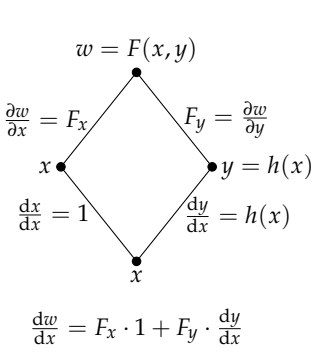
مثال 13.35: درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial s}$ کو r اور s کی صورت میں لکھیں۔

$$w=x^2+y^2,\quad x=r-s,\quad y=r+s$$

حل: ہم مساوات 13.28 استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\&=(2x)(1)+(2y)(1)\\&=2(r-s)+2(r+s)\\&=4r\end{aligned}\qquad\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s}&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\&=(2x)(-1)+(2y)(1)\\&=-2(r-s)+2(r+s)\\&=4s\end{aligned}$$

□

شکل 13.40: مساوات 13.28 کی پہلی مساوات کی شکل شجرہ۔

شکل 13.41: شجرہ برائے مساوات 13.29

شکل 13.42: شجرہ برائے مساوات 13.30

اگر f صرف x کا تفاعل ہو تب مساوات 13.26 اور مساوات 13.27 مزید سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

اگر $w = f(x)$ اور $x = g(r, s)$ ہوں تب

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial s} \tag{13.29}$$

ہوں گے جہاں $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ سادہ (ایک متغیر کا) تفرق ہے (شکل 13.41)۔

خفی تفرق (باب 3)

یقین کیجیے مساوات 13.22 میں دیا گیا دو متغیرات کا زنجیری قاعدہ سے ایک ایسا کلیہ اخذ ہوتا ہے جو خفی تفرق کا حصول نہایت آسان بناتا ہے۔ فرض کریں

1. تفاعل $F(x, y)$ قابل تفرق ہے اور
2. مساوات $F(x, y) = 0$ تابع متغیر y کو خفی طور پر غیر تابع متغیر x کے قابل تفرق مساوات کی کی صورت، مثلاً $y = h(x)$، میں پیش کرتا ہو۔

چونکہ $w = F(x, y) = 0$ ہے، تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ صفر ہو گا۔ زنجیری قاعدہ (شکل 13.42) سے تفرق حاصل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \text{مساوات 13.22 میں } t = x \text{ اور } f = F \\ &= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{13.30}$$

اگر $F_y = \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ ہو تب ہم مساوات 13.30 کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

فرض کریں $F(x, y)$ قابل تفرق ہو اور مساوات $F(x, y) = 0$ تابع متغیر y کو غیر تابع متغیر x کے قابل تفرق تفاعل کی صورت میں پیش کرتی ہو، تب ایسا نقطہ پر جہاں $F_y \neq 0$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{13.31}$$

مثال 13.36: $x^2 + \sin y - 2y = 0$ لیتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔ حل: ہم $F(x, y) = x^2 + \sin y - 2y$ لیتے ہیں۔ یوں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{\cos y - 2} \qquad \text{مساوات } 13.31$$

ہو گا۔ ہم مثال 3.49 میں اس کو پہلے حل کر چکے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ طریقہ زیادہ جلدی جواب مہیا کرتا ہے۔ □

متعدد متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں $f(x, y, \cdots, v)$ غیر تابع (متناہی تعداد کے) متغیرات $x, y, \cdots, v$ کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $x, y, \cdots, v$ (ایک دوسرے متناہی تعداد کے) متغیرات $p, q, \cdots, t$ کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ تب w متغیرات $p, q, \cdots, t$ کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور ان متغیرات کے لحاظ سے w کے جزوی تفرقات کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} \tag{13.32}$$

باقی مساوات حاصل کرنے کے لئے p کی جگہ باری باری $q, \cdots, t$ پر کریں۔

مساوات 13.32 کو یاد رکھنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کے دائیں ہاتھ کو دو سمتیات، جن کے اجزاء درج ذیل ہوں، کا ضرب نقطہ تصور کیا جائے۔

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \cdot, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\text{درمیانی متغیرات کے لحاظ سے } w \text{ کے تفرقات}} \quad \text{اور} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \cdot, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{منتخب غیر تابع متغیر کے لحاظ سے درمیانی متغیرات کے تفرقات}}$$

سوالات

زنجیری قاعدہ: ایک غیر تابع متغیر

سوال 13.248 تا سوال 13.253 میں (ا) پہلے زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور بعد میں w کو t کا تفاعل لکھ کر t کے لحاظ سے بلا واسطہ تفرق لیتے ہوئے، $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کو t کا تفاعل لکھیں۔ (ب) اس کے بعد t کی دی گئی قیمت پر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.248: $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad t = \pi$

سوال 13.249: $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad t = 0$

سوال 13.250: $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}, \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = \frac{1}{t}; \quad t = 3$

سوال 13.251: $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}, \quad t = 3$

سوال 13.252: $w = 2ye^x - \ln z, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad y = \tan^{-1} t, \quad z = e^t; \quad t = 1$

سوال 13.253: $w = z - \sin xy, \quad x = t, \quad y = \ln t, \quad z = e^{t-1}; \quad t = 1$

زنجیری قاعدہ: دو اور تین غیر تابع متغیرات

سوال 13.254 اور سوال 13.255 میں (ا) $\frac{\partial z}{\partial r}$ اور $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ کو r اور θ کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) z کو r اور θ کا تفاعل لکھ کر بلا واسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (r, θ) پر $\frac{\partial z}{\partial r}$ اور $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.254: $z = 4e^x \ln y,\ x = \ln(r\cos\theta),\ y = r\sin\theta;\ (r, \theta) = (2, \frac{\pi}{4})$

سوال 13.255: $z = \tan^{-1} \frac{x}{y},\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta;\ (r, \theta) = (1.3, \frac{\pi}{6})$

سوال 13.256 اور سوال 13.257 میں (ا) $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ کو u اور v کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) w کو u اور v کا تفاعل لکھ کر بلا واسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (u, v) پر $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.256: $w = xy + yz + xz,\ x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv;\ (u, v) = (\frac{1}{2}, 1)$

سوال 13.257: $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2),\ x = ue^v \sin u,\ y = ue^v \cos u,$
$z = ue^v;\ (u, v) = (-2, 0)$

سوال 13.258 اور سوال 13.259 میں (ا) $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اور $\frac{\partial u}{\partial z}$ کو x ، y اور z کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) u کو x ، y اور z کا تفاعل لکھ کر بلا واسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (x, y, z) پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اور $\frac{\partial u}{\partial z}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.258: $u = \frac{p-q}{q-r},\ p = x + y + z,\ q = x - y + z,\ r = x + y - z;\ (x, y, z) = (\sqrt{3}, 2, 1)$

سوال 13.259: $u = e^{qr} \sin^{-1} p,\ p = \sin x,\ q = z^2 \ln y,\ r = \frac{1}{z};\ (x, y, z) = (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

شجرہ کا استعمال

سوال 13.260 تا سوال 13.271 میں شکل شجرہ بناتے ہوئے ہر ایک تفرق کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال 13.260: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ؛ $z = f(x, y)$ ، $x = g(t)$ ، $y = h(t)$

سوال 13.261: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ ؛ $z = f(u, v, w)$ ، $u = g(t)$ ، $v = h(t)$ ، $w = k(t)$

سوال 13.262: $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ ؛ $w = h(x, y, z)$ ، $x = f(u, v)$ ، $y = g(u, v)$ ، $z = k(u, v)$

سوال 13.263: $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ؛ $w = f(r, s, t)$ ، $r = g(x, y)$ ، $s = h(x, y)$ ، $t = k(x, y)$

سوال 13.264: $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ ؛ $w = g(x, y)$ ، $x = h(u, v)$ ، $y = k(u, v)$

سوال 13.265: $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ؛ $w = g(u, v)$ ، $u = h(x, y)$ ، $v = k(x, y)$

سوال 13.266: $\frac{\partial z}{\partial t}$ ، $\frac{\partial z}{\partial s}$ ؛ $z = f(x, y)$ ، $x = g(t, s)$ ، $y = h(t, s)$

سوال 13.267: $\frac{\partial y}{\partial r}$ ؛ $y = f(u)$ ، $u = g(r, s)$

سوال 13.268: $\frac{\partial w}{\partial s}$ ، $\frac{\partial w}{\partial t}$ ؛ $w = g(u)$ ، $u = h(s, t)$

سوال 13.269: $\frac{\partial w}{\partial p}$ ؛ $w = f(x, y, z, v)$ ، $x = g(p, q)$ ، $y = h(p, q)$ ، $z = j(p, q)$ ، $v = k(p, q)$

سوال 13.270: $\frac{\partial w}{\partial r}$ ، $\frac{\partial w}{\partial s}$ ؛ $w = f(x, y)$ ، $x = g(r)$ ، $y = h(s)$

سوال 13.271: $\frac{\partial w}{\partial s}$ ؛ $w=g(x,y)$ ، $x=h(r,s,t)$ ، $y=k(r,s,t)$

خفی تفرق

سوال 13.272 تا سوال 13.275 میں تصور کریں کہ دی گئی مساوات y کو غیر تابع متغیر x کا قابل تفرق تفاعل پیش کرتی ہے۔ دیے گئے نقطہ پر مساوات 13.31 کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.272: $x^3-2y^2+xy=0, \quad (1,1)$

سوال 13.273: $xy+y^2-3x-3=0, \quad (-1,1)$

سوال 13.274: $x^2+xy+y^2-7=0, \quad (1,2)$

سوال 13.275: $xe^y+\sin xy+y-\ln 2=0, \quad (0,\ln 2)$

ہم تین یا اس سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے مساوات 13.31 کی موزوں صورتیں لکھ سکتے ہیں۔ تین متغیرات کے تفاعل کے لئے کچھ یوں ہو گا:

اگر مساوات $F(x,y,z)=0$ تابع متغیر z کو غیر تابع متغیرات x ، y کی صورت میں پیش کرتی ہو تب جن نقطوں پر $F_z\neq 0$ ہو وہاں درج ذیل ہوں گے:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z} \tag{13.33}$$

اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے سوال 13.276 تا سوال 13.279 میں دیے گئے نقطہ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ اور $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.276: $z^3-xy+yz+y^3-2=0, \quad (1,1,1)$

سوال 13.277: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1=0, \quad (2,3,6)$

سوال 13.278: $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z)=0, \quad (\pi,\pi,\pi)$

سوال 13.279: $xe^y+ye^z+2\ln x-2-3\ln 2=0, \quad (1,\ln 2,\ln 3)$

منتخب جزوی تفرقات

سوال 13.280: $w=(x+y+z)^2$ ، $x=r-s$ ، $y=\cos(r+s)$ اور $z=\sin(r+s)$ لیتے ہوئے $r=1$ ، $s=-1$ پر $\frac{\partial w}{\partial r}$ تلاش کریں۔

سوال 13.281: $w=xy+\ln z$ ، $x=\frac{v^2}{u}$ ، $y=u+v$ اور $z=\cos u$ لیتے ہوئے $u=-1$ ، $v=2$ پر $\frac{\partial w}{\partial v}$ تلاش کریں۔

سوال 13.282: $w=x^2+\frac{y}{x}$ ، $x=u-2v+1$ اور $y=2u+v-2$ لیتے ہوئے $u=0$ ، $v=0$ پر $\frac{\partial w}{\partial v}$ تلاش کریں۔

سوال 13.283: $z=\sin xy+x\sin y$ ، $x=u^2+v^2$ اور $y=uv$ لیتے ہوئے $u=0$ ، $v=1$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ تلاش کریں۔

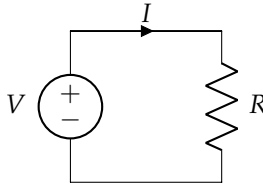
سوال 13.284: $z=5\tan^{-1}x$ اور $x=e^u+\ln v$ لیتے ہوئے $u=\ln 2$ ، $v=1$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ اور $\frac{\partial z}{\partial v}$ تلاش کریں۔

سوال 13.285: $z=\ln q$ اور $q=\sqrt{v+3}\tan^{-1}u$ لیتے ہوئے $u=1$ ، $v=-2$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ اور $\frac{\partial z}{\partial v}$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.286: دور میں برقی دباو کی تبدیلی

ایک برقی دور جو $V=IR$ کو مطمئن کرتا ہو میں بیٹری کمزور پڑنے سے برقی دباو V آہستہ آہستہ گھٹتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ مزاحمت گرم ہونے کی بنا بڑھتا ہے۔درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہوئے اس لمحہ پر برقی رو کی شرح تبدیلی دریافت کریں جب $R=600\,\Omega$ ، $I=0.04\,\text{A}$ ، $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=0.5\,\Omega\,\text{s}^{-1}$ اور $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.01\,\text{V}\,\text{s}^{-1}$ ہوں۔

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$

سوال 13.287: ایک ڈبے کی اضلاع کی تبدیلی
ایک مستطیل ڈبے کے اضلاع a ، b اور c وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہے ہیں۔اس ڈبے کا حجم اور سطحی رقبہ کس شرح سے اس لمحہ تبدیل ہوں گے جب $a = 1\,\mathrm{m}$ ، $b = 2\,\mathrm{m}$ ، $c = 3\,\mathrm{m}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں؟ کیا اس لمحہ پر ڈبے کے اندرونی وتروں کی لمبائیاں بڑھ رہی ہیں یا گھٹ رہی ہیں؟

سوال 13.288: اگر $f(u, v, w)$ قابل تفرق ہو اور $u = x - y$ ، $v = y - z$ اور $w = z - x$ ہوں تب دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

سوال 13.289: (ا) دکھائیں کہ قابل تفرق تفاعل $w = f(x, y)$ میں قطبی محدد $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے درج ذیل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$$

(ب) جزو-ا میں دی گئی مساواتوں کو حل کرتے ہوئے f_x اور f_y کو $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ کی صورت میں لکھیں۔ (ج) درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

سوال 13.290: اگر $w = f(u, v)$ مساوات لاپلاس $f_{uu} + f_{vv} = 0$ کو مطمئن کرتا ہو اور $u = \frac{x^2 - y^2}{2}$ اور $v = xy$ ہوں تب دکھائیں کہ w مساوات لاپلاس $w_{xx} + w_{yy} = 0$ کو بھی مطمئن کرے گا۔

سوال 13.291: فرض کریں $w = f(u) + g(v)$ ہے جہاں $u = x + iy$ ، $v = x - iy$ اور $i = \sqrt{-1}$ ہیں۔ دکھائیں کہ w مساوات لاپلاس $w_{xx} + w_{yy} = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، بشرطیکہ تمام درکار تفاعل قابل تفرق ہوں۔

منحنی پر چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

سوال 13.292: فرض کریں پیچدار منحنی $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ پر پائے جانے والے نقطوں پر تفاعل $f(x, y, z)$ کے جزوی تفرقات درج ذیل ہیں۔

$$f_x = \cos t, \quad f_y = \sin t, \quad f_z = t^2 + t - 2$$

اس منحنی پر، کس نقطوں پر (اگر ایسا ہو) f کی انتہائی قیمتیں ہوں گی؟

سوال 13.293: تفاعل $w = x^2 e^{2y} \cos 3z$ لیتے ہوئے دائرہ $x = \cos t,\ y = \ln(t+2),\ z = t,$ کے نقطہ $(1, \ln 2, 0)$ پر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال 13.294: دائرہ $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کے نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T = f(x, y)$ لیں اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$$

ا. تفرقات $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}$ کو دیکھ کر بتائیں کہ اس دائرہ پر کہاں زیادہ سے زیادہ اور کہاں کم سے کم درجہ حرارت ہو گا۔

ب. حرارت $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$ لیتے ہوئے دائرہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم T تلاش کریں۔

سوال 13.295: درج ذیل ترخیم کے نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T = g(x, y)$ لیں۔

$$x = 2\sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

مزید درج ذیل فرض کریں۔

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x$$

ا. تفرقات $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2}$ کو دیکھ کر بتائیں ترخیم پر کہاں زیادہ سے زیادہ اور کہاں کم سے کم T ہو گا۔

ب. حرارت $T = xy - 2$ لیتے ہوئے ترسیم کر کہاں زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم T ہو گا؟

تکملات کے تفرقات

استمرار کی نرم شرائط پر پورا کرتے ہوئے اگر

$$F(x) = \int_a^b g(t, x)\,\mathrm{d}t$$

ہو تب $F'(x) = \int_a^b g_x(t, x)\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ اس حقیقت کو اور زنجیری قاعدہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t, x)\,\mathrm{d}t$$

کا تفرق درج ذیل لے کر حاصل کر سکتے ہیں جہاں $u = f(x)$ ہو گا۔

$$G(u, x) = \int_a^u g(t, x)\,\mathrm{d}t$$

سوال 13.296 اور سوال 13.297 میں تفاعل کے تفرق تلاش کریں۔

سوال 13.296: $F(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^4+x^3}\,\mathrm{d}t$

سوال 13.297: $F(x)=\int_{x^2}^{1}\sqrt{t^3+x^2}\,\mathrm{d}t$

13.6 پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات

اب تک تفاعل، مثلاً $w=f(x,y)$ ، کے جزوی تفرقات تلاش کرتے ہوئے ہم x اور y کو بالکل آزاد غیر تابع متغیرات تصور کرتے رہے ہیں، اگرچہ عملی زندگی میں ضروری نہیں کہ ایسا ہو۔ مثال کے طور پر ہم گیس کی اندرونی توانائی U کو دباو P ، حجم H اور حرارت T کا تفاعل $U=f(P,H,T)$ لکھ سکتے ہیں۔ اگر گیس کے انفرادی مالیکیول ایک دوسرے پر اثر انداز نہ ہوں تب P ، H اور T مثالی گیس کے قانون

$$PH=nRT \qquad n,R \text{ مستقل ہیں}$$

کو مطمئن کریں گے لہٰذا یہ متغیرات بالکل آزاد ہر گز نہیں ہوں گے۔ایسی صورت میں جزوی تفرقات کی تلاش پیچیدہ ثابت ہوتے ہیں۔ بہر حال ان سے نمٹنا ضروری ہے۔

فیصلہ کریں کہ کون سے متغیرات غیر تابع اور کون سے تابع ہیں

اگر تفاعل $w=f(x,y,z)$ کے متغیرات کسی تعلق، مثلاً $z=x^2+y^2$ ، کے پابند ہوں تب f کے جزوی تفرقات کی جیومیٹریائی معنی اور عددی قیمت اس پر منحصر ہوں گے کہ کن متغیرات کو غیر تابع اور کن کو تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ اس انتخاب کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر آئیں $w=x^2+y^2+z^2$ اور $z=x^2+y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

مثال 13.37: تفاعل $w=x^2+y^2+z^2$ اور متغیرات کو پابند کرنے والی مساوات $z=x^2+y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

حل: ہمیں چار متغیرات کی دو مساوات دی گئی ہیں جنہیں ہم دو (تابع) متغیرات کے لئے باقی (غیر تابع) متغیرات کی صورت میں حل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرنے کو کہا جائے، اس کا مطلب ہے کہ w تابع متغیر اور x تابع متغیر ہے۔ یوں ہمارے پاس تابع اور غیر تابع متغیرات منتخب کرنے کے درج ذیل ممکنات ہیں۔

تابع	غیر تابع
w,z	x,y
w,y	x,z

ہم دونوں صورتوں میں w کو منتخب غیر تابع متغیرات کی صورت میں صریحاً لکھ سکتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم دوسری مساوات استعمال کرتے ہوئے پہلی مساوات کا دوسرا تابع متغیر حذف کرتے ہیں۔

پہلی انتخاب میں z دوسرا تابع متغیر ہو گا۔ ہم پہلی مساوات میں اس کی جگہ x^2+y^2 پر کر کے اس کو حذف کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} w &= x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(x^+y^2)^2 \\ &= x^2+y^2+x^4+2x^2y^2+y^4 \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس سے

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x+4x^3+4xy^2 \tag{13.34}$$

حاصل ہو گا جو x اور y غیر تابع متغیرات لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی مساوات ہے۔

دوسری انتخاب میں غیر تابع متغیرات x اور z ہیں جبکہ دوسرا تابع تغیر y ہے۔یوں y حذف کرنے کی خاطر ہم پہلی مساوات میں y^2 کی جگہ $z-x^2$ پر کر کے

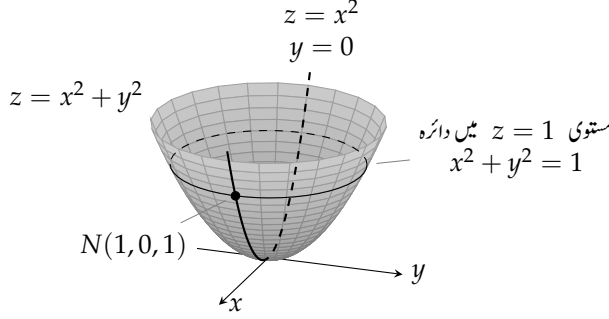
$$w = x^2+y^2+z^2 = x^2+(z-x^2)+z^2 = z+z^2$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{13.35}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں غیر تابع متغیرات x اور z منتخب کرنے سے $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 13.34 اور مساوات 13.35 ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔ ہم $z=x^2+y^2$ استعمال کرتے ہوئے ایک سے دوسری مساوات حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔یوں ہمارے پاس ایک $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی بجائے دو نتائج موجود ہیں۔ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں پوری معلومات فراہم کیے بغیر جزوی تفرق حاصل کرنے کو کہا گیا۔ہمیں پوچھنا ہو گا کہ کونسا $\frac{\partial w}{\partial x}$ درکار ہے؟

ہم مساوات 13.34 اور مساوات 13.35 کی جیومیٹریائی (شکل 13.43) مطلب کو دیکھ کر جان سکتے ہیں کہ یہ جوابات ایک دوسرے سے مختلف کیوں ہیں۔ تفاعل $w=x^2+y^2+z^2$ مبدا سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ ناپتا ہے۔ شرط $z=x^2+y^2$ کہتا ہے کہ نقطہ (x,y,z) قطع مکافی کے جسم طواف پر پایا جاتا ہے۔ صرف اس سطح پر چلتے ہوئے نقطہ $N(x,y,z)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ سے کیا مراد ہے؟مثال کے طور پر نقطہ $(1,0,1)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی کیا قیمت ہو گی؟

اگر ہم x اور y کو غیر تابع متغیرات لیں تب ہم y کو مستقل (موجودہ صورت میں $y=0$) تصور کرتے ہوئے x تبدیل کرتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔اس کا مطلب ہے کہ N مستوی xz میں قطع مکافی $z=x^2$ پر حرکت کرے گا۔اس قطع مکافی پر چلتے ہوئے، w جو مبدا سے N تک فاصلے کا مربع ہے تبدیل ہو گا۔ہم ایسی صورت میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں (جو مذکورہ بالا اپہلا نتیجہ ہے۔)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x+4x^3+4xy^2$$

شکل 13.43: نقطہ N کو پابند کرنے سے جزوی تفرقات کے مختلف نتائج حاصل ہوں گے۔

نقطہ $(1, 0, 1)$ پر اس کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6$$

اگر ہم x اور z کو غیر تابع متغیرات منتخب کریں تب ہم z کو مستقل ٹھراتے ہوئے x تبدیل کر کے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ N کا z محدد 1 ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے N مستوی $z = 1$ میں ایک دائرہ پر حرکت کرے گا۔اس دائرہ پر چلتے ہوئے مبدا سے N تک فاصلہ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا w جو اس فاصلے کا مربع ہے بھی تبدیل نہیں ہو گا۔یوں

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

ہو گا جو دوسرا انتخاب کرتے ہوئے ہم حاصل کر چکے ہیں۔ □

جزوی تفرق $\frac{\partial w}{\partial x}$ جب تفاعل $w = f(x, y, z)$

کے متغیرات کو دوسری مساوات قابو کرتی ہو جیسا ہم نے مساوات 13.37 میں دیکھا، جب تفاعل $w = f(x, y, z)$ کے متغیرات کو ایک دوسری مساوات قابو کرتی ہو تب $\frac{\partial w}{\partial x}$ تین قدموں میں حاصل ہو گا۔۔یہ اقدام $\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $\frac{\partial w}{\partial z}$ کے حصول کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

1. پہلے فیصلہ کریں کہ کون سے متغیرات تابع اور کون سے غیر تابع تصور کئے جائیں گے۔ (حقیقت میں ایسا فیصلہ طبعی یا نظریاتی سیاق و سباق پر منحصر ہو گا۔)

2. باقی تابع متغیرات کو w کی مساوات سے خارج کریں۔

3. تفرق کو معمول کے مطابق حاصل کریں۔

اگر دوسرے قدم پر ہم باقی تابع متغیرات کو حذف نہ کر سکیں تب ہم دونوں مساوات کا تفرق لے کر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کے لئے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔اگلی مثال میں ایسا کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال 13.38: اگر درج ذیل ہوں تب نقطہ $(x,y,z)=(2,-1,1)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کیا ہو گا؟

$$w=x^2+y^2+z^2,\quad z^3-xy+yz+y^3=1$$

حل: یہاں w کی مساوات سے z حذف کرنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس لئے x اور y کو غیر تابع متغیرات جبکہ w اور z کو تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے دونوں مساوات کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔یوں

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x} \tag{13.36}$$

اور

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-y+y\frac{\partial z}{\partial x}+0=0 \tag{13.37}$$

حاصل ہوں گے۔ان مساوات کو ملا کر x ، y اور z کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ہم مساوات 13.37 کو $\frac{\partial z}{\partial x}$ کے لئے حل کر کے

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{y+3z^2}$$

حاصل کرتے ہیں جس کو مساوات 13.36 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)}=2(2)+\frac{2(-1)(1)}{-1+3(1)^2}=4+\frac{-2}{2}=3$$

□

تفرق کے حصول میں غیر تابع متغیرات واضح کرنے کی خاطر ہم درج ذیل علامتیت استعمال کرتے ہیں۔

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ $\frac{\partial w}{\partial x}$ جہاں x اور y غیر تابع ہیں۔

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,t}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ جہاں y ، x اور t غیر تابع ہیں۔

مثال 13.39: جزوی تفرق $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$ تلاش کریں جہاں $w = x^2 + y - z + \sin t$ اور $x + y = t$ ہیں۔

حل: متغیرات x ، y اور z کو غیر تابع لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$t = x + y, \quad w = x^2 + y - z + \sin(x + y)$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x + y)$$
$$= 2x + \cos(x + y)$$

□

تیر دار اشکال

مثال 13.39 کی طرح مسائل حل کرتے ہوئے تیر دار اشکال استعمال کرنا مدد گار ثابت ہوتا ہے۔ تیر دار اشکال تفاعل اور متغیرات کے بیچ تعلق دکھاتے ہیں۔ اگر

$$x + y = t \quad \text{اور} \quad w = x * 2 + y - z + \sin t$$

ہوں ہمیں x ، y اور z غیر تابع لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرنے کو کہا جائے تب درکار اشکال درج ذیل ہوں گے:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{غیر تابع متغیرات}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{\text{درمیانے متغیرات اور تعلق}} \rightarrow \underbrace{w}_{\text{تابع متغیر}} \tag{13.38}$$
$$\begin{gathered} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = x + y \end{gathered}$$

اس تیر دار شکل میں غیر تابع متغیرات دائیں ہاتھ، درمیانے متغیرات اور ان کا غیر تابع متغیرات کے ساتھ تعلق درمیان میں اور تابع متغیرات دائیں ہاتھ ہیں۔

جزوی تفرق $\frac{\partial w}{\partial x}$ حاصل کرنے کے لئے ہم چار متغیرات کا زنجیری قاعدہ w پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \tag{13.39}$$

اس کلیہ کے دائیں ہاتھ میں w کے جزوی تفرقات کو $w = x^2 + y - z + \sin t$ کے لئے حاصل کر کے اس کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x\frac{\partial x}{\partial x} + (1)\frac{\partial y}{\partial x} + (-1)\frac{\partial z}{\partial x} + \cos t\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= 2x\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} + \cos t\frac{\partial t}{\partial x} \end{aligned} \tag{13.40}$$

باقی جزوی تفرقات حاصل کرنے کے لئے ہم متغیرات کی غیر تابعیت اور تابعیت بروئے کار لاتے ہیں۔ ہم مساوات 13.38 سے دیکھتے ہیں کہ x ، y اور z غیر تابع ہیں اور $t = x + y$ ہے۔ یوں

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = (1+0) = 1$$

ہو گا۔ہم انہیں مساوات 13.40 میں پر کر کے $\frac{\partial x}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x(1) + 0 - 0 + (\cos t)(1) \\ &= 2x + \cos t \\ &= 2x + \cos(x+y) && \text{غیر تابع متغیر کی صورت میں} \end{aligned}$$

سوالات

پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات

سوال 13.298 تا سوال 13.300 میں تیر دار اشکال سے شروع کرتے ہوئے دیے تفرقات تلاش کریں۔

سوال 13.298: $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z = x^2 + y^2$

(ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ ، (ج) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

سوال 13.299: $w = x^2 + y - z + \sin t, \quad x + y = t$

(ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ ، (ج) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$ ،

(د) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ ، (ہ) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ ، (و) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$ ،

سوال 13.300: ایک گیس جو مثالی گیس کے کلیہ $PH = nRT$ پر پورا اترتا ہو، جہاں n ، R مستقل ہیں، کی اندرونی توانائی $U = f(P, H, T)$ ہو گی۔

(ا) $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_H$ ، (ب) $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H$

سوال 13.301: نقطہ $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ اور $w = x^2 + y^2 + z^2$ ، $y \sin z + z \sin x = 0$ لیں۔ اس نقطہ پر (ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$ تلاش کریں۔

سوال 13.302: نقطہ $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$ اور $w = x^2y^2 + yz - z^3$ اور $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ لیتے ہوئے اس نقطہ پر (ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ تلاش کریں۔

سوال 13.303: نقطہ $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$ پر $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ تلاش کریں جہاں $x = u^2 + v^2$ اور $y = uv$ ہیں۔

سوال 13.304: فرض کریں $x^2 + y^2 = r^2$ اور $x = r\cos\theta$ ہیں۔ جزوی تفرقات $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta$ اور $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$ تلاش کریں۔

سوال 13.305: فرض کریں $w = x^2 - y^2 + 4z + t$ اور $x + 2z + t = 25$ ہیں۔ دکھائیں کہ مساوات

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1$$

مختلف متغیرات کو تابع اور غیر تابع تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ دیتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں غیر تابع متغیرات تلاش کریں۔

بغیر کسی مخصوص کلیہ جزوی تفرقات کا حصول

سوال 13.306: ماقوا حرکیات کی میدان میں ایک مستمل حقیقت کہتا ہے کہ اگر $f(x, y, z) = 0$ ہو تب

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

ہو گا۔اس حقیقت کی تصدیق کریں۔ (اشارہ: تمام تفرقات کو باضابطہ جزوی تفرقات $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی صورت میں لکھیں۔)

سوال 13.307: اگر $z = x + f(u)$ اور $u = xy$ ہوں تب درج ذیل دکھائیں۔

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

سوال 13.308: فرض کریں مساوات $g(x, y, z) = 0$ غیر تابع متغیرات x اور y کا قابل تفرق تفاعل z تعین کرتی ہے اور $g_z \neq 0$ ہے۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

سوال 13.309: فرض کریں $f(x,y,z,w)=0$ اور $g(x,y,z,w)=0$ غیر تابع متغیرات x اور y کے قابل تفاعل تفاعل z اور w تعین کرتے ہیں۔ مزید

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}\neq 0$$

فرض کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

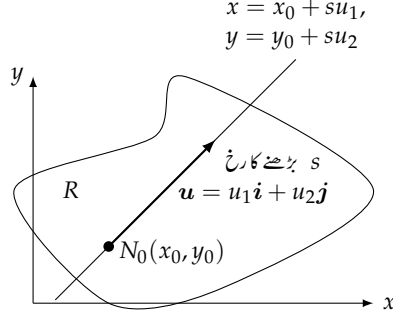
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x=-\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w}-\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}$$

13.7 رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

ہم حصہ 13.5 سے جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی منحنی $x=g(t),\ y=h(t)$ کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے t کے لحاظ سے شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

نقطہ $N_0(x_0,y_0)=N_0(g(t_0),h(t_0))$ پر یہ مساوات بڑھتی t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی دیتی ہے، جو دیگر چیزوں کے ساتھ منحنی پر چلنے کے رخ پر بھی منحصر ہے۔ یہ مشاہدہ اس صورت خصوصاً اہم ہو گا جب یہ منحنی ایک سیدھی لکیر ہو اور نقطہ N_0 سے منحنی پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس t ہو۔ چونکہ تب $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کے دائرہ کار میں فاصلہ کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ہو گی۔ ہم $\boldsymbol{u}$ تبدیل کرتے ہوئے نقطہ N_0 پر، فاصلہ کے لحاظ سے f کی مختلف رخ میں شرح تبدیلی دریافت کر سکتے ہیں۔ ان **رخی تفرقات**[41] کی سائنس، انجینئری اور ریاضیات میں کارآمد تشریحات کی جاتی ہیں۔ اس حصہ میں ان کی قیمت دریافت کرنے کا کلیہ اخذ کیا جائے گا جس کے بعد فضا میں سطحوں کی مماسی سطحیں اور عمودی سطحیں تلاش کی جائیں گی۔

---
[41] directional derivative

شکل 13.44: نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی N_0 پر لکیر کے ساتھ f کی شرح تبدیلی ہو گی۔

مستوی میں رخی تفرقات

فرض کریں مستوی xy میں پورے خطہ R میں تفاعل $f(x, y)$ معین ہے، $N_0(x_0, y_0)$ خطہ R میں ایک نقطہ ہے، اور $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔ تب $\boldsymbol{u}$ کے متوازی نقطہ N_0 سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ نقطہ N_0 سے فاصلہ کو مقدار معلوم s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ سے حاصل کرتے ہیں (شکل 13.44)۔

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل عدد ہو گا

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u}, N_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \tag{13.41}$$

بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

رخی تفرق کو درج ذیل سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق $\qquad (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}$

مثال 13.40: نقطہ $N_0(1, 2)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ درج ذیل کا تفرق تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

حل:

مساوات 13.41

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1,y_0+su_2)-f(x_0,y_0)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f\Big(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}},2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-f(1,2)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\Big(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big)^2+\Big(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big)\Big(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\Big)-(1^2+1\cdot 2)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\Big(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\Big)+\Big(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\Big)-3}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s}=\lim_{s\to 0}\Big(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\Big)=\Big(\frac{5}{\sqrt{2}}+0\Big)=\frac{5}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

نقطہ $N_0(1,2)$ پر $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ $f(x,y)=x^2+xy$ کی تبدیلی کی شرح $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ہے۔ □

رخی تفرق کی جیومیٹریائی تشریح

مساوات $z=f(x,y)$ فضا میں ایک سطح S کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $z_0=f(x_0,y_0)$ ہو تب نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سطح S پر واقع ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے متوازی انتصابی مستوی، جو $N(x,y)$ اور $N_0(x_0,y_0)$ سے گزرتا ہو، S کو منحنی C میں قطع کرے گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی N پر C کے مماس کی ڈھلوان ہو گی۔

دھیان رہے کہ جب $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0,y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ اسی طرح جب $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{j}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0,y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ رخی تفرق ان دو جزوی تفرقات کو عمومی بناتا ہے۔ ہم اب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے علاوہ کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$، تفاعل f کی تبدیلی شرح جان سکتے ہیں۔

حساب

جیسا آپ جانتے ہیں، تفرق کی تعریف بطور حد سے کسی بھی تفرق کا حصول اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ رخی تفرق کی تعریف سے بھی رخی تفرق کا حصول مشکل کام ہے۔ آئیں رخی تفرق کا زیادہ آسان کلیہ اخذ کریں۔ ہم خط

$$x=x_0+su_1,\quad y=y_0+su_2 \tag{13.42}$$

سے شروع کرتے ہیں جو نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساوات ہے جس میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ بڑھتا ہوا s مقدار معلوم لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot u_2 \qquad \text{مساوات 13.42 سے } \tfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u_1 \text{ اور } \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = u_2$$

$$(13.43)\qquad = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{j}\right]}_{N_0 \text{ پر } f \text{ کی ڈھلوان}}\cdot\underbrace{\left[u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}\right]}_{\boldsymbol{u} \text{ کا رخ}}$$

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x,y)$ کا سمتیہ ڈھلوان (ڈھلوان) درج ذیل سمتیہ ہو گا

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

جس کی قیمت N_0 پر f کے رخی تفرق سے حاصل کی جائے گی۔

□

سمتی ڈھلوان ∇f کو "ڈھلوان f" پڑھتے ہیں۔ علامت ∇ یونانی حرف "نیبلا" ہے۔

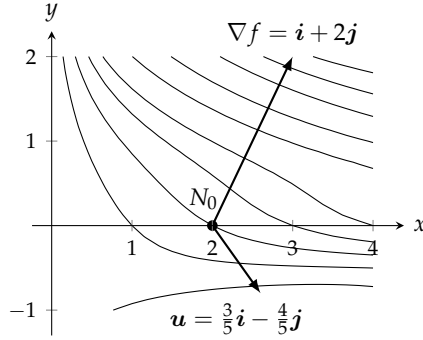
مساوات 13.43 کہتی ہے کہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا حاصل ضرب ہو گا۔

مسئلہ 13.6: اگر $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x,y)$ کے جزوی تفرقات معین ہوں تب N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق، N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا غیر سمتی ضرب ہو گا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \left(\nabla\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{u} \tag{13.44}$$

مثال 13.41: نقطہ $(2,0)$ پر $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ رخ $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ کا رخی تفرق تلاش کریں۔

حل: ہم $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی سے $\boldsymbol{A}$ کو تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کے رخ اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - -\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

شکل 13.45: روایتی طور پر ∇f کو f کے دائرہ کار میں دکھایا جاتا ہے۔ موجودہ تفاعل کے لئے مکمل مستوی xy دائرہ کار ہو گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{u} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی $\nabla f \cdot \boldsymbol{u} = -1$ ہو گی (مثال 13.41)۔

نقطہ $(2,0)$ پر f کے جزوی تفرقات

$$f_x(2,0) = (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$
$$f_y(2,0) = (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2$$

ہوں گے لہٰذا نقطہ $(2,0)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(2,0)} = f_x(2,0)\boldsymbol{i} + f_y(2,0)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

ہو گی (شکل 13.45)۔ نقطہ $(2,0)$ پر $\boldsymbol{A}$ رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\Big(D_{\boldsymbol{u}}f\Big)\Big|_{(2,0)} &= \nabla f\big|_{(2,0)} \cdot \boldsymbol{u}\\ &= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot \Big(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\Big) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1\end{aligned}$$

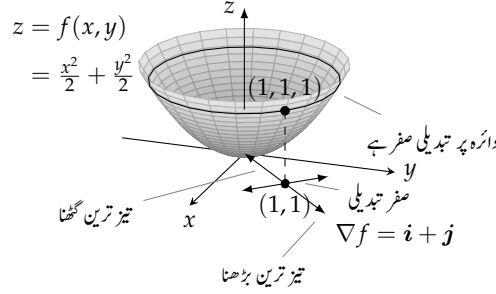
□

رخی تفرقات کے خواص

رخی تفرق کے کلیہ

$$D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f||\boldsymbol{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

کی قیمت تلاش کرنے سے درج ذیل خواص دریافت ہوتے ہیں:

رخی تفرق $D_{\boldsymbol{u}}f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f|\cos\theta$ کے خواص

شکل 13.46: نقطہ $(1, 1, 1)$ پر f تیز ترین ∇f رخ بڑھتا ہے جو سطح پر سیدھا چڑھنے کا مطابقتی رخ ہے (مثال 13.42)۔

1. تفاعل f اس صورت تیز ترین بڑھتا ہے جب $\cos\theta = 1$ ہو، یعنی جب $\boldsymbol{u}$ اور ∇f ایک ہی رخ ہوں۔اس طرح، اپنے دائرہ کار میں، نقطہ N پر سمتیہ ڈھلوان ∇f کے رخ، f تیز ترین بڑھتا ہے۔ اس رخ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \left|\nabla f\right| \cos(0) = \left|\nabla f\right|$$

2. اسی طرح $-\nabla f$ کے رخ f تیز ترین گھٹتا ہے۔اس رخ تفرق $D_{\boldsymbol{u}} f = \left|\nabla f\right| \cos(\pi) = -\left|\nabla f\right|$ ہو گا۔

3. ڈھلوان کے عمودی کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$ کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ایسے رخ θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا:

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \left|\nabla f\right| \cos(\pi/2) = \left|\nabla f\right| \cdot 0 = 0$$

جیسا ہم دیکھیں گے، یہ خواص تین بعدی فضا میں بھی کارآمد ہوں گی۔

مثال 13.42: نقطہ $(1, 1)$ پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ (ا) تیز ترین بڑھتا ہو، (ب) تیز ترین گھٹتا ہو، (ج) میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی ہو۔

حل: (ا) یہ تفاعل نقطہ $(1, 1)$ پر ∇f کے رخ تیز ترین بڑھے گا۔اس نقطہ پر ڈھلوان

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})_{(1,1)} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

ہے لہٰذا تیز ترین بڑھنے کا رخ درج ذیل اکائی سمتیہ دیگا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(ب) یہ تفاعل $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹے گا۔ یہ رخ درج ذیل ہو گا۔

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

(ج) نقطہ $(1,1)$ پر صفر تبدیلی کا رخ ∇f کو عمودی ہو گا۔ یہ رخ درج ذیل ہوں گے (شکل 13.46)۔

$$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

□

ہم قد منحنی کے ڈھلوان اور مماس

اگر ہموار منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت مستقل ہو (جس کی بنا یہ منحنی، f کی ہم قد منحنی ہو گی)، تب $f(g(t),h(t)) = 0$ ہو گا۔ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل مساوات دیگا:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(g(t),h(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c) \\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= 0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ} \\ \underbrace{\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\Big)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\Big(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\Big)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} &= 0 \end{aligned} \tag{13.45}$$

مساوات 13.45 کہتی ہے کہ مماسی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کو ∇f عمودی ہو گا، لہٰذا ∇f نقطہ (x_0,y_0) پر منحنی کو عمودی ہو گا۔

تفاعل $f(x,y)$ کے دائرہ کار میں ہر نقطہ (x_0,y_0) پر f کی ڈھلوان نقطہ (x_0,y_0) پر ہم قد منحنی کو عمودی ہو گی (شکل 13.47)۔

ہم اس مشاہدہ کی بنا ہم قد منحنیات کی مماسات کی مساواتیں دریافت کر سکتے ہیں۔ یہ ڈھلوان کو عمودی خطوط ہوں گے۔ نقطہ $N_0(x_0,y_0)$ سے گزرتا ہوا، سمتیہ $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ کو عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی (سوال 13.368)۔

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$

اگر $\boldsymbol{N}$ ڈھلوان $(\nabla f)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$ ہو تب اس مساوات کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \tag{13.46}$$

شکل 13.47: دو متغیرات کے تفاعل کی ڈھلوان ہر صورت ہم قد منحنیات کی عمودی ہو گی۔

شکل 13.48: ہم قطع مکافی کو تفاعل $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$ کی ہم قد منحنی تصور کر کے اس کا مماس تلاش کر سکتے ہیں (مثال 13.43)۔

مثال 13.43: نقطہ $(-2,1)$ پر درج ذیل ترخیم کے مماس کی مساوات تلاش کریں (شکل 13.48)۔

$$\frac{x^2}{4}+y^2=2$$

حل: یہ ترخیم درج ذیل تفاعل کی ہم قد منحنی ہے۔

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2$$

نقطہ $(-2,1)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(-2,1)}=\left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}\right)_{(-2,1)}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$$

ہو گی لہٰذا مماسی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}(-1)(x+2)+(2)(y-1)&=0\\x-2y&=-4\end{aligned} \tag{13.46}$$

□

تین متغیرات کا تفاعل

ہم دو متغیرات کلیات کے ساتھ جزو z شامل کر کے تین متغیرات کلیات حاصل کرتے ہیں۔ فضا میں قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ کے لئے ہم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

اور

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

لکھیں گے۔ رخی تفرق اب بھی

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \left|\nabla f\right| |\boldsymbol{u}| \cos\theta = \left|\nabla f\right| \cos\theta$$

ہو گا لہٰذا دو متغیرات کے خواص (جن کا ہم ذکر کر چکے ہیں)، تین متغیرات کے تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔ کسی بھی نقطہ پر ∇f رخ تفاعل تیز ترین بڑھتا ہے اور $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے، جبکہ ∇f کے عمودی کسی بھی رخ، تفرق صفر ہو گا۔

مثال 13.44: (ا) نقطہ $(N_0(1,1,0))$ پر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ رخ $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ کا تفرق تلاش کریں۔ (ب) نقطہ N_0 پر f کس رخ تیز ترین بڑھتا ہے؟ اس رخ شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

حل: (ا) سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے اس کے رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر جزوی تفرقات

$$f_x = 3x^2 - y^2\Big|_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy\big|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1\big|_{(1,1,0)} = -1$$

ہوں گے لہٰذا N_0 پر f کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla f\big|_{(1,1,0)} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{A}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_{\boldsymbol{u}} f\big|_{(1,1,0)} = \nabla f\big|_{(1,1,0)} \cdot \boldsymbol{u} = (2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)$$
$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$$

(ب) تفاعل تیز ترین $\nabla f = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ رخ بڑھتا ہے اور $-\nabla f = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے۔ ان رخ تبدیلی کی شرح بالترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} \left|\nabla f\right| &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ -\left|\nabla f\right| &= -3 \end{aligned}$$

□

مماسی مستوی اور عمودی خطوط کی مساواتیں

اگر قابل تفرق تفاعل f کی ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ پر $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ ایک ہموار منحنی ہو تب $f(g(t), h(t), k(t)) = 0$ ہو گا۔ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل دیگا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t), h(t), k(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} = 0 \tag{13.47}$$

منحنی کے ساتھ ساتھ ہر نقطہ پر ∇f ، منحنی کی سمتیہ رفتار کو عمودی ہو گا۔

آئیں اب نقطہ N_0 سے گزرتی منحنی تک اپنے آپ کو محدود رکھتے ہیں (شکل 13.49)۔نقطہ N_0 پر تمام سمتیات رفتار، N_0 پر ∇f کو عمودی ہوں گے لہٰذا منحنی کے تمام مماسی خط اس مستوی میں پائے جائیں گے جو N_0 پر ∇f کو عمودی ہو۔ اس مستوی کو ہم N_0 پر سطح کا مماسی مستوی کہتے ہیں۔ نقطہ N_0 سے گزرتا ہوا ایسا خط جو اس مستوی کو عمودی ہو، N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

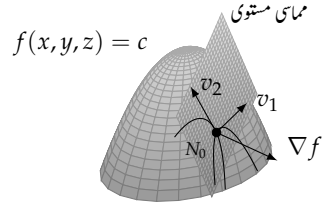
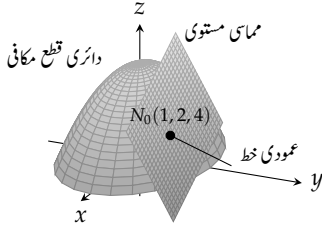
تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا عمودی مستوی، نقطہ N_0 پر ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ کا مماسی مستوی ہو گا۔

نقطہ N_0 پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا متوازی خط، نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

□

یوں حصہ 11.5 کے تحت، مماسی مستوی اور عمودی خط کی بالترتیب مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$f_x(N_0)(x - x_0) + f_y(N_0)(y - y_0) + f_z(N_0)(z - z_0) = 0 \tag{13.48}$$

$$x = x_0 + f_x(N_0)t, \quad y = y_0 + f_y(N_0)t, \quad z = z_0 + f_z(N_0)t \tag{13.49}$$

شکل 13.49: نقطہ N_0 سے گزرتی ہوئی سطح میں ہر ہموار منحنی کا سمتیہ رفتار ∇f کو عمودی ہو گا۔یوں N_0 پر سمتیات رفتار ایک مشترک مستوی میں پائے جائیں گے جس کو ہم مماسی مستوی کہتے ہیں۔

شکل 13.50: نقطہ N_0 پر دائری قطع مکافی سطح کا مماسی مستوی اور عمودی خط (مثال 13.45)۔

مثال 13.45: نقطہ $N_0(1,2,4)$ پر درج ذیل کا مماسی مستوی اور عمودی خط دریافت کریں (شکل 13.50)۔

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0 \qquad \text{دائری قطع مکافی}$$

حل: نقطہ N_0 پر f کی ڈھلوان کو عمودی سطح، نقطہ N_0 پر مستوی ہو گا۔ ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{N_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

ہے لہٰذا مستوی درج ذیل ہو گا۔

$$2x+4y+z=14 \quad \text{یعنی} \quad 2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0$$

نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x=1+2t, \quad y=2+4t, \quad z=4+t$$

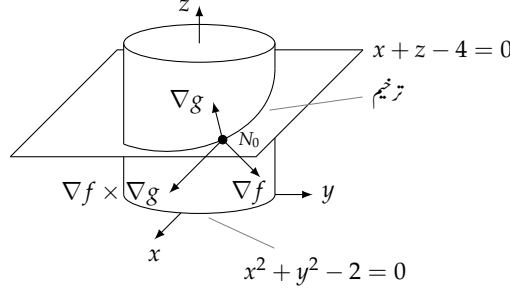
□

مثال 13.46: بیلنی سطح

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

اور مستوی

$$g(x,y,z)=x+z-4=0$$

ایک ترخیم T میں ملتے ہیں (شکل 13.46)۔ نقطہ $N_0(1,1,3)$ پر T کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

شکل 13.51: بیلن $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ اور مستوی $g(x,y,z)=x+z-4=0$ ایک دوسرے کو ترخیم میں قطع کرتے ہیں۔

حل: نقطہ N_0 پر مماسی خط ∇f اور ∇g دونوں کو عمودی لہٰذا $\boldsymbol{v}=\nabla f \times \nabla g$ کو متوازی ہو گا۔ نقطہ N_0 کے محدد اور $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء ہمیں مماسی خط کی مساوات دیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\nabla f_{(1,1,3)} &= (2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j})_{(1,1,3)} = 2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\\
\nabla g_{(1,1,3)} &= (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})_{(1,1,3)} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v} &= (2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

مماسی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x=1+2t,\quad y=1-2t,\quad z=3-2t$$

□

سطح $z=f(x,y)$ کا مماسی مستوی

نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر سطح $z=f(x,y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس نقطہ پر $z_0=f(x_0,y_0)$ ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $z=f(x,y)$ کو $f(x,y)-z=0$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں سطح $z=f(x,y)$

درحقیقت تفاعل $F(x,y,z)=f(x,y)-z$ کا صفر ہم قد مستوی ہو گا۔ تفاعل F کے جزوی تفرقات

$$F_x=\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-z)=f_x-0=f_x$$
$$F_y=\frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-z)=f_y-0=f_y$$
$$F_z=\frac{\partial}{\partial z}(f(x,y)-z)=0-1=-1$$

ہوں گے۔ نقطہ N_0 پر مماسی مستوی کا کلیہ

$$F_x(N_0)(x-x_0)+F_y(N_0)(y-y_0)+F_z(N_0)(z-z_0)=0$$

یوں درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0) \tag{13.50}$$

مثال 13.47: نقطہ $(0,0,0)$ پر سطح $z=x\cos y-ye^x$ کا مماسی مستوی تلاش کریں۔

حل: ہم جزوی تفرقات معلوم کر کے مساوات 13.50 استعمال کریں گے:

$$f_x(0,0)=(\cos y-ye^x)_{(0,0)}=1-0\cdot 1=1$$
$$f_y(0,0)=(-x\sin y-e^x)_{(0,0)}=0-1=-1$$

یوں مماسی مستوی

$$1\cdot(x-0)-1\cdot(y-0)-(z-0)=0 \qquad \text{مساوات } 13.50$$

یعنی درج ذیل ہو گا۔

$$x-y-z=0$$

□

بڑھوتری اور فاصلہ

نقطہ N_0 سے فاصلہ $\mathrm{d}s$ دور قریبی نقطہ منتقلی کے دوران تفاعل f کی قیمت میں تبدیلی جاننے کی خاطر رخی تفرق ایک سادہ تفرق کا کردار ادا کرتا ہے۔ اگر f ایک متغیر کا تفاعل ہوتا تب درج ذیل ہوتا۔

$$\mathrm{d}f=f'(N_0)\,\mathrm{d}s \qquad \text{سادہ تفرق} \times \text{بڑھوتری}$$

دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لئے ہم درج ذیل کلیہ استعمال کریں گے

$$\mathrm{d}f = (\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{d}s \qquad \text{رخی تفرق} \times \text{بڑھوتری}$$

جہاں N_0 سے حرکت کا رخ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔

رخ $\boldsymbol{u}$ میں f کی تبدیلی کا اندازہ

ہم نقطہ N_0 سے رخ $\boldsymbol{u}$ چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}x$ حرکت کرنے سے f کی قیمت میں تبدیلی درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathrm{d}f = \underbrace{(\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u})}_{\text{رخی تفرق}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}s}_{\text{فاصلاتی بڑھوتری}} \tag{13.51}$$

مثال 13.48: نقطہ $N(x,y,z)$ ابتدائی نقطہ $N_0(2,0,0)$ سے 0.1 اکائی دور $N_1(4,1,-4)$ کے رخ منتقل ہوتا ہے۔ درج ذیل تفاعل کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

$$f(x,y,z) = xe^y + yz$$

حل: ہم N_0 پر سمتیہ

$$\overrightarrow{N_0N_1} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

کے رخ f کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔اس سمتیہ کا رخ

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{N_0N_1}}{\left|\overrightarrow{N_0N1}\right|} = \frac{\overrightarrow{N_0N_1}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

ہو گا۔نقطہ N_0 پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(2,0,0)} = (e^y\boldsymbol{i} + (xe^y + z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k})\big|_{(2,0,0)} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

ہو گی لہٰذا

$$\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

ہو گا۔نقطہ N_0 سے $\boldsymbol{u}$ رخ 0.1 اکائی دور منتقلی سے f کی قیمت تقریباً درج ذیل تبدیلی رونما ہو گی۔

$$\mathrm{d}f = (\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u})(\mathrm{d}s) = \left(\frac{4}{3}\right)(0.1) \approx 0.13$$

□

ڈھلوان کے الجبرائی قواعد

اگر ہم دو تفاعل f اور g کی ڈھلوان جانتے ہوں تب ہم ان کے مستقل مضرب، مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، اور حاصل تقسیم کی ڈھلوان بھی جانتے ہیں۔

ڈھلوان کے الجبرائی قواعد

قاعدہ مستقل مضرب $\nabla(kf)=k\nabla f$ جہاں k مستقل ہے

قاعدہ مجموعہ $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

قاعدہ فرق $\nabla(f-g)=\nabla f-\nabla g$

قاعدہ ضرب $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$

قاعدہ حاصل تقسیم $\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$

مثال 13.49: ہم درج ذیل تفاعل لیتے ہوئے ان قواعد کو دکھاتے ہیں۔

$$f(x,y,z)=x-y,\quad g(x,y,z)=z,\quad \nabla f=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad \nabla g=\boldsymbol{k}$$

یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\nabla(2f)&=\nabla(2x-2y)=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}=2\nabla f\\
\nabla(f+g)&=\nabla(x-y+z)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=\nabla f+\nabla g\\
\nabla(f-g)&=\nabla(x-y-z)=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=\nabla f-\nabla g\\
\nabla(fg)&=\nabla(xz-yz)=z\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+(x-y)\boldsymbol{k}=g\nabla f+f\nabla g\\
\nabla\left(\frac{f}{g}\right)&=\nabla\left(\frac{x-y}{z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{k}\\
&=\frac{1}{z}\boldsymbol{i}-\frac{1}{z}\boldsymbol{j}+\frac{z\cdot 0-(x-y)\cdot 1}{z^2}\boldsymbol{k}\\
&=\frac{z\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-(x-y)\boldsymbol{k}}{z^2}=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}
\end{aligned}$$

□

سوالات

نقطہ پر ڈھلوان کا حصول

سوال 13.310 تا سوال 13.313 میں دیے نقطہ پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔اس نقطہ پر ڈھلوان اور اس نقطہ سے گزرتی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

سوال 13.310: $f(x,y) = y - x, \quad (2,1)$

سوال 13.311: $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1,1)$

سوال 13.312: $g(x,y) = y - x^2, \quad (-1,0)$

سوال 13.313: $g(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \quad (\sqrt{2},1)$

سوال 13.314 تا سوال 13.317 میں دیے نقطہ پر ∇f تلاش کریں۔

سوال 13.314: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln x, \quad (1,1,1)$

سوال 13.315: $f(x,y,z) = 2z^3 - 3(x^2+y^2)z + \tan^{-1} xz, \quad (1,1,1)$

سوال 13.316: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \ln(xyz), \quad (-1,2,-2)$

سوال 13.317: $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\sin^{-1} x, \quad (0,0,\pi/6)$

مستوی xy میں رخی تفرق کی تلاش

سوال 13.318 تا سوال 13.325 میں N_0 پر $\boldsymbol{A}$ کے رخ تفاعل کا رخی تفرق دریافت کریں۔

سوال 13.318: $f(x,y) = 2xy - 3y^2, \quad N_0(5,5), \quad \boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال 13.319: $f(x,y) = 2x^2 + y^2, \quad N_0(-1,1), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$

سوال 13.320: $g(x,y) = x - \frac{y^2}{x} + \sqrt{3}\sec^{-1}(2xy), \quad N_0(1,1), \quad \boldsymbol{A} = 12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

سوال 13.321: $h(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x} + \sqrt{3}\sin^{-1}\frac{xy}{2}, \quad N_0(1,1), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

سوال 13.322: $f(x,y,z) = xy + yz + zx, \quad N_0(1,-1,2), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

سوال 13.323: $f(x,y,z)=x^2+2y^2-3z^2, \quad N_0(1,1,1), \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال 13.324: $g(x,y,z)=3e^x\cos yz, \quad N_0(0,0,0), \quad \boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

سوال 13.325: $h(x,y,z)=\cos xy+e^{yz}+\ln zx, \quad N_0(1,0,1/2), \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

تیز بڑھنے اور گھٹنے کے رخ

سوال 13.326 تا سوال 13.331 میں نقطہ N_0 پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل کے بڑھنے اور گھٹنے کی تبدیلی تیز ترین ہو۔ ان رخ تفاعل کے تفرق دریافت کریں۔

سوال 13.326: $f(x,y)=x^2+xy+y^2, \quad N_0(-1,1)$

سوال 13.327: $f(x,y)=x^2y+e^{xy}\sin y, \quad N_0(1,0)$

سوال 13.328: $f(x,y,z)=\frac{x}{y}-yz, \quad N_0(4,1,1)$

سوال 13.329: $g(x,y,z)=xe^y+z^2, \quad N_0(1,\ln 2,1/2)$

سوال 13.330: $f(x,y,z)=\ln xy+\ln yz+\ln xz, \quad N_0(1,1,1)$

سوال 13.331: $h(x,y,z)=\ln(x^2+y^2-1)+y+6z, \quad N_0(1,1,0)$

تبدیلی کا اندازہ

سوال 13.332: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(3,4,12)$ سے $3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ رخ $\mathrm{d}s=0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال 13.333: نقطہ $N(x,y,z)$ کو مبدا سے $2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ رخ $\mathrm{d}s=0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $f(x,y,z)=e^x\cos yz$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال 13.334: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(2,-1,0)$ سے $N_1(0,1,2)$ جانب $\mathrm{d}s=0.2$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $g(x,y,z)=x+x\cos z-y\sin z+y$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال 13.335: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(-1,-1,-1)$ سے مبدا کے رخ $\mathrm{d}s=0.1$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $h(x,y,z)=\cos(\pi xy)+xz^2$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سطح کا مماسی مستوی اور عمودی خط

سوال 13.336 تا سوال 13.343 میں نقطہ N_0 پر دیے گئے سطح کا (ا) مماسی مستوی اور (ب) عمودی خط تلاش کریں۔

سوال 13.336: $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad N_0(1,1,1)$

سوال 13.337: $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad N_0(3,5,-4)$

سوال 13.338: $2z - x^2 = 0, \quad N_0(2,0,2)$

سوال 13.339: $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7, \quad N_0(1,-1,3)$

سوال 13.340: $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad N_0(0,1,2)$

سوال 13.341: $x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad N_0(1,1,-1)$

سوال 13.342: $x + y + z = 1, \quad N_0(0,1,0)$

سوال 13.343: $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4, \quad N_0(2,-3,18)$

سوال 13.344 تا سوال 13.347 میں دیے گئے نقطہ پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال 13.344: $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (1,0,0)$

سوال 13.345: $z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (0,0,1)$

سوال 13.346: $z = \sqrt{y - x}, \quad (1,2,1)$

سوال 13.347: $z = 4x^2 + y^2, \quad (1,1,5)$

منحنیات کے مماسی خط

سوال 13.348 تا سوال 13.351 میں منحنی $f(c,y) = c$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی دیے گئے نقطہ پر ∇f اور مماسی خط ترسیم کریں۔

سوال 13.348: $x^2 + y^2 = 4, \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال 13.349: $x^2 - y = 1, \quad (\sqrt{2}, 1)$

سوال 13.350: $xy = -4, \quad (2, -2)$

سوال 13.351: $x^2 - xy + y^2 = 7, \quad (-1, 2)$ (یہ مثال 3.50 کی منحنی ہے۔)

سوال 13.352 تا سوال 13.357 میں دیے نقطہ پر سطحوں کی متقاطع منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات

سوال 13.352: $x + y^2 + 2z = 4, \quad x = 1; \quad (1, 1, 1)$

سوال 13.353: $xyz = 1, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6; \quad (1, 1, 1)$

سوال 13.354: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1; \quad (1, 1, 1/2)$

سوال 13.355: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1; \quad (1/2, 1, 1/2)$

سوال 13.356: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 11; \quad (1, 1, 3)$

سوال 13.357: $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - z = 0; \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

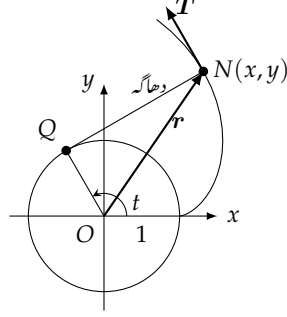
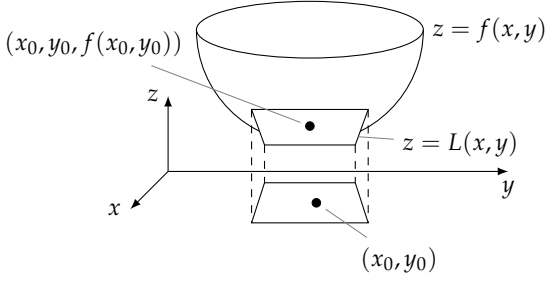
نظریہ اور مثالیں

سوال 13.358: نقطہ $N(3, 2)$ پر کس رخ $f(x, y) = xy + y^2$ کا تفرق صفر ہو گا؟

سوال 13.359: نقطہ $N(1, 1)$ پر کن دو رخ تفاعل $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ کے تفرقات صفر ہوں گے؟

سوال 13.360: کیا $N(1, 2)$ پر ایسا کوئی رخ $\boldsymbol{A}$ ہے جس رخ $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ کا تفرق 14 کے برابر ہو؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.361: کیا کسی رخ $\boldsymbol{A}$، نقطہ $N(1, -1, 1)$ پر درجہ حرارت $T(x, y, z) = 2xy - yz$ کی شرح تبدیلی $-3\,^{\circ}\mathrm{C\,m^{-1}}$ ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.362: نقطہ $N_0(1, 2)$ پر $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ رخ $f(x, y)$ کا تفرق $2\sqrt{2}$ اور $-2\boldsymbol{j}$ رخ -3 ہے۔ سمتیہ $-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ رخ f کا تفرق کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

شکل 13.53: تفاعل $z = f(x, y)$ اور نقطہ (x_0, y_0) پر اس کی خط بندی $z = L(x, y)$ کی ترسیم۔ خط بند مستوی L، نقطہ (x_0, y_0) کے سیدھا اوپر بلندی پر سطح $z = f(x, y)$ کو مماسی ہو گا۔ یوں آپ جیومیٹریائی طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ (x_0, y_0) کی پڑوس میں f اور L کی قیمتیں یکساں ہوں گی۔

شکل 13.52: دائرے کا درپیچیدہ (سوال 13.365)

سوال 13.363: کسی نقطہ پر $f(x, y, z)$ کے تفرق کی قیمت $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ رخ زیادہ سے زیادہ ہے۔ اس رخ تفرق کی قیمت $2\sqrt{3}$ ہے۔ (ا) اس نقطہ پر ∇f کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) سمتیہ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے رخ اس نقطہ پر f کا تفرق کیا ہو گا؟

سوال 13.364: دائرہ پر درجہ حرارت کی تبدیلی
فرض کریں مستوی xy میں نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T(x, y) = x \sin 2y$ ہے۔ ایک ذرہ ایک میٹر رداس کے دائرہ پر گھڑی کے رخ $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ا) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟

سوال 13.365: دائرہ کے درپیچیدہ پر تبدیلی
درج ذیل منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ کے رخ تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا تفرق تلاش کریں (شکل 13.52)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t \cos t)\boldsymbol{j},\; t > 0$$

سوال 13.366: پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ تبدیلی
نقاط $t = -\pi/4, 0, \pi/4$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کے اکائی مماسی سمتیات کے رخ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کے تفرقات تلاش کریں۔ یہ تفاعل مبدا سے پیچدار منحنی کے نقطہ $N(x, y, z)$ کے فاصلہ کا مربع دیتا ہے۔ اس منحنی پر چلتے ہوئے تفرق t کے لحاظ سے فاصلے کے مربع کی شرح تبدیلی دے گا۔

سوال 13.367: فضا میں درجہ حرارت $T(x,y,z) = 2x^2 - xyz$ ہے۔ ایک متحرک ذرے کا مقام لمحہ t پر $x = 2t^2$ ، $y = 3t$ ، $z = -t^2$ ہے، جہاں وقت کی اکائی سیکنڈ اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہے۔ (ا) نقطہ $N(8,6,-4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(8,6,-4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟

سوال 13.368: دکھائیں کہ مستوی xy میں نقطہ (x_0, y_0) پر سمتیہ $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ کے عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

سوال 13.369: عمودی منحنیات اور مماسی منحنیات
ایک منحنی اس صورت ایک سطح $f(x,y,z) = c$ کو نقطہ تقاطع پر عمودی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کا مستقل مضرب ہو۔ نقطہ تقاطع پر ایک منحنی اس صورت سطح f کی مماسی منحنی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کو عمودی ہو۔ (ا) دکھائیں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} - \frac{1}{4}(t+3)\boldsymbol{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 3$ کو عمودی ہے۔
(ب) دکھائیں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} + (2t-1)\boldsymbol{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 1$ کو مماسی ہے۔

سوال 13.370: ہم قد منحنیات اور ڈھلوان ایک دوسرے کے عمودی کیوں ہوتے ہیں۔ دوسرا نقطہ نظر۔
فرض کریں t کی تمام قیمتوں کے لئے قابل تفرق منحنی $x = g(t),\, y = h(t)$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت مستقل c ہو۔ مساوات $f(g(t),h(t)) = c$ کے دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق لے کر دکھائیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس اور ∇f آپس میں عمودی ہیں۔

سوال 13.371: تفاعل $f(x,y)$ کی خط بندی، مماسی مستوی تخمین ہو گی۔
دکھائیں کہ نقطہ $N_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ پر سطح $z = f(x,y)$ کا مماسی مستوی درج ذیل ہو گا جہاں f قابل تفرق ہے۔

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

یعنی

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

یوں N_0 پر مماسی مستوی نقطہ N_0 پر f کی خط بندی کی ترسیم ہو گی (شکل 13.53)۔

سوال 13.372: رخی تفرقات اور غیر سمتی اجزاء
نقطہ N_0 پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کے تفرقات کا $\boldsymbol{u}$ کے رخ $(\nabla f)_{N_0}$ کے غیر سمتی اجزاء کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.373: رخی تفرقات اور جزوی تفرقات
فرض کریں کہ $f(x,y,z)$ کے مطلوبہ تفرقات موجود ہیں۔ تفرقات $D_{\boldsymbol{i}}f$ ، $D_{\boldsymbol{j}}f$ اور $D_{\boldsymbol{k}}f$ کا تفرقات f_x ، f_y اور f_z کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.374: الجبرائی قواعد برائے ڈھلوان
مستقل k اور ڈھلوان $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ اور $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}$ دیے گئے ہیں۔ غیر سمتی مساوات

$$\frac{\partial}{\partial x}(kf) = k\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(f \mp g) = \frac{\partial f}{\partial x} \mp \frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2},$$

وغیرہ، استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قواعد کی تصدیق کریں۔

ا. $\nabla(kf) = k\nabla f$ جہاں k مستقل ہے

ب. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

ج. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$

د. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

ھ. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

13.8 انتہائی قیمتیں اور نقاط زین

مستوی xy میں محدود بند خطہ میں استمراری تفاعل کی اس دائرہ کار میں مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں پائی جائیں گی (شکل 13.54 اور شکل 13.55)۔ ان قیمتوں کا جاننا اور ان نقطوں کا جاننا، جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں، ضروری ہے۔ہم جزوی تفرقات سے عموماً انہیں جان سکتے ہیں۔

شکل 13.54: چکور خطہ $|x| \le \frac{3\pi}{2}, |y| \le \frac{3\pi}{2}$ پر تفاعل $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت 1 اور کم سے کم قیمت تقریباً -0.067 ہے۔

شکل 13.55: چکور خطہ $|x| \le a, |y| \le a$ پر "تفاعل چھت" $z = \frac{1}{2}(||x| - |y|| - |x| - |y|)$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت 0 اور کم سے کم قیمت $-a$ ہے۔

تفرقی پرکھ

واحد متغیری تفاعل کا مقامی انتہائی نقطہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماس افقی ہو۔ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ دو متغیری تفاعل $z = f(x, y)$ کے لئے ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماسی مستوی افقی ہو۔ ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت، مطلق کم سے کم قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ (نقطہ زین پر مزید بات جلد کی جائے گی۔)

تعریفات: فرض کریں خطہ R، جس میں نقطہ (a, b) پایا جاتا ہو، میں تفاعل $f(x, y)$ معین ہے۔ تب

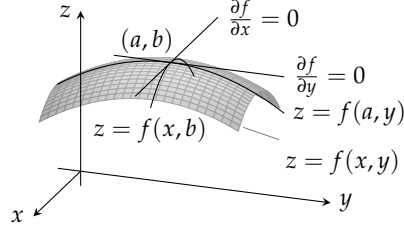
1. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a, b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x, y) پر $f(a, b) \ge f(x, y)$ ہو تب $f(a, b)$ تفاعل f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ ہو گا۔

2. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a, b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x, y) پر $f(a, b) \le f(x, y)$ ہو تب $f(a, b)$ تفاعل f کا مقامی کم سے کم قیمت نقطہ ہو گا۔

□

مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ کو سطح $z = f(x, y)$ پر پہاڑی جبکہ مقامی کم سے کم نقطہ کو وادی میں گھاٹی تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسے نقطوں پر مماسی مستوی افقی ہوں گے، بشرطیکہ یہ موجود ہوں۔

واحد متغیر تفاعل کی طرح، مقامی انتہا کی تلاش ایک رتبی تفرقی پرکھ پر منحصر ہو گا۔

مسئلہ 13.7: **مقامی انتہائی قیمت کا یک رتبی تفرقی پرکھ** اگر تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ (a, b) پر مقامی زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو، اور اگر تفاعل کے یک رتبی تفرقات موجود ہوں، تب $f_x(a, b) = 0$ اور $f_y(a, b) = 0$ ہوں گے۔

شکل 13.56: تفاعل f کی زیادہ سے زیادہ قیمت $x=a$ ، $y=b$ پر ہے۔

ثبوت: فرض کریں تفاعل f کی دائرہ کار کے ایک اندرونی نقطہ (a,b) پر تفاعل کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے۔ تب

1. مستوی $y=b$ سطح $z=f(x,y)$ کو جس منحنی $z=f(x,b)$ میں قطع کرتا ہے، نقطہ $x=a$ اس منحنی کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہو گا (شکل 13.56)۔
2. نقطہ $x=a$ پر تفاعل $z=f(x,b)$ متغیر x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو گا (اور یہ تفرق $f_x(a,b)$ ہو گا)۔
3. نقطہ $x=a$ پر تفاعل $z=f(x,b)$ کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔
4. یوں $x=a$ پر $z=f(x,b)$ کا تفرق صفر ہو گا (مسئلہ 4.2)۔ چونکہ یہ تفرق $f_x(a,b)$ ہے لہٰذا $f_x(a,b)=0$ ہو گا۔ نقطہ $x=a$ منحنی $z=f(x,b)$ کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہو گا۔

تفاعل $z=f(a,y)$ لیتے ہوئے اسی طرح کی دلیل سے $f_y(a,b)=0$ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

یوں مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت کے لئے مسئلے کا ثابت مکمل ہوتا ہے۔ مقامی کم سے کم قیمت کے لئے مسئلے کا ثبوت آپ سے سوالات میں مانگا گیا ہے۔

□

انقطہ (a,b) پر سطح $z=f(x,y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0$$

میں $f_x(a,b)=0$ اور $f_y(a,b)=0$ پر کرنے سے

$$0\cdot(x-a)+0\cdot(y-b)-z+f(a,b)=0$$

یعنی

$$z = f(a, b)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح مسئلہ 13.7 کہتا ہے کہ مقامی انتہا پر یقیناً افقی مماسی مستوی ہو گا، بشرطیکہ اس نقطہ پر مماسی مستوی موجود ہو۔

واحد متغیر تفاعل کی صورت کی طرح، مسئلہ 13.7 کہتا ہے کہ تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمت صرف اور صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جا سکتی ہے:

1. اندرونی نقاط جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو،
2. اندرونی نقاط جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،
3. تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقاط۔

تعریف: تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار کا وہ اندرونی نقطہ جہاں f_x اور f_y دونوں صفر ہوں یا جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں، f کا **نقطہ فاصل**[42] ہو گا۔

□

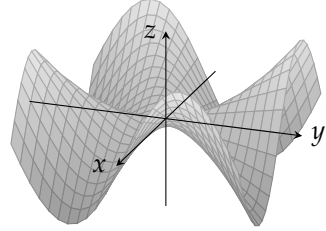
اس طرح تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتیں صرف نقاط فاصل اور سرحدی نقاط پر پائی جائیں گی۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل پر مقامی انتہا ہو۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ تصریف ممکن ہے۔ دو متغیرات کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ زین ممکن ہو گا۔

تعریف: نقطہ فاصل (a, b) پر اس صورت قابل تفرق تفاعل $f(x, y)$ کا **نقطہ زین**[43] پایا جائے گا جب ہر کھلے قرص میں، جس کا مرکز (a, b) ہو، ایسے دائرہ کاری نقاط (x, y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x, y) > f(a, b)$ ہو، اور ایسے دائرہ کاری نقاط (x, y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x, y) < f(a, b)$ ہو۔ سطح $z = f(x, y)$ پر مطابقتی نقطہ $(a, b, f(a, b))$ اس سطح کا نقطہ زین کہلاتا ہے (شکل 13.59)۔

□

مثال 13.50: تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

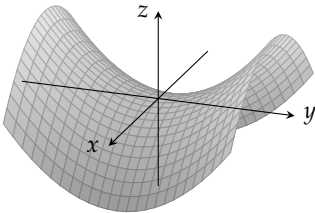
حل: پورا مستوی xy تفاعل f کا دائرہ کار ہے (لہٰذا کوئی سرحدی نقاط نہیں پائے جاتے ہیں) اور جزوی تفرقات $f_x = 2x$ اور $f_y = 2y$ ہر نقطہ پر موجود ہوں گے۔ یوں مقامی انتہائی قیمتیں صرف اس صورت ممکن ہوں گی جب

$$f_x = 2x = 0 \quad \text{اور} \quad f_y = 2y = 0$$

شکل 13.57: $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

شکل 13.58: $z = y^2 - y^4 - x^2$

شکل 13.59: مبدا پر نقاط زین۔

$z = x^2 + y^2$

شکل 13.60: تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کی ترسیم قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس تفاعل کا ایک فاصل نقطہ پایا جاتا ہے، جو مبدا پر ہے اور جس پر مقامی کم سے کم قیمت 0 پائی جاتی ہے۔

شکل 13.61: مبدا اس تفاعل کا نقطہ زین ہے۔ اس تفاعل کے کوئی بھی مقامی انتہائی قیمتیں موجود نہیں ہیں۔

ہوں۔ایسا صرف مبدا پر ممکن ہے جہاں f کی قیمت 0 ہے۔ چونکہ f کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا مبدا پر تفاعل کی کم سے کم قیمت پائی جائے گی (شکل 13.60)۔ □

مثال 13.51: تفاعل $f(x,y) = y^2 - x^2$ کی انتہائی قیمتیں، اگر موجود ہوں، تلاش کریں۔

حل: پورا مستوی xy تفاعل f کا دائرہ کار ہے (لہٰذا کوئی سرحدی نقاط نہیں پائے جاتے ہیں) اور جزوی تفرقات $f_x = -2x$ اور $f_y = 2y$ ہر نقطہ پر موجود ہوں گے۔یوں مقامی انتہا قیمت صرف مبدا پر ممکن ہے۔ البتہ، مثبت x محور پر f کی قیمت $f(x,0) = -x^2 < 0$ اور مثبت y محور پر اس کی قیمت $f(0,y) = y^2 > 0$ ہو گی۔ یوں مستوی xy میں ہر کھلا قرص، جس کا مرکز $(0,0)$ ہو، میں ایسا نقاط پائے جاتے ہیں جہاں f مثبت ہو اور ایسے نقاط بھی پائے جاتے ہیں جہاں f منفی ہو۔ اس طرح مبدا پر مقامی انتہائی قیمت کی بجائے تفاعل کا نقطہ زین پایا جاتا ہے (شکل 13.61)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل کی کوئی مقامی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ □

ہم دائرہ کار R کے اندرونی نقطہ (a,b) پر $f_x = f_y = 0$ جانتے ہوئے یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ آیا اس نقطہ پر انتہائی قیمت پائی جاتی ہے۔ البتہ اگر R پر f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں تب ہم باقی معلومات درج ذیل مسئلہ (جسے حصہ 13.10 میں ثابت کیا گیا ہے) سے دریافت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ 13.8: **مقامی انتہائی قیمت کا دو رتبی تفرقی پرکھ**
فرض کریں کہ ایک قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہے، تفاعل f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات ہر نقطہ پر استمراری ہیں اور $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ہے۔ اب

1. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب (a,b) پر f کی **مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت**[44] پائی جائے گی۔

2. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب (a,b) پر f کی **مقامی کم سے کم قیمت**[45] پائی جائے گی۔

3. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہو تب (a,b) پر f کا **نقطہ زین**[46] پایا جائے گا۔

4. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ہو تب یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا اور ہمیں (a,b) پر f کا رویہ کسی دوسرے طریقہ سے جاننا ہو گا۔

---

critical point[42]
saddle point[43]
local maximum[44]
local minimum[45]
saddle point[46]

ہم $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ کو f کا **ممیز**[47] کہتے ہیں جس کو درج ذیل مقطع کی صورت میں یاد رکھنا زیادہ آسان ہے۔

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

مسئلہ 13.8 کہتا ہے کہ (a, b) پر مثبت ممیز کی صورت میں سطح تمام اطراف ایک ہی رخ مڑتا ہے: $f_{xx} < 0$ کی صورت میں یہ نیچے کو مڑتا ہے جس کی بنا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہے، اور $f_{xx} > 0$ کی صورت میں سطح اوپر کو مڑتا ہے جس کی بنا اس نقطہ پر کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔اس کے برعکس (a, b) پر منفی ممیز کی صورت میں سطح بعض اطراف اوپر اور بعض اطراف نیچے مڑتا ہے جس کی بنا (a, b) پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

مثال 13.52: درج ذیل تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

حل: یہ تفاعل تمام x اور y پر معین اور قابل تفرق ہے اور اس کے دائرہ کار کا کوئی سرحدی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔یوں اس تفاعل کے انتہائی نقاط صرف وہاں ممکن ہوں گے جہاں f_x اور f_y دونوں بیک وقت صفر ہوں۔ اس سے

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

یعنی

$$x = y = -2$$

ملتا ہے۔یوں $(-2, -2)$ وہ واحد نقطہ ہے جہاں f کی انتہائی قیمت ممکن ہے۔یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا ہے، ہمیں درج ذیل معلوم کرنا ہو گا۔

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad fxy = 1$$

نقطہ $(a, b) = (-2, -2)$ پر f کا ممیز

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 - 3$$

ہو گا۔یوں

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{اور} \quad f_{xx} < 0$$

---

[47] descriminant

کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(-2, -2)$ پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت ہو گی جو $f(-2,-2) = 8$ کے برابر ہو گی۔ □

مثال 13.53: تفاعل $f(x, y) = xy$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

حل: چونکہ f ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے (شکل 13.62) لہٰذا اس کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقطوں پر پائی جائیں گی جہاں

$$f_x = y = 0 \quad \text{اور} \quad f_y = x = 0$$

ہوں۔یوں مبدا وہ واحد نقطہ ہے جہاں تفاعل کی انتہائی قیمت ممکن ہے۔ اس نقطہ پر تفاعل کا رویہ جاننے کی خاطر ہم درج ذیل معلوم کرتے ہیں۔

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1$$

یوں ممیز

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

منفی ہے لہٰذا $(0, 0)$ پر نقطہ زین پایا جائے گا۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $f(x, y) = xy$ کی کوئی مقامی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ □

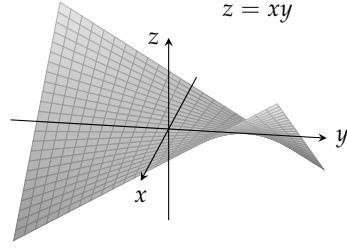
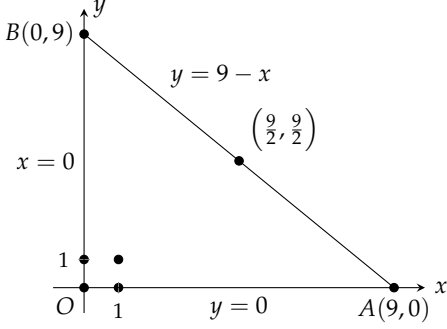
بند اور محدود خطہ میں مطلق زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم نقاط

ہم بند اور محدود خطہ R میں تفاعل $f(x, y)$ کی مطلق انتہائی قیمتوں کی تلاش تین قدموں میں کرتے ہیں۔

قدم 1: خطہ R کی ان اندرونی نقاط کے سلسلہ پر f کی قیمتیں تلاش کریں جہاں f کے مقامی انتہائی قیمت متوقع ہو۔ یہ وہ نقطے ہوں گے جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو یا جہاں f_x اور f_y دونوں یا ان میں سے ایک غیر موجود ہو (جو f کا نقطہ زین ہو گا)۔

قدم 2: خطہ R کی ان سرحدی نقاط کے سلسلہ پر f کی قیمتیں تلاش کریں جہاں f کی مقامی انتہائی قیمتیں متوقع ہوں۔اس قدم کی تفصیل جلد فراہم کی جائے گی۔

قدم 3: نقطوں کے دونوں سلسلوں پر f کی قیمتوں کو دیکھ کر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں معلوم کریں۔ یہ قیمتیں R پر f کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمتیں ہوں گی۔ چونکہ مطلق انتہائی قیمتیں مقامی انتہائی قیمتیں بھی ہوتی ہیں لہٰذا مطلق انتہائی قیمتیں پہلے دو قدموں میں کہیں نا کہیں پائی جائیں گی۔

شکل 13.63: تکونی خطہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش (مثال 13.54)۔

شکل 13.62: مبدا پر $z = xy$ کا نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

مثال 13.54: ربع اول میں $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y = 9 - x$ لکیروں کے بیچ تکونی خطہ میں درج ذیل تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ اور مطلق کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

حل: چونکہ f قابل تفرق ہے لہٰذا مطلق انتہائی قیمتیں صرف تکونی خطہ کی سرحدی نقاط پر یا خطہ کے اندر وہاں ممکن ہوں گی جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو (شکل 13.63)۔

اندرونی نقاط: ان کے لئے

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

سے $(x,y) = (1,1)$ حاصل ہوتا ہے جہاں $f(1,1) = 4$ ہو گا۔ سرحدی نقاط: ہم ایک وقت میں تکون کا یک ضلع لیتے ہیں۔

1. قطع OA پر $y = 0$ لہٰذا تفاعل

$$f(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

ہو گا جس کو اب ہم واحد متغیر x کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں اور جس کا دائرہ کار $0 \leq x \leq 9$ ہو گا۔ جیسا ہم باب 4 سے جانتے ہیں، اس کی انتہائی قیمتیں آخری سروں پر

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\text{جہاں} \quad f(0,0) = 2 \\ x = 9 \quad &\text{جہاں} \quad f(9,0) = 2 + 18 - 81 = -61 \end{aligned}$$

اور اندرونی نقاط پر جہاں $f'(x,0) = 2 - 2x = 0$ ہو۔ وہ واحد اندرونی نقطہ جہاں $f'(x,0) = 0$ ہو $x = 1$ ہے جہاں $f(x,0) = f(1,0) = 3$ ہے۔

2. قطع OB پر $x=0$ للذا

$$f(x,y)=f(0,y)=2+2y-y^2$$

ہو گا۔ ہم x اور y میں f کی تشاکلی سے، مذکورہ بالا کی بنا، توقع کرتے ہیں کہ یہ نقاط درج ذیل ہوں گے۔

$$f(0,0)=2,\quad f(0,9)=-61,\quad f(0,1)=3$$

3. ہم AB کے آخری سروں پر f کی قیمت پر غور کر چکے ہیں للذا ہمیں صرف AB کی اندرونی نقطوں پر غور کرنا ہو گا۔ اب $y=9-x$ لیتے ہوئے

$$f(x,y)=2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2=-61+18x-2x^2$$

ہو گا۔یوں $f'(x,9-x)=18-4x=0$ سے $x=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$ حاصل ہو گا جس پر

$$y=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2} \quad \text{اور} \quad f(x,y)=f(\frac{9}{2},\frac{9}{2}=-\frac{41}{2})$$

ہوں گے۔

خلاصہ: ہم تمام متوقع قیمتوں کے سلسلہ $4,2,-61,3,-\frac{41}{2}$ کو دیکھ کر زیادہ سے زیادہ قیمت 4 معلوم کرتے ہیں جو نقطہ $(1,1)$ پر پائی جاتی ہے۔ اسی طرح کم سے کم قیمت -61 نقاط (0.9) اور $(9,0)$ پر پائی جاتی ہے۔ □

13.8.1 نتیجہ

اگرچہ مسئلہ 13.8 طاقتور ہے لیکن اس کی کمزوری کو نہ بھولیں۔ یہ تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقطوں پر کارآمد نہیں ہوتا ہے جہاں تفاعل کے انتہائی قیمتیں اور غیر صفر تفرقات پائے جا سکتے ہیں۔ ساتھ ہی اگر f_x یا f_y غیر موجود ہو تب بھی یہ مسئلہ کارآمد نہیں ہو گا۔

زیادہ سے زیادہ، کم سے کم پرکھ کا خلاصہ

تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمتیں صرف درج ذیل نقطوں پر ممکن ہیں۔

1. تفاعل f کے **سرحدی نقاط**،

2. نقاط فاصل (اندرونی نقاط جہاں $f_x=f_y=0$ ہو یا f_x اور یا f_y غیر موجود ہو)

اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہو، ہر نقطہ پر f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں اور $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ہو، آپ $f(a,b)$ کی جماعت بندی **دو رتبی تفرقی پرکھ** سے کر پائیں گے:

1. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب **مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت** پائی جائے گی۔

2. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب **مقامی کم سے کم قیمت** پائی جائے گی۔

3. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ہو تب **نقطہ زین** پایا جائے گا۔

4. اگر (a,b) پر $f_{xx}fyy - f_{xy}^2 = 0$ ہو پرکھ **غیر فیصلہ کن** ہو گا۔

سوالات

مقامی انتہا کی تلاش

سوال 13.375 تا سوال 13.404 میں تفاعل کے تمام مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقاط، مقامی کم سے کم قیمت نقاط اور نقاط زین تلاش کریں۔

سوال 13.375: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

سوال 13.376: $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

سوال 13.377: $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

سوال 13.378: $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

سوال 13.379: $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

سوال 13.380: $f(x,y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

سوال 13.381: $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

سوال 13.382: $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

سوال 13.383: $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

سوال 13.384: $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

سوال 13.385: $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

سوال 13.386: $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$

سوال 13.387: $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

سوال 13.388: $f(x,y)=x^2-2xy+2y^2-2x+2y+1$

سوال 13.389: $f(x,y)=x^2+2xy$

سوال 13.390: $f(x,y)=3+2x+2y-2x^2-2xy-y^2$

سوال 13.391: $f(x,y)=x^3-y^3-2xy+6$

سوال 13.392: $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$

سوال 13.393: $f(x,y)=6x^2-2x^3+3y^2+6xy$

سوال 13.394: $f(x,y)=3y^2-2y^3-3x^2+6xy$

سوال 13.395: $f(x,y)=9x^3+\frac{y^3}{3}-4xy$

سوال 13.396: $f(x,y)=8x^3+y^3+6xy$

سوال 13.397: $f(x,y)=x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$

سوال 13.398: $f(x,y)=2x^3+2y^3-9x^2+3y^2-12y$

سوال 13.399: $f(x,y)=4xy-x^4-y^4$

سوال 13.400: $f(x,y)=x^4+y^4+4xy$

سوال 13.401: $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$

سوال 13.402: $f(x,y)=\frac{1}{x}+xy+\frac{1}{y}$

سوال 13.403: $f(x,y)=y\sin x$

سوال 13.404: $f(x,y)=e^{2x}\cos y$

مطلق انتہا کی تلاش

سوال 13.405 تا سوال 13.412 میں تفاعل کی مطلق انتہا دیے گئے خطہ میں تلاش کریں۔

سوال 13.405: تفاعل $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے سرحد $x=0$ ، $y=2$ اور $y=2x$ ہیں۔

سوال 13.406: تفاعل $f(x,y)=x^2-xy+y^2+1$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے اطراف $x=0$ ، $y=4$ اور $y=x$ ہیں۔

سوال 13.407: تفاعل $f(x,y)=x^2+y^2$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے اطراف $x=0$ ، $y=0$ اور $y+2x=2$ ہیں۔

سوال 13.408: تفاعل $T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x$ ؛ مستطیل پٹی $0\leq x\leq 5,\ -3\leq y\leq 3$ پر۔

سوال 13.409: تفاعل $T(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2$ ؛ مستطیل $0\leq x\leq 5,\ -3\leq y\leq 0$ پر۔

سوال 13.410: تفاعل $f(x,y)=48xy-32x^3-24y^2$; مستطیل $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$ پر۔

سوال 13.411: تفاعل $f(x,y)=(4x-x^2)\cos y$; مستطیل $1\leq x\leq 3,\ -\frac{\pi}{4}\leq y\leq \frac{\pi}{4}$ پر۔

سوال 13.412: تفاعل $f(x,y)=4x-8xy+2y+1$ ، اضلاع $x=0$ ، $y=0$ اور $x+y=1$ میں بند تکونی خطہ میں۔

سوال 13.413: دو ایسے اعداد a اور b ، جہاں $a\leq b$ ہو، تلاش کریں تا کہ درج ذیل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

$$\int_a^b (6-x-x^2)\,\mathrm{d}x$$

سوال 13.414: دو ایسے اعداد a اور b ، جہاں $a\leq b$ ہو، تلاش کریں تا کہ درج ذیل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو۔

$$\int_a^b (24-2x-x^2)^{1/3}\,\mathrm{d}x$$

سوال 13.415: درجہ حرارت
ایک دائری پٹی $x^2+y^2\leq 1$ اور اس کی سرحد $x^2+y^2=1$ کو یوں گرم کیا جاتا ہے کہ نقطہ (x,y) پر درجہ حرارت $T(x,y)=x^2+2y^2-x$ ہو۔اس پٹی پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال 13.416: کھلا ربع اول $x>0,\ y>0$ میں $f(x,y)=xy+2x-\ln x^2y$ کا نقطہ فاصل تلاش کریں اور دکھائیں کہ اس نقطہ پر تفاعل کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.417: درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ قیمت نقاط، کم سے کم قیمت نقاط اور نقاط زین، اگر موجود ہوں، تلاش کریں۔

ا. $f_x = 2x - 4y, \quad f_y = 2y - 4x$

ب. $f_x = 2x - 2, \quad f_y = 2y - 4$

ج. $f_x = 9x^2 - 9, \quad f_y = 2y + 4$

ہر جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال 13.418: درج ذیل تفاعل کے لئے مبدا پر ممیز $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ صفر ہے لہٰذا دو رتبی تفرقی پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔ مبدا پر سطح $z = f(x, y)$ کی ذہنی تصویر کشی کرتے ہوئے دریافت کریں کہ مبدا پر زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ، کم سے کم قیمت نقطہ یا نقطہ زین پایا جائے گا۔ ہر جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $f(x, y) = x^2y^2$

ب. $f(x, y) = 1 - x^2y^2$

ج. $f(x, y) = xy^2$

د. $f(x, y) = x^3y^2$

ھ. $f(x, y) = x^3y^3$

و. $f(x, y) = x^4y^4$

سوال 13.419: دکھائیں کہ k کی ہر قیمت کے لئے $(0, 0)$ تفاعل $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ کا نقطہ فاصل ہو گا۔ (اشارہ: دو صورتوں پر غور کریں: $k = 0$ اور $k \neq 0$)

سوال 13.420: مستقل k کی کن قیمتوں کے لئے دو رتبی تفرقی پرکھ ضمانت دیتا ہے کہ $(0, 0)$ پر درج ذیل تفاعل کا (ا) نقطہ زین (ب) مقامی کم سے کم قیمت کا نقطہ پایا جائے گا؟

$$f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$$

مستقل k کی کن قیمتوں کے لئے دو رتبی تفرقی پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.421: (ا) کیا $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ہوتے ہوئے ہر صورت (a, b) پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ یا کم سے کم قیمت نقطہ پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (a, b) ہو، ہر نقطہ پر f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں، اور $f_{xx}(a, b)$ اور $f_{yy}(a, b)$ کی علامتیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب کیا f کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.422: نقطہ (a, b) پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ ہونے کی صورت میں مسئلہ 13.7 کا دیا گیا ثبوت استعمال کرتے ہوئے اس مسئلہ کو (a, b) پر مقامی کم سے کم قیمت نقطہ ہونے کی صورت کے لئے ثابت کریں۔

سوال 13.423: مستوی $x + 2y + 3z = 0$ سے زیادہ بلندی پر $z = 10 - x^2 - y^2$ کی ترسیم کے تمام نقاط میں وہ نقطہ تلاش کریں جو اس مستوی سے دور ترین ہو۔

سوال 13.424: مستوی $x + 2y - z = 0$ سے $z = x^2 + y^2 + 10$ کی ترسیم کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.425: بند ربع اول $x \geq 0, y \geq 0$ میں تفاعل $f(x, y) = x + y$ کی کوئی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ کیا اس حقیقت میں اور کتاب میں مطلق انتہا کی تلاش پر کی گئی گفتگو میں تضاد پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 13.426: مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ میں تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ پر غور کریں۔

ا. دکھائیں کہ اس مربع میں خطی قطع $2x + 2y = 1$ پر f کی مطلق کم سے کم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کم سے کم قیمت کو تلاش کریں۔

ب. مربع پر f کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

مقدار معلوم منحنیات پر انتہائی قیمتیں

منحنی $x = x(t), y = y(t)$ پر تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کی خاطر ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ معلوم کر کے صفر کے برابر رکھتے ہیں۔ کسی بھی واحد متغیر تفاعل کی طرح، انتہائی قیمتوں کو درج ذیل نقطوں پر تلاش کیا جاتا ہے۔

ا. نقطہ فاصل پر (جہاں $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ صفر ہو یا غیر موجود ہو)، اور

ب. مقدار معلوم دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

سوال 13.427 تا سوال 13.430 میں تفاعل کی مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطلق کم سے کم قیمتیں دی گئی منحنیات پر دریافت کریں۔

سوال 13.427: تفاعل:

ا. $f(x, y) = x + y$ ب. $g(x, y) = xy$ ج. $h(x, y) = 2x^2 + y^2$

منحنیات:

ا. $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$ ب. $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0$

مقدار معلوم مساوات $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ استعمال کریں۔

سوال 13.428: تفاعل:

ا. $f(x,y) = 2x + 3y$ ب. $g(x,y) = xy$ ج. $h(x,y) = x^2 + 3y^2$

منحنیات:

ا. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \geq 0$ ب. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

مقدار معلوم مساوات $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ استعمال کریں۔

سوال 13.429: تفاعل: $f(x,y) = xy$
منحنیات:

ا. $x = 2t,\ y = t + 1$ ج. $x = 2t,\ y = t + 1,\ 0 \leq t \leq 1$
ب. $x = 2t,\ y = t + 1,\ -1 \leq t \leq 0$

سوال 13.430: تفاعل:

ا. $f(x,y) = x^2 + y^2$ ب. $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

منحنیات:

ا. $x = t,\ y = 2 - 2t$ ب. $x = t,\ y = 2 - 2t,\ 0 \leq t \leq 1$

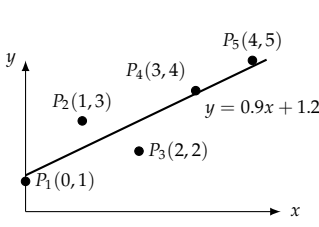
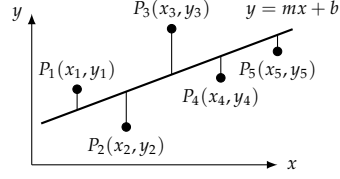
کمتر مربعے اور خطوط رجعت

اعدادی نقاط مواد $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ پر سیدھا خط $y = mx + b$ بٹھاتے ہوئے ہم نقطوں سے خط تک افقی فاصلوں کے مربع کے مجموعہ کو کم سے کم رکھتے ہیں (شکل 13.64)۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں m اور b کی وہ قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی جو درج ذیل کی قیمت کم سے کم کرتے ہوں۔

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (mx_n + b - y_n)^2 \tag{13.52}$$

یک رتبی اور دو رتبی تفرقی پرکھ سے m اور b کی مطلوبہ قیمتیں

$$m = \frac{(\sum x_k)(\sum y_k) - n\sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2 - n\sum x_k^2} \tag{13.53}$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_k - m\sum x_k\right) \tag{13.54}$$

شکل 13.64: غیر ہم خطی نقاط پر سیدھا خط بٹھانے کے لئے ہم وہ لکیر منتخب کرتے ہیں جس میں انتصابی فرق کے مربع کا مجموعہ کم سے کم ہو۔

شکل 13.65: کمتر مربع خط۔

حاصل ہوتی ہیں جہاں تمام مجموعے $k = 1$ تا $k = n$ لئے جاتے ہیں۔ عموماً کیلکولیٹر میں یہ کلیات دیے گئے ہوں گے۔

وہ خط $y = mx + b$ جس میں m اور b کی مذکورہ بالا قیمتیں استعمال کی گئی ہوں زیر غور مواد کا **خط رجعت**[48] کہلاتا ہے۔ کمتر مربعی خط کی مدد سے (ا) آپ مواد کو ایک سادہ مساوات سے ظاہر کر پاتے ہیں، (ب) متغیر x کی دیگر قیمتوں کے لئے y کی قیمت کی پیش گوئی کر پاتے ہیں، (ج) اور مواد پر تحلیلی غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقاط $(0,1)$ ، $(1,3)$ ، $(2,2)$ ، $(3,4)$ ، $(4,5)$ کو جدول

$x_k y_k$	x_k^2	y_k	x_k	k
0	0	1	0	1
3	1	3	1	2
4	4	2	2	3
12	9	4	3	4
20	16	5	4	5
39	30	15	10	$\sum$

کی صورت میں لکھ کر

$$m = \frac{(10)(15) - 5(39)}{(10)^2 - 5(30)} = 0.9 \qquad \text{مساوات } 13.53$$

$$b = \frac{1}{5}(15 - (0.9)(10)) = 1.2 \qquad \text{مساوات } 13.54$$

حاصل ہوں گے۔ یوں ان نقاطی مواد کا خط رجعت $y = 0.9x + 1.2$ ہو گا (شکل 13.65)۔

سوال 13.431 تا سوال 13.434 میں مساوات 13.53 اور مساوات 13.54 استعمال کرتے ہوئے ہر نقاطی مواد کے لئے خط رجعت تلاش کریں۔ یوں حاصل خطی مساوات استعمال کرتے ہوئے $x = 4$ کے لئے y کی قیمت کی پیش گوئی کریں۔

---

[48] regression line

(ا) لوسن کی پیداوار

پانی کی گہرائی x, [cm]	فی ایکڑ پیداوار y, [kg]
30	5270
45	5680
60	6250
75	7210
90	8200
100	8710

(ب) مریخ پر گڑھے

قطر D [km]	جماعتی وقفہ کی بایاں قیمت کے لئے $\frac{1}{D^2}$	تعدد F
$32-45$	0.001	51
$45-64$	0.0005	22
$64-90$	0.00024	14
$90-128$	0.000123	4

سوال 13.431: $(-1,2), (0,1), (3,-4)$

سوال 13.432: $(-2,0), (0,2), (2,3)$

سوال 13.433: $(0,0), (1,2), (2,3)$

سوال 13.434: $(0,1), (2,2), (3,2)$

سوال 13.435: جدول 13.1ا میں پانی کی مقدار (گہرائی) بالمقابل لوسن کی اوسط پیداوار (کلو گرام فی ایکڑ) دی گئی ہے۔ اس کی خطی مساوات تلاش کریں۔ اس مواد کو اور خطی مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال 13.436: مریخ پر گڑھے
ایک نظریہ کہتا ہے کہ گڑھوں کی تعدد قطر کے مربع کی بالعکس متناسب ہو گی۔ مریخ کی سطح کی تصویر سے جدول 13.1ب میں دی گئی معلومات حاصل کی جاتی ہے۔ اس مواد پر $F = m(1/D^2) + b$ طرز کی لکیر بٹھائیں۔ مواد اور اس لکیر کو ترسیم کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 13.437 تا سوال 13.442 میں تفاعل پر غور کرتے ہوئے ان کے مقامی انتہائی نقاط تلاش کرنا مقصود ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر تفاعل ترسیم کریں۔

ب. مستطیل میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

ج. تفاعل کا یک رتبی تفرق لے کر کمپیوٹر کی مدد سے اس مساوات کو حل کر کے نقاط فاصل تلاش کریں۔ نقاط فاصل اور ہم قد منحنیات کے بیچ کیا تعلق نظر آتا ہے؟ کون سے نقاط فاصل پر نقاط زین پائے جاتے ہیں؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

د. تفاعل کے دو رتبی تفرقات تلاش کر کے ممیز $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$ معلوم کریں۔

ھ. زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم پرکھ استعمال کرتے ہوئے جزو-ج کے نقاط فاصل کی جماعت بندی کریں۔ کیا یہ معلومات آپ کی جزو-ج میں دی گئی وجوہات سے مطابقت رکھتی ہے۔

سوال 13.437: $f(x,y)=x^2+y^3-3xy,\quad -5\le x\le 5,\ -5\le y\le 5$

سوال 13.438: $f(x,y)=x^3-3xy^2+y^2,\quad -2\le x\le 2,\quad -2\le y\le 2$

سوال 13.439: $f(x,y)=x^4+y^2-8x^2-6y+16,\quad -3\le x\le 3,\quad -6\le y\le 6$

سوال 13.440: $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2+3,\quad -\frac{3}{2}\le x\le \frac{3}{2},\quad -\frac{3}{2}\le y\le \frac{3}{2}$

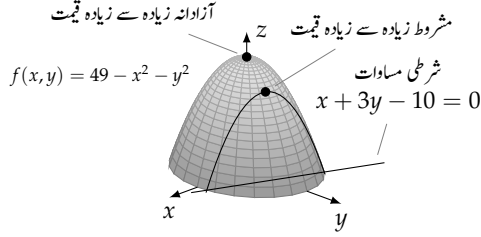
سوال 13.441: $f(x,y)=5x^6+18x^5-30x^4+30xy^2-120x^3,\quad -4\le x\le 3,\quad -2\le y\le 2$

سوال 13.442:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^5\ln(x^2+y^2) & (x,y)\ne(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
$$-2\le x\le 2,\quad -2\le y\le y$$

13.9 لیگرینج ضاربین

جیسا ہم حصہ 13.8 میں دیکھ چکے، بعض اوقات ہمیں تفاعل کی انتہائی قیمت ایسی صورت درکار ہو گی جب اس کے دائرہ کار کو مستوی کے کسی مخصوص ذیلی حصہ، مثلاً قرص یا بند تکونی خطہ، پر رہنے کا پابند بنایا گیا ہو۔ لیکن جیسا شکل 13.66 میں دکھایا گیا ہے، تفاعل پر دیگر پابندیاں بھی عائد کی جا سکتی ہیں۔

اس حصہ میں ہم پابند تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کے ایک طاقتور ترکیب پر غور کریں گے جس کو لیگرینج ضاربین کی ترکیب کہتے ہیں۔ جیومیٹری کے انتہا قیمت مسائل حل کرتے ہوئے یوسف لوئی لیگرینج نے 1755 میں اس ترکیب کو دریافت کیا۔ موجودہ دور میں اس کا استعمال اقتصادیات، انجینئری (جہاں کثیر المراحل راکٹ کی تخلیق میں اسے استعمال کیا جاتا ہے) اور ریاضیات میں پایا جاتا ہے۔

شکل 13.66: تفاعل $f(x,y)=49-x^2-y^2$ کی شرطی مساوات $x+3y-10=0$ کے تحت زیادہ سے زیادہ قیمت۔

تفاعل کی مشروط زیادہ سے زیادہ قیمت نقاط اور کم سے کم قیمت نقاط

مثال 13.55: مبدا کے قریب ترین نقطہ $N(x,y,z)$ مستوی $2x+y-z=0$ پر تلاش کریں۔

حل: ہمیں تفاعل

$$\left|\vec{ON}\right| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

کی کم سے کم قیمت درج ذیل شرط کے تحت تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$2x+y-z-5=0$$

چونکہ جب بھی تفاعل

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

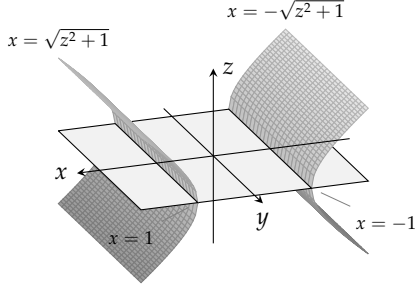
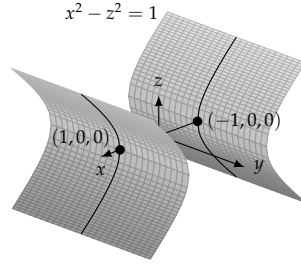
کی قیمت کم سے کم ہو، $\vec{ON}$ کی قیمت بھی کم سے کم ہوتی ہے لہٰذا ہم $2x+y-z-5=0$ کی شرط کو مطمئن کرتے ہوئے $f(x,y,z)$ کی کم سے کم قیمت تلاش کر کے اس مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں۔ اس مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے z کو

$$z=2x+y-5$$

لکھ کر ہمیں وہ نقطہ (x,y) تلاش کرنا ہو گا جس پر تفاعل

$$h(x,y)=f(x,y,2x+y-5)=x^2+y^2+(2x+y-5)^2$$

کی قیمت کم سے کم ہو۔ چونکہ پورا xy مستوی h کا دائرہ کار ہے لہٰذا یک رتبی تفرقی پرکھ کے تحت h کی کم سے کم قیمت ان نقاط پر پائی جائے گی جن پر

$$h_x=2x+2(2x+y-5)(2)=0, \quad h_y=2y+2(2x+y-5)=0$$

(ب) قطع زائد $x^2 - z^2 = 1$ پر مستوی xy میں نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدد کے انتخاب میں مستوی xy کی پٹی $-1 < x < 1$ شامل نہیں ہو گی۔

(ا) قطع زائد بیلن۔

شکل 13.67: مشروط انتہائی قیمت۔

ہو۔ان سے

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10$$

یعنی

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}$$

حاصل ہو گا۔ ہم دو رتبی تفرق پرکھ کے ساتھ ساتھ جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ان قیمتوں پر h کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ مستوی $z = 2x + y - 5$ پر مطابقتی z محدد

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

ہو گا۔یوں مطلوبہ نقطہ

$$N\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

ہو گا جو مبدا سے $\frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2.04$ فاصلہ پر ہو گا۔ □

ہم نے مثال 13.55 میں پابندی کے شرط کی قیمتیں پر کرتے ہوئے کم سے کم قیمت نقطہ تلاش کیا۔ یہ ترکیب بعض اوقات ہمیں آسانی سے جواب نہیں دے پاتی۔یہی وجہ ہے کہ اس حصہ میں ایک نئی ترکیب متعارف کی جائے گی۔

مثال 13.56: درج ذیل قطع زائد بیلن پر مبدا کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

پہلا حل: بیلن کو شکل 13.67-ا میں دکھایا گیا ہے۔ ہمیں اس بیلن پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کرنے ہیں۔یہ وہ نقاط ہوں گے جو $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتے ہوئے تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{فاصلے کا مربع}$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔ اگر ہم شرطی مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کریں تب

$$z^2 = x^2 - 1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں بیلن پر نقاط کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

بیلن پر ان نقاط کے محدد جو f کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں تلاش کرنے کی خاطر ہمیں xy مستوی میں وہ نقاط معلوم کرنے ہوں گے جن پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ h کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقاط پر ممکن ہیں جن پر

$$h_x = 4x = 0, \quad h_y = 2y = 0$$

ہو، یعنی، نقطہ $(0, 0)$ لیکن بیلن پر ایسا کوئی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جہاں x اور y بیکوقت صفر ہوں۔ ایسا کیوں کر ہوا؟

کیا ہوا کہ یک رتبی تفرقی پرکھ سے ہم نے (درست طور پر) h کے دائرہ کار میں وہ نقطہ معلوم کیا جس پر h کی قیمت کم سے کم تھی جبکہ ہمیں بیلن پر وہ نقطہ درکار تھا جس پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ اگرچہ h کا دائرہ کار مکمل xy مستوی پر مشتمل ہے، ہمیں مستوی xy میں بیلن کے سایہ کو دائرہ کار لیتے ہوئے نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدد تلاش کرنے تھے۔ بیلن کے سایہ میں خطوط $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ خطہ شامل نہیں ہو گا (شکل 13.67-ب)۔

ہم (x اور y کی بجائے) y اور z کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے اس پریشانی سے نجات حاصل کر سکتے ہیں۔یوں

$$x^2 = z^2 + 1$$

لکھ کر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ سے

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

حاصل ہو گا۔ اب ہم وہ نقاط تلاش کرتے ہیں جن پر k کی قیمت کم سے کم ہو۔ اب yz مستوی میں k کے دائرہ کار میں وہ حصہ جس میں y اور z دریافت کئے جاتے ہیں، بیلن پر اس دائرہ کار جس پر (x, y, z) مطلوب ہے، ایک دوسرے جیسے ہیں۔ یوں جو نقاط k کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں، بیلن پر مطابقتی نقاط دیں گے۔ اب k کی کم سے کم قیمت ان نقطوں پر ہو گی جہاں

$$k_y = 2y = 0, \quad k_z = 4z = 0$$

یعنی $y = z = 0$ ہو۔یوں

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔بیلن پر مطابقتی نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ ہم عدم مساوات

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

سے دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہمیں k کی کم سے کم قیمت دیں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا سے بیلن کا کم سے کم فاصلہ 1 ہو گا۔

دوسرا حل: مبدا سے بیلن تک کم ترین فاصلہ یوں بھی تلاش کیا جا سکتا ہے کہ آپ مبدا پر ایک بلبلا تصور کریں۔ اس بلبلا میں اتنی ہوا بھریں کہ یہ بیلن کو بس چھوئے (شکل 13.68)۔ جس نقطہ پر یہ بلبلا بیلن کو چھوتا ہے اس نقطہ پر بلبلے اور بیلن کا ایک ہی مماسی مستوی اور ایک ہی عمودی خط ہو گا۔یوں اگر

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہم قد منحنیات کو بلبلا اور بیلن تصور کیا جائے تب ڈھلوان ∇f اور ∇g اس نقطہ پر متوازی ہوں گے جہاں یہ سطحیں ایک دوسرے کو چھوتی ہیں۔ یوں نقطہ مس پر ہم ایسا غیر سمتی λ تلاش کر سکتے ہیں جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

یعنی

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{k})$$

کو مطمئن کرتا ہو۔اس طرح نقطہ مماس پر x ، y اور z محدد درج ذیل تین مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z \tag{13.55}$$

نقطہ (x, y, z) جس کے محدد مساوات 13.55 کو مطمئن کرتے ہوں λ کی کس قیمت کے لئے سطح $x^2 - z^2 - 1 = 0$ پر پائے جائیں گے؟ اس کا جواب دینے کی خاطر ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ اس سطح پر کسی بھی نقطہ کا x محدد صفر نہیں ہے، فیصلہ کرتے ہیں کہ مساوات 13.55 کی پہلی مساوات میں $x \neq 0$ ہو گا۔یوں $2x = 2\lambda x$ صرف

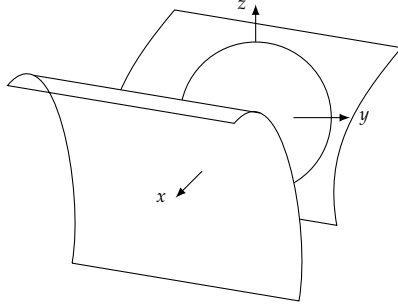
$$2 = 2\lambda \quad \text{یعنی} \quad \lambda = 1$$

کی صورت میں ممکن ہو گا۔اب $\lambda = 1$ لیتے ہوئے مساوات $2z = -2\lambda z$ سے $2z = -2z$ حاصل ہو گا جس کو صرف $z = 0$ مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی مساوات $2y = 0$ سے $y = 0$ حاصل ہو گا۔ ان معلومات سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ کا روپ درج ذیل ہو گا۔

$$(x, 0, 0)$$

سطح $x^2 - z^2 = 1$ پر کن نقاط کے محدد کا یہی روپ ہے؟ ان نقاط پر

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔بیلن پر مبدا کے قریب ترین نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ □

شکل 13.68: مبدا پر ایک بلبلا جو قطع زائد $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مس کرتا ہے۔

لیگرینج ضاربین

ہم نے مثال 13.56 کا دوسرا حل **لیگرینج ضاربین**[49] کی ترکیب سے حاصل کیا۔ عمومی طور پر یہ ترکیب کہتی ہے تفاعل $f(x, y, z)$ ، جس کے متغیرات پر شرط $g(x, y, z) = 0$ لاگو کی گئی ہو، کی انتہائی قیمتیں، سطح $g = 0$ پر ان نقاط پر پائی جائیں گی جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

کو کسی غیر سمتی مستقل λ (جس کو **لیگرینج ضارب**[50] کہتے ہیں) کے لئے مطمئن کرتے ہوں۔

اس ترکیب کو مزید جاننے کے لئے اور یہ دیکھنے کی خاطر کہ یہ ترکیب کیوں کام کرتی ہے، ہم درج ذیل مشاہدہ کرتے ہیں جس کو ایک مسئلہ کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔

مسئلہ 13.9: **عمودی ڈھلوان کا مسئلہ**
فرض کریں $f(x, y, z)$ ایک ایسے خطہ میں قابل تفرق ہے جس کی اندرون میں ہموار منحنی

$$C: \quad \boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$

پائی جاتی ہے۔ اگر C پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہو جہاں C کے لحاظ سے (یعنی f کے متغیرات x ، y اور z منحنی C کو مطمئن کرتے ہوں) f کی مقامی (مشروط) زیادہ سے زیادہ یا مقامی کم سے کم قیمت ہو تب N_0 پر ∇f منحنی C کو عمودی ہو گا۔

ثبوت: ہم دکھاتے ہیں کہ N_0 پر منحنی کے سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ منحنی C پر f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیتا ہے جس کا t کے لحاظ سے تفرق

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$$

---

[49] method of Lagrange multipliers
[50] Lagrange!multiplier

ہو گا۔ ایک نقطہ N_0 جس پر f کی، C کے لحاظ سے، (مشروط) مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت ہو، $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو گا لہٰذا

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

ہو گا۔

ہم مسئلہ 13.9 میں جزو z کو حذف کر کے دو متغیری تفاعل کے لئے اسی طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

□

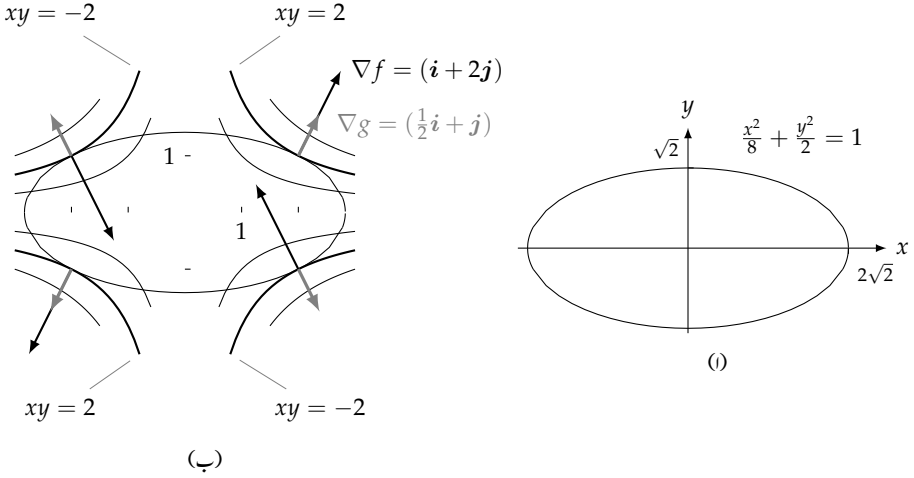
ضمنی نتیجہ 13.2: برائے مسئلہ 13.9
ہموار منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمتوں کے لحاظ سے، جن نقاط پر f کی (مشروط) زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم قیمتیں ہوں وہاں $\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہو گا۔

ترکیب لیگرینج ضاربین کا انحصار مسئلہ 13.9 پر ہے۔ فرض کریں $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ قابل تفرق تفاعل ہیں اور سطح $g(x,y,z) = 0$ پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہے، جہاں سطح پر دیگر قیمتوں کے لحاظ سے، f کی (مشروط) مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔ تب سطح $g(x,y,z) = 0$ پر N_0 سے گزرتی ہوئی ہر قابل تفرق منحنی پر، f کی قیمتوں کے لحاظ سے، N_0 پر f کی (مشروط) مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔ یوں N_0 سے گزرتی ہوئی ایسی ہر قابل تفرق منحنی کا سمتیہ رفتار ڈھلوان ∇f کو عمودی ہو گا۔ لیکن ∇g (جیسا ہم حصہ 13.7 میں دیکھ چکے ہیں ∇g ہم قد سطح $g = 0$ کو عمودی ہو گا) بھی ان سمتیات رفتار کو عمودی ہے لہٰذا N_0 پر ∇g اور غیر سمتی λ کا حاصل ضرب ∇f کے برابر ہو گا۔

لیگرینج ضاربین کی ترکیب
فرض کریں $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ قابل تفرق ہیں۔ شرط $g(x,y,z) = 0$ پر پورا اترتے ہوئے f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت یا مقامی کم سے کم قیمت تلاش کرنے کی خاطر x، y، z اور λ کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو درج ذیل مساوات کو بیکوقت مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x,y,z) = 0$$

دو متغیری تفاعل کے لئے موزوں مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x,y) = 0$$

شکل 13.69: تفاعل $f(x,y)=xy$ پر شرط $g(x,y)=x^2/8+y^2/2-1=0$ لاگو کرنے سے تفاعل f کی انتہائی قیمتیں چار نقاط $(\mp 2,\mp 1)$ پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ ترخیم پر وہ نقاط ہیں جہاں ∇g کا غیر سمتی مضرب ∇f ہو گا۔

مثال 13.57: ترخیم

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$$

پر درج ذیل تفاعل کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں (شکل 13.69-ا)۔

$$f(x,y)=xy$$

حل: ہم $f(x,y)=xy$ کی انتہائی قیمتیں درج ذیل شرط پر پورا اترتے ہوئے تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$g(x,y)=\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1=0$$

ایسا کرنے کی خاطر ہم پہلے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f=\lambda\nabla g,\quad g(x,y)=0$$

مساوات ڈھلوان ہمیں

$$y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}=\frac{\lambda}{4}x\boldsymbol{i}+\lambda y\boldsymbol{j}$$

دیتی ہے جس سے

$$y = \frac{\lambda}{4}x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4}y$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y = 0$ یعنی $\lambda = \mp 2$ ہو گا۔ ہم اب درج ذیل دو صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

پہلی صورت: اگر $y = 0$ ہو تب $x = y = 0$ ہو گا۔ لیکن $(0,0)$ ترخیم پر نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا $y \neq 0$ ہو گا۔

دوسری صورت: اگر $y \neq 0$ ہو تب $\lambda = \mp 2$ اور $x = \mp 2y$ ہو گا۔ انہیں مساوات $g(x,y) = 0$ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{(\mp 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8, \quad y = \mp 1$$

یوں ترخیم پر تفاعل $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں چار نقطوں $(\mp 2, 1)$ ، $(\mp 2, -1)$ پر پائی جائیں گی۔ یہ انتہائی قیمتیں $f(x,y) = xy = 2$ اور $f(x,y) = xy = -2$ ہوں گی۔

حل کی جیومیٹری

تفاعل $f(x,y) = xy$ کی ہم قد منحنیات قطع زائد $xy = c$ ہیں (شکل 13.69-ب)۔ مبدا سے یہ قطع زائد جتنے دور ہوں، f کی مطلق قیمت اتنی بڑی ہو گی۔ ہم $f(x,y)$ کی وہ انتہائی قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو ترخیم $x^2 + 4y^2 = 8$ پر پائی جاتی ہوں۔ مبدا سے دور ترین وہ کونسی قطع زائد ہیں، جو ترخیم کو قطع کرتی ہیں؟ وہ قطع زائد جو ترخیم کو مس کرتی ہوئی گزرتی ہوں، جو ترخیم کی مماسی ہوں۔ ان نقطوں پر جو بھی سمتیہ قطع زائد کو عمودی ہو، ترخیم کو بھی عمودی ہو گا، لہٰذا $\nabla f = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ سمتیہ $\nabla g = \frac{x}{4}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کا مستقل مضرب ($\lambda = \mp 2$) ہو گا۔ مثلاً نقطہ $(2,1)$ پر

$$\nabla f = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \nabla f = 2\nabla g$$

ہو گا جبکہ نقطہ $(-2,1)$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla f = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \nabla f = -2\nabla g$$

□

مثال 13.58: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر تفاعل $f(x,y) = 3x + 4y$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

حل: ہم ترکیب لیگرینج ضاربین میں

$$f(x,y) = 3x + 4y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

لیتے ہوئے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں تلاش کرتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = 2x\lambda\boldsymbol{i} + 2y\lambda\boldsymbol{j},$$
$$g(x,y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

مساوات ڈھلوان سے مراد $\lambda \neq 0$ لیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ مساوات

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

دیتی ہے جو دیگر حقائق کے ساتھ ساتھ ہمیں بتاتی ہے کہ x اور y کی علامتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔ مساوات $g(x,y) = 0$ میں x اور y کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

یعنی

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad 9 + 16 = 4\lambda^2, \quad \lambda = \mp\frac{5}{2}$$

حاصل ہو گا۔ یوں

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \mp\frac{3}{5}, \quad y = \frac{2}{\lambda} = \mp\frac{4}{5}$$

ہوں گے اور $f(x,y) = 3x + 4y$ کی انتہائی قیمتیں نقاط $\mp(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر پائی جائیں گی۔

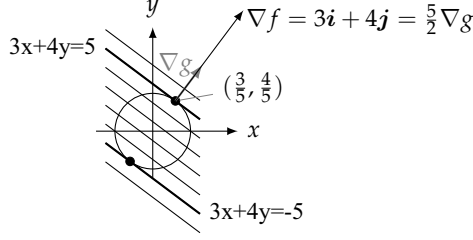
نقاط $\mp(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر $3x + 4y$ کی قیمتیں معلوم کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5, \quad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5$$

حل کی جیومیٹری

تفاعل $f(x,y) = 3x + 4y$ کی ہم قد منحنیات، خطوط $3x + 4y = c$ ہیں (شکل 13.70)۔ مبدا سے یہ خطوط جتنے دور ہوں، f کی مطلق قیمت اتنی زیادہ ہو گی۔ ہم f کی وہ انتہائی قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر پائے جاتے ہوں۔ وہ کون سے خطوط ہیں جو مبدا سے دور ترین ہوتے ہوئے دائرہ کو قطع کرتے ہیں؟ وہ خطوط جو دائرے کے مماس ہیں۔ نقطہ مماس پر ہر وہ سمتیہ جو خط کو عمودی ہو، دائرہ کو بھی عمودی ہو گا لہٰذا ڈھلوان ∇f ڈھلوان ∇g کا مستقل مضرب ($\lambda = \mp\frac{5}{2}$) ہو گا۔ مثلاً نقطہ $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر درج ذیل ہوں گے۔

$$\nabla f = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \frac{6}{5}\boldsymbol{i} + \frac{8}{5}\boldsymbol{j}, \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g$$

□

شکل 13.70: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر تفاعل $f(x, y) = 3x + 4y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ $(3/5, 4/5)$ اور کم سے کم قیمت نقطہ $(-3/5, -4/5)$ پر پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر ∇g کا مستقل مضرب ∇f ہو گا۔ اس شکل میں پہلے نقطہ پر ڈھلوان دکھائی گئی ہے جبکہ دوسرے نقطہ پر ڈھلوان نہیں دکھائی گئی ہے۔

دو شرائط کے ساتھ لیگرینج ضاربین

متعدد مسائل میں ہمیں قابل تفرق تفاعل $f(x, y, z)$ کی انتہائی قیمتیں اس صورت درکار ہوتی ہیں جہاں تفاعل کے متغیرات دو شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ اگر یہ شرائط

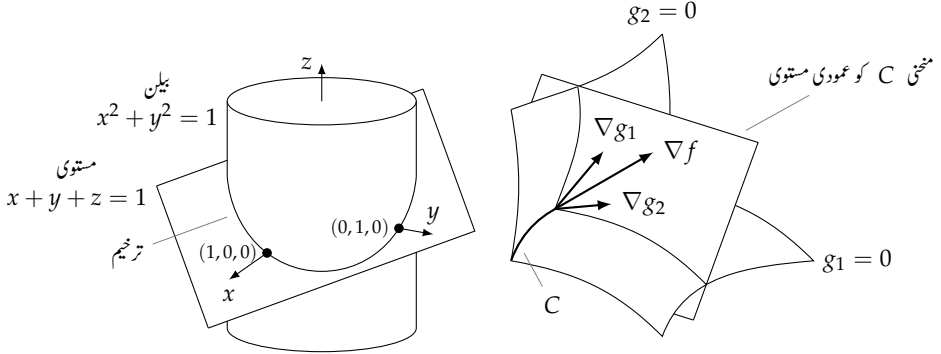
$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{اور} \quad g_2(x, y, z) = 0,$$

ہوں اور g_1 ، g_2 قابل تفرق ہوں اور ساتھ ہی ∇g_1 اور ∇g_2 آپس میں متوازی نہ ہوں تب ہم f کی مشروط مقامی زیادہ سے زیادہ اور مقامی کم سے کم قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر دو لیگرینج مستقل λ اور μ (جس کا تلفظ "میو" ہے) متعارف کرتے ہیں۔ اس طرح f کی انتہائی قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر ہم x ، y ، z ، λ اور μ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو بیکوقت مطمئن کرتے ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x, y, z) = 0, \quad g_2(x, y, z) = 0 \tag{13.56}$$

درج بالا (مساوات 13.56) کا ایک خوبصورت جیومیٹریائی مطلب ہے (شکل 13.71)۔ سطح $g_1 = 0$ اور سطح $g_2 = 0$ (عموماً) ایک ہموار منحنی میں، جسے ہم C کہیں گے، ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں اور اس منحنی پر چلتے ہوئے ہم وہ نقاط تلاش کرنا چاہتے ہیں، جہاں C پر f کی قیمتوں کے لحاظ سے، f کی (مشروط) زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمت پائی جاتی ہو۔ جیسا ہم مسئلہ 13.9 سے جانتے ہیں، ان نقاط پر ∇f ، منحنی C کو عمودی ہو گا۔ لیکن ان نقاط پر چونکہ منحنی C ، سطح $g_1 = 0$ اور سطح $g_2 = 0$ میں پائی جاتی ہے لہٰذا ∇g_1 اور ∇g_2 بھی C کو عمودی ہوں گے۔ یوں ∇f اس مستوی میں پایا جائے گا جسے ∇g_1 اور ∇g_2 تعین کرتے ہیں لہٰذا $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ ہو گا جہاں λ اور μ کوئی مستقل ہوں گے۔ چونکہ مطلوبہ نقاط بھی ان دونوں سطحوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے محدد مساوات $g_1(x, y, z) = 0$ اور $g_2(x, y, z) = 0$ کو لازماً مطمئن کریں گے (جو مساوات 13.56 کے باقی شرائط ہیں)۔

مثال 13.59: مستوی $x + y + z = 1$ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کو ایک ترخیم میں قطع کرتا ہے۔ اس ترخیم پر وہ نقاط تلاش کریں جو مبدا سے دور تر اور نزدیک تر ہوں (شکل 13.72)۔

شکل 13.71: چونکہ ∇g_1 سطح $g_1 = 0$ کو عمودی ہے اور ∇g_2 سطح $g_2 = 0$ کو عمودی ہے لہٰذا سمتیات ∇g_1 اور ∇g_2 منحنی C کے عمودی مستوی میں پائے جاتے ہیں۔

شکل 13.72: جس ترخیم پر بیلن اور مستوی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس پر مبدا سے دور تر اور نزدیک تر نقاط کی تلاش۔

حل: ہم (مبدا سے نقطہ (x, y, z) کے فاصلے کے مربع)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

کی وہ انتہائی قیمتیں معلوم کرتے ہیں جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتی ہوں۔

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{13.57}$$
$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0 \tag{13.58}$$

یوں مساوات 13.56 میں ڈھلوان کی مساوات

$$\begin{aligned} \nabla f &= \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 && \text{مساوات } 13.56 \\ 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} &= \lambda(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}) + \mu(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \\ 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} &= (2\lambda x + \mu)\boldsymbol{i} + (2\lambda y + \mu)\boldsymbol{j} + \mu\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

یعنی

$$2x = 2\lambda x + \mu, \quad 2y = 2\lambda y + \mu, \quad 2z = \mu \tag{13.59}$$

دے گی۔ غیر سمتی مساوات 13.59 ہمیں درج ذیل دیتی ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x + 2z \quad &\implies \quad (1 - \lambda)x = z \\ 2y = 2\lambda y + 2z \quad &\implies \quad (1 - \lambda)y = z \end{aligned} \tag{13.60}$$

مساوات 13.60 بیکوقت اس صورت مطمئن ہوں گی جب یا $\lambda = 1$ اور $z = 0$ ہوں یا $\lambda \neq 1$ اور $x = y = \frac{z}{1-\lambda}$ ہوں۔

اگر $z = 0$ ہو تب مساوات 13.57 اور مساوات 13.58 کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے ترخیم پر مطابقتی نقاط $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ حاصل ہوتے ہیں جو شکل کو دیکھ کر معنی خیز نظر آتے ہیں۔

اگر $x = y$ ہو تب مساوات 13.57 اور مساوات 13.58 درج ذیل دیں گے۔

$$
\begin{aligned}
x + x + z - 1 &= 0 & \qquad x^2 + x^2 - 1 &= 0\\
z &= 1 - 2x & 2x^2 &= 1\\
z &= 1 \mp \sqrt{2} & x &= \mp\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

ترخیم پر مطابقتی نقاط

$$
N_1 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\Big) \quad \text{اور} \quad N_2 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\Big)
$$

ہوں گے۔ یہاں احتیاط کی ضرورت ہے۔ اگرچہ N_1 اور N_2 دونوں ترخیم پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمتیں دیتے ہیں، نقطہ N_2 مبدا سے زیادہ دور ہے۔

ترخیم پر مبدا کے قریب تر نقاط $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ ہیں۔ ترخیم پر مبدا سے دور تر نقطہ N_2 ہے۔ □

سوالات

دو غیر تابع متغیرات اور ایک شرط

سوال 13.443: ترخیم $x^2 + 2y^2 = 1$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

سوال 13.444: تفاعل $f(x,y) = xy$ کی شرطی مساوات $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ کے لحاظ سے مشروط انتہائی قیمتیں تلاش کریں ۔

سوال 13.445: لکیر $x + 3y = 10$ پر چلتے ہوئے تفاعل $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.446: خط $x + y = 3$ پر $f(x,y) = x^2y$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.447: منحنی $xy^2 = 54$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔

سوال 13.448: منحنی $x^2y = 2$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔

سوال 13.449: ترکیب لیگرینج ضاربین کی مدد سے

ا. $x+y$ کی مشروط کم سے کم قیمت $xy=16,\ x>0,\ y>0$ پر پورا اترتے ہوئے تلاش کریں۔

ب. xy کی زیادہ سے زیادہ قیمت شرط $x+y=16$ کے لحاظ سے تلاش کریں۔

سوال 13.450: مستوی xy میں رہتے ہوئے منحنی $x^2+xy+y^2=1$ پر مبدا سے دور تر اور نزدیک تر نقاط تلاش کریں۔

سوال 13.451: ایک بند دائری قائمہ بیلن کا حجم $16\pi,\ \mathrm{cm}^3$ ہے۔ اس کی وہ جسامت تلاش کریں جس سے اس بیلن کا سطحی رقبہ کم سے کم ہو۔

سوال 13.452: رداس a کے کرہ میں محصور زیادہ سے زیادہ سطح کے کھلا دائری قائمہ بیلن کا سطحی رقبہ کتنا ہو گا؟

سوال 13.453: ترکیب لیگرینج ضارب‌ین استعمال کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ میں محصور زیادہ سے زیادہ محیط کا ایسا مستطیل تلاش کریں جس کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہوں۔ اس مستطیل کا محیط کتنا ہو گا؟

سوال 13.454: ترخیم $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ میں محصور زیادہ سے زیادہ محیط کا مستطیل جس کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہوں کے اضلاع تلاش کریں۔ اس مستطیل کا محیط کتنا ہو گا؟

سوال 13.455: شرط $x^2-2x+y^2-4y=0$ پر پورا اترتے ہوئے x^2+y^2 کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.456: شرط $x^2+y^2=4$ کے لحاظ سے $3x-y+6$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.457: ایک دھاتی چادر کے نقطہ (x,y) پر درجہ حرارت $T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$ ہے۔ ایک چیونٹی رداس 5 کے دائرہ پر، جس کا مرکز مبدا پر ہے، حرکت کرتی ہے۔ اس چیونٹی کو زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنے درجہ حرارت کا سامنا کرنا ہو گا؟

سوال 13.458: آپ کو تیل ذخیرہ کرنے کے لئے حوض بنانے کو کہا گیا ہے۔ یہ حوض بیلنی ہو گا جس کے آخری سر نصف کروی ہوں گے۔ اس کا حجم $8000\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ آپ کو کم سے کم چادر استعمال کر کے حوض بنانا ہے۔ اس حوض کا رداس اور قد کتنا ہو گا؟

تین متغیرات اور ایک شرط

سوال 13.459: مستوی $x+2y+3z=13$ پر $(1,1,1)$ کو نزدیک تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.460: کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ پر وہ نقطہ تلاش کریں جو $(1,-1,1)$ سے دور تر ہو۔

سوال 13.461: مبدا سے سطح $x^2+y^2-z^2=1$ کا کم تر فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 13.462: سطح $z=xy+1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.463: سطح $z^2=xy+4$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.464: سطح $xyz=1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.465: کرہ $x^2+y^2+z^2=30$ پر $f(x,y,z)=x-2y+5z$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.466: کرہ $x^2+y^2+z^2=25$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x,y,z)=x+2y+3z$ کی زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

سوال 13.467: تین ایسے حقیقی اعداد تلاش کریں جن کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔

سوال 13.468: اگر $x+y+z^2=16$ ہو تب مثبت اعداد x ، y اور z کا زیادہ سے زیادہ حاصل ضرب کتنا ہو گا؟

سوال 13.469: اکائی کرہ میں محصور زیادہ سے زیادہ حجم کے بند مستطیلی ڈبہ کے اضلاع تلاش کریں۔

سوال 13.470: ربع اول میں زیادہ سے زیادہ حجم کے ایسے بند مستطیل ڈبہ کا حجم تلاش کریں جس کی دیواریں مستوی سطحوں میں ہوں اور جس کا راس $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ، جہاں $a>0, b>0, c>0$ ہے، کو چھوتا ہو۔

سوال 13.471: خلائی تحقیق کے اختتام پر ترخیمی صورت

$$4x^2+y^2+4z^2=16$$

کا خلائی جہاز زمینی ہوا میں داخل ہوتے ہی گرم ہونا شروع ہوتا ہے۔ ایک گھنٹہ بعد خلائی جہاز کی سطحی نقطہ (x,y,z) پر درجہ حرارت

$$T(x,y,z)=8x^2+4yz-16z+600$$

ہے۔اس جہاز کی سطح پر گرم ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.472: کرہ $x^2+y^2+z^2=1$ کے سطحی نقطہ (x,y,z) پر درجہ حرارت $T(x,y,z)=400xyz^2$ سیلسیئس ہے۔ اس کرہ پر زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال 13.473: اقتصادیات سے ایک مثال
دو اشیاء G_1 اور G_2 کی تعداد x اور y کی افادیت کو بعض اوقات تفاعل $U(x,y)$ سے ناپا جاتا ہے۔مثال کے طور پر G_1 اور G_2 وہ دو کیمیا ہو سکتے ہیں جن کی مختلف مقداریں استعمال کرتے ہوئے دواساز ادارہ مختلف تراکیب استعمال کرتے ہوئے دوائی تیار کرتا ہو اور مطابقتی منافع $U(x,y)$ ہو۔ اگر G_1 پر a اور G_2 پر b روپیہ فی کلو گرام لاگت آتی ہو اور ان دونوں کی خریداری کے لئے c روپیہ مختص کیے گئے ہوں تب ادارے کا سربراہ $ax+by=c$ کی زیر شرط $U(x,y)$ کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بنانا چاہے گا جو ترکیب لیگرینج ضاربین سے حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

فرض کریں

$$U(x,y)=xy+2x, \quad ax+by=c=2x+y=30$$

ہوں تب U کی مشروط زیادہ سے زیادہ قیمت اور مطابقتی x اور y تلاش کریں۔

سوال 13.474: ایک سیارہ پر آپ ریڈیائی دوربین کو اس مقام پر نسب کرنا چاہتے ہو جہاں سیارہ کی مقناطیسی میدان کمزور ترین ہو تا کہ دوربین کی کارکردگی میں خلل اندازی کو کم سے کم ہو۔ اس سیارہ کا رداس 6 اکائیاں ہے۔ محددی نظام کے مبدا کو سیارہ کے مرکز پر رکھتے ہوئے ، سیارہ کا مقناطیسی میدان $M(x,y,z)=6x-y^2+xz+60$ ہے۔ آپ ریڈیائی دوربین کو کہاں نسب کریں گے؟

لیگرینج ضاربین مع دو شرائط

سوال 13.475: تفاعل $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ کی قیمت کو زیر شرائط $2x-y=0$ اور $y+z=0$ زیادہ سے زیادہ بنائیں۔

سوال 13.476: زیر $x+2y+3z=6$ اور $x+3y+9z=9$ تفاعل $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ کی قیمت کو کم سے کم بنائیں۔

سوال 13.477: سطح $y+2z=12$ اور سطح $x+y=6$ کی تقاطع پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال 13.478: سطح $2x-y=0$ اور سطح $y+z=0$ کی منحنی تقاطع پر $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.479: مستوی $z=1$ اور کرہ $x^2+y^2+z^2=10$ کے تقاطع پر $f(x,y,z)=x^2yz+1$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.480: (ا) سطح $x+y+z=40$ اور سطح $x+y-z=0$ کی خط تقاطع پر $w=xyz$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔ (ب) جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے ثابت کریں کہ آپ نے w کی زیادہ سے زیادہ قیمت حاصل کی ہے نا کہ اس کی کم سے کم قیمت۔

سوال 13.481: مستوی $y - x = 0$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔ اس دائرہ پر $f(x, y, z) = xy + z^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 13.482: مستوی $2y + 4z = 5$ اور مخروط $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ کے تقاطع پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 13.483: $\nabla f = \lambda \nabla g$ کافی نہیں ہے۔
اگرچہ زیر شرط $g(x, y) = 0$ تفاعل $f(x, y)$ کی انتہائی قیمتوں کے ہونے کے لئے تعلق $\nabla f = \lambda \nabla g$ لازمی ہے، یہ تعلق از خود اس بات کی ضمانت نہیں دیتا کہ اس تفاعل کی انتہائی قیمتیں موجود ہوں گی۔ مثال کے طور پر زیر شرط $xy = 16$ ترکیب لیگرینج ضاربین کی مدد سے $f(x, y) = x + y$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ یہ ترکیب آپ کو دو نقاط $(4, 4)$ اور $(-4, -4)$ دے گی جن پر توقع کی جا سکتی ہے کہ f کی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جاتی ہو۔اس کے باوجود قطع زائد $xy = 16$ پر $x + y$ کی کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔آپ ربع اول میں مبدا سے جتنے دور چلتے ہیں، f کی قیمت اتنی زیادہ ہو گی۔

سوال 13.484: کمتر مربعی مستوی
مستوی $z = Ax + By + C$ کو درج ذیل نقاط (x_k, y_k, z_k) پر بٹھانا مقصود ہے۔

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 0, -1)$$

مستقل A ، B اور C کی وہ قیمتیں تلاش کریں جو انحرافات کے مربع کے مجموعہ

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔

سوال 13.485: (ا) کارتیسی محددی abc نظام کے مبدا پر رداس r کا کرہ رکھا گیا ہے۔ دکھائیں کہ اس کرہ پر $a^2b^2c^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$ ہو گی۔ (ب) جزو-ا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ غیر منفی اعداد a ، b اور c کے لئے

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

ہو گا، یعنی، تین اعداد کا ہندسی اوسط اس کے حسابی اوسط جتنا یا اس سے کم ہو گا۔

سوال 13.486: فرض کریں $a_1, a_2, \cdots, a_n$ مثبت n اعداد ہیں۔زیر شرط $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ مجموعہ $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 13.487 تا سوال 13.492 میں کمپیوٹر کی مدد سے ترکیب لیگرینج ضاربین استعمال کرتے ہوئے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

ا. تفاعل f، جس کی قیمت کو زیر شرائط $g_1 = 0$ اور $g_2 = 0$ بہتر بنانا مقصود ہے، سے تفاعل $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ حاصل کریں۔

ب. بشمول λ_1 اور λ_2 کے لحاظ سے، h کی تمام جزوی یک رتبی تفرقات حاصل کر کے 0 کے برابر رکھیں۔

ج. جزو-ب میں حاصل نظام مساوات کو، بشمول λ_1 اور λ_2، تمام متغیرات کے لئے حل کریں۔

د. جزو-ج میں ہر نقطہ حل پر f کی قیمت حاصل کر کے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 13.487: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 2 = 0$ اور $x^2 + z^2 - 2 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = xy + yz$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.488: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 1 = 0$ اور $x - z = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.489: زیر شرائط $2y + 4z - 5 = 0$ اور $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.490: زیر شرائط $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ اور $x^2 + y^2 - 1 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.491: زیر شرائط $2x - y + z - w - 1 = 0$ اور $x + y - z + w - 1 = 0$ تفاعل $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ کی کم سے کم قیمت تلاش کریں۔

سوال 13.492: لکیر $y = x + 1$ سے قطع مکافی $y^2 = x$ تک فاصلہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فرض کریں لکیر پر (x, y) ایک نقطہ ہے اور (w, z) قطع مکافی پر ایک نقطہ ہے۔ آپ $(x - w)^2 + (y - z)^2$ کی قیمت کم سے کم چاہتے ہیں۔)

13.10 کلیہ ٹیلر

اس حصہ میں کلیہ ٹیلر (حصہ 9.10) استعمال کرتے ہوئے ہم مقامی انتہائی قیمتوں (حصہ 13.8) کا دو رتبی تفرقی پرکھ اور دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی خط بندی کا کلیہ (مساوات 13.17) خلل اخذ کرتے ہیں۔ کلیہ ٹیلر کی استعمال سے دو متغیری تفاعل کی تمام رتبہ کی کثیر رکنی تخمین کے کلیہ کو وسعت ملتی ہے۔

دو رتبی تفرقی پرکھ کا اشتقاق

فرض کریں خطہ R میں تفاعل $f(x,y)$ کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں اور اس خطہ میں نقطہ $N(a,b)$ پایا جاتا ہے جس پر $f_x = f_y = 0$ ہے۔ مزید فرض کریں کہ h اور k اتنے چھوٹے ہیں کہ نقطہ $S(a+h, y+k)$ اور S سے N تک قطع، R میں پائے جاتے ہیں۔ہم قطع NS کی مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں:

$$x = a + th, \quad y = b + tk, \quad 0 \le t \le 1$$

اگر $F(t) = f(a+th, b+tk)$ ہو تب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل ہو گا۔

$$F'(t) = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = hf_x + kf_y$$

چونکہ f_x اور f_y قابل تفرق ہیں (ان کے استمراری جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں) لہٰذا t کے لحاظ سے F' قابل تفرق ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y)\cdot k \\ &= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \qquad\qquad f_{xy} = f_{yx} \end{aligned}$$

چونکہ $[0,1]$ پر F اور F'' استمراری ہیں اور $(0,1)$ پر F' قابل تفرق ہے، ہم $n=2$ اور $a=0$ لیتے ہوئے 0 اور 1 کے بیچ کسی c کے لئے کلیہ ٹیلر سے

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c)\frac{(1-0)^2}{2}$$

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(c) \tag{13.61}$$

حاصل کر سکتے ہیں۔ مساوات 13.61 کو f کی صورت میں لکھنے سے

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = f(a,b) &+ hf_x(a,b) + kf_y(a,b) \\ &+ \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)} \end{aligned} \tag{13.62}$$

حاصل ہو گا۔چونکہ $f_x = f_y = 0$ ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)} \tag{13.63}$$

نقطہ (a,b) پر f کی انتہائی قیمت $f(a+h,b+k)-f(a,b)$ کی علامت تعین کرتی ہے جو مساوات 13.63 کے تحت درج ذیل کی علامت ہو گی۔

$$Q(c) = \left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)}$$

اب اگر $Q(0) \neq 0$ ہو تب کافی چھوٹی h اور چھوٹی k کے لئے $Q(c)$ کی علامت وہی ہو گی جو $Q(0)$ کی ہو گی۔ ہم

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hk f_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b) \tag{13.64}$$

کی علامت کی پیش گوئی (a,b) پر f_{xx} اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ کی علامتوں سے کر سکتے ہیں۔ مساوات 13.63 کے دونوں اطراف کو f_{xx} سے ضرب دینے کے بعد دائیں ہاتھ کی ترتیب نو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2 \tag{13.65}$$

مساوات 13.65 سے درج ذیل معلومات حاصل ہوتی ہیں۔

1. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب h اور k کی تمام غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتوں کے لئے $Q(0) < 0$ ہو گا اور (a,b) پر f کی مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت پائی جائے گی۔

2. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب h اور k کی تمام غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتوں کے لئے $Q(0) > 0$ ہو گا اور (a,b) پر f کی مقامی کم سے کم قیمت پائی جائے گی۔

3. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ہو تب h اور k کی ایسی غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتیں پائی جائیں گی جن کے لئے $Q(0) > 0$ ہو گا اور h اور k کی ایسی غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتیں بھی پائی جائیں گی جن کے لئے $Q(0) < 0$ ہو گا۔ نقطہ $N_0(a,b,f(a,b))$ کے بہت نزدیک سطح $z = f(x,y)$ پر N_0 سے بلندی پر اور اس سے نیچے نقطے پائے جائیں گے لہٰذا (a,b) پر f کا نقطہ زین ہو گا۔

4. اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ہو تب یہ پرکھ غیر نتیجہ کن ہو گا اور ہمیں کوئی دوسرا پرکھ درکار ہو گا۔ $Q(0)$ کی ممکنہ صفر قیمت ہمیں $Q(c)$ کی علامت جاننے سے روکتی ہے۔

خطی تخمین کا کلیہ خلل

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ (x_0,y_0) پر تفاعل $f(x,y)$ اور اس کی خطی تخمین $L(x,y)$ کی قیمتوں میں فرق $E(x,y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\left|E(x,y)\right| \leq \frac{1}{2}B(|x-x_0| + |y-y_0|)^2$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ بند **مستطیل خطہ** R جس کا مرکز (x_0, y_0) ایک ایسے کھلے سلسلہ میں پایا جاتا ہے جس کے ہر نقطہ پر f کے استمراری دو رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہیں۔ خطہ R میں $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی سب سے بڑی قیمت B ہے۔

ہمیں مساوات 13.62 مطلوبہ عدم مساوات دیتی ہے۔ ہم a اور b کی جگہ بالترتیب x_0 اور y_0 جبکہ h اور k کی جگہ بالترتیب $x - x_0$ اور $y - y_0$ پر کر کے ترتیب نو سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}_{\text{خط بندی } L(x,y)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\Big((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy}\Big)\Big|_{(x_0 + c(x - x_0), y_0 + c(y - y_0))}}_{\text{خلل } E(x,y)}$$

اس مساوات سے ہمیں درج ذیل معلوم ہوتا ہے۔

$$|E| \le \frac{1}{2}\Big(|x - x_0|^2 |f_{xx}| + 2|x - x_0||y - y_0| \left|f_{xy}\right| + |y - y_0|^2 \left|f_{yy}\right|\Big)$$

یوں اگر R پر $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی قیمتوں کی بالائی حد بندی B ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} |E| &\le \frac{1}{2}\Big(|x - x_0|^2 B + 2|x - x_0||y - y_0| B + |y - y_0|^2 B\Big) \\ &\le \frac{1}{2} B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \end{aligned}$$

دو متغیری تفاعل کے لئے کلیہ ٹیلر

ہم $f(x,y)$ پر درج ذیل **عاملین**[51] لاگو کرتے ہوئے F' اور F'' کے لئے، پہلے اخذ کیے گئے، کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big), \quad \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

یہ عاملین زیادہ عمومی کلیہ

$$F^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} F(t) = \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^n f(x,y) \tag{13.66}$$

---

[51] operators

$F(t)$ پر $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ لاگو کرنا $f(x,y)$ پر درج ذیل عامل، مسئلہ ثنائی سے پھیلانے کے بعد، لاگو کرنے کے مترادف ہے۔ کے پہلے دو کلیات ہیں جو کہتا ہے کہ

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

اگر ایک مستطیل، جس کا مرکز (a,b) ہو، میں f کے $n+1$ رتبہ تک جزوی تفرقات ہر نقطہ پر استمراری ہوں، تب ہم $F(t)$ کے کلیہ ٹیلر کو وسعت دے کر

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{F^{(n)}}{n!}t^n+\text{باقی}$$

لکھتے ہوئے $t=1$ لے کر

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{F''(0)}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\text{باقی}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس آخری تسلسل کے دائیں ہاتھ اولین n تفرقات میں $t=0$ پر مساوات 13.66 سے حاصل مطابقتی تعلقات پر کر کے موزوں باقی جزو جمع کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

نقطہ (a,b) پر $f(x,y)$ کے لئے کلیہ ٹیلر

(13.67)
$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&f(a,b)+(hf_x+kf_y)|_{(a,b)}+\frac{1}{2!}(h^2f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2f_{yy})|_{(a,b)}\\&+\frac{1}{3!}(h^2f_{xxx}+3h^2kf_{xxy}+3hk^2f_{xyy}+k^3f_{yyy})|_{(a,b)}+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\bigg|_{(a,b)}+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\bigg|_{(a+ch,b+ck)}\end{aligned}$$

اولین n تفرقی اجزاء کی قیمتیں (a,b) پر حاصل کی جاتی ہیں۔ آخری جزو کی قیمت (a,b) اور $(a+h,b+k)$ کے بیچ قطع پر کسی نقطہ $(a+ch,b+ck)$ پر حاصل کی جاتی ہے۔

اگر $(a,b)=(0,0)$ ہو اور ہم h اور k کو غیر تابع متغیرات تصور کر کے بالترتیب x اور y سے ظاہر کریں تب مساوات 13.67 درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

مبدا پر $f(x,y)$ کے لئے کلیہ ٹیلر

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}) \\
&+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\bigg|_{(cx,cy)}
\end{aligned}
\tag{13.68}
$$

اولین n تفرقی اجزاء کی قیمتیں $(0,0)$ پر حاصل کی جاتی ہیں۔ آخری جو کی قیمت مبدا سے (x,y) تک قطع پر کسی نقطہ (cx,cy) پر حاصل کی جاتی ہے۔

کلیہ ٹیلر ہمیں دو متغیری تفاعل کی کثیر رکنی تخمین مہیا کرتا ہے۔ اولین n تفرقی اجزاء کثیر رکنی دیتے ہیں جبکہ آخری جزو تخمینی خلل دیتا ہے۔ کلیہ ٹیلر کے اولین تین اجزاء تفاعل کی خط بندی دیتے ہیں۔ خط بندی سے بہتر نتائج کے حصول کے لئے ہم مزید اجزاء شامل کرتے ہیں۔

مثال 13.60: تفاعل $f(x,y) = \sin x \sin y$ کی مبدا کے قریب مربعی (دو درجی) تخمین تلاش کریں۔ یہ تخمین $|x| \le 0.1$ اور $|y| \le 0.1$ کی صورت میں کتنی درست ہو گی؟

حل: ہم مساوات 13.68 میں $n = 2$ لیتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy}) \\
&+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(cx,yx)}
\end{aligned}
$$

اس میں

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= \sin x \sin y|_{(0,0)} = 0, & f_{xx}(0,0,) &= -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0, \\
f_x(0,0) &= \cos x \sin y|_{(0,0)} = 0, & f_{xy}(0,0) &= \cos x \cos y|_{(0,0)} = 1, \\
f_y(0,0) &= \sin x \cos y|_{(0,0)} = 0, & f_{yy}(0,0) &= -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0
\end{aligned}
$$

لیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = \sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)), \\
&f(x,y) = \sin x \sin y \approx xy
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس تخمین میں خلل

$$E(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(cx,cy)}$$

ہو گا۔ چونکہ تین رتبی تفرقات $\sin$ اور $\cos$ کے حاصل ضرب ہیں لہٰذا ان کی مطلق قیمتیں کسی صورت 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہیں۔ مزید $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ ہیں لہٰذا

$$E(x,y) \leq \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) \leq \frac{8}{6}(0.1)^3 \leq 0.00134 \quad \text{(اوپر کو پورا پورا)}$$

ہو گا۔ اگر $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ ہوں تب خلل کسی صورت 0.00134 سے تجاوز نہیں کرے گا۔ □

سوالات

مربعی اور کعبی تخمین

سوال 13.493 تا سوال 13.502 میں مبدا پر کلیہ ٹیلر استعمال کرتے ہوئے مبدا کے قریب f کی مربعی اور کعبی تخمین تلاش کریں۔

سوال 13.493: $f(x,y) = xe^y$

سوال 13.494: $f(x,y) = e^x \cos y$

سوال 13.495: $f(x,y) = y \sin x$

سوال 13.496: $f(x,y) = \sin x \cos y$

سوال 13.497: $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

سوال 13.498: $f(x,y) = \ln(2x+y+1)$

سوال 13.499: $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

سوال 13.500: $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$

سوال 13.501: $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y}$

سوال 13.502: $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$

سوال 13.503: مبدا پر $f(x,y) = \cos x \cos y$ کی مربعی تخمین کلیہ ٹیلر کی مدد سے حاصل کریں۔ تخمین کی خلل $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

سوال 13.504: مبدا پر $f(x,y) = e^x \sin y$ کی مربعی تخمین کلیہ ٹیلر کی مدد سے حاصل کریں۔ تخمین کی خلل $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

باب 14

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

14.1 دوہرا تکملات

ہم xy مستوی میں محدود خطہ پر استمراری تفاعل $f(x, y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دو گنا) تکمل اور باب 5 میں متعارف کردہ ایک گنا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جا سکتی ہے۔

مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x, y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

ہم تصور میں R پر x اور y محور کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.1)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{14.1}$$

شکل 14.1: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔

شکل 14.2: دوہرا تکملات بھی ایک گنا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔

اگر پورے R میں f استمراری ہو، تب، ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے سے مساوات 14.1 میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا **دوہرا تکمل**[1] کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \quad \text{یا} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

لکھا جاتا ہے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k \tag{14.2}$$

واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a,b]$ اور $[c,d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات 14.2 میں حد کی قیمت، نا تو رقبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کا حد آخر میں وہی ایک ہو گا۔استمراری f کے لئے اس حد کی وجودیت اور یکتائی کے ثبوت اعلیٰ نصاب میں دیے جاتے ہیں۔دوہرا تکمل کی وجودیت کے لئے f کا استمرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

دوہرا تکملات کے خواص

ایک گنا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لئے کار آمد ثابت ہوتے ہیں۔

ا. $\iint\limits_R kf(x,y)\,\mathrm{d}S = k\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

---
[1] double integral

ب. $\iint\limits_R (f(x,y) \mp g(x,y))\, \mathrm{d}S = \iint\limits_R f(x,y)\, \mathrm{d}S \mp \iint\limits_R g(x,y)\, \mathrm{d}S$

ج. اگر R پر $f(x,y) \geq 0$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\, \mathrm{d}S \geq 0$ ہو گا۔

د. اگر R پر $f(x,y) \geq g(x,y)$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\, \mathrm{d}S \geq \iint\limits_R g(x,y)\, \mathrm{d}S$ ہو گا۔

یہ خواص ایک گنا تکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ 5.6)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

ھ. $\iint\limits_R f(x,y)\, \mathrm{d}S = \int\limits_{R_1} f(x,y)\, \mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\, \mathrm{d}S$

جہاں ایک دوسرے کو نا ڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل 14.2)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا تکملات بطور حجم

مثبت $f(x,y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا تکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح $z = f(x,y)$ ہو گی (شکل 14.3)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور نما کا حجم ہو گا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہو گی۔ اس حجم کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{حجم} = \lim J_n = \iint\limits_R f(x,y)\, \mathrm{d}S \tag{14.3}$$

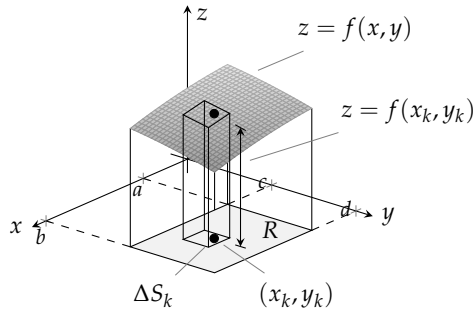
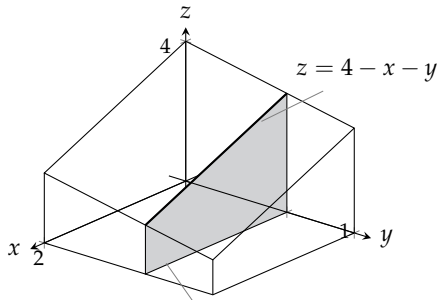
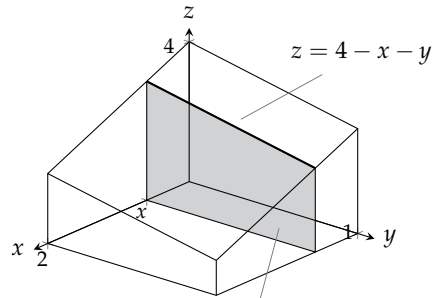
جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج ، باب 6 میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔

دوہرا تکمل کے حصول کا مسئلہ فوبنی

فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ 6.2 کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی ٹکیاں لیں (شکل 14.4) تب حجم

$$\int_{x=0}^{x=2} S(x)\, \mathrm{d}x \tag{14.4}$$

ہو گا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ہم x کی ہر قیمت کے لئے درج ذیل تکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, \mathrm{d}y \tag{14.5}$$

شکل 14.3: ٹھوس جسم کو تخمینی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل ہو گا۔

شکل 14.5: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لئے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

شکل 14.4: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لئے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات 14.3 اور مساوات 14.4 کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

(14.6)
$$\begin{aligned} \text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \Big(\frac{7}{2} - x \Big)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5 \end{aligned}$$

اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے **بارہا تکمل**[2] یا **اعادہ تکمل**[3] کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x = 0$ تا $x = 2$ لیں۔

اگر ہم محور y کے عمودی ٹکیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل 14.5)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی عمودی تراش رقبہ، y کا تفاعل ہو گا:

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y \tag{14.7}$$

یوں پورے جسم کا حجم

$$\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\,\mathrm{d}y = \left[6y - y^2 \right]_0^1 = 5 \tag{14.8}$$

ہو گا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

---

[2] repeated integral
[3] iterated integral

لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4-x-y$ کا تکمل $x=0$ تا $x=2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y=0$ تا $y=1$ لیں۔ اس بار ہم بارہا تکمل کے حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات 14.6 میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R: 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint\limits_R (4-x-y)\,\mathrm{d}S$$

اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے، بارہا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (جناب فوبنی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

مسئلہ 14.1: **مسئلہ فوبنی (پہلا روپ)**
اگر مستطیل خطہ $R: a \le x \le b, c \le y \le d$ پر $f(x,y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

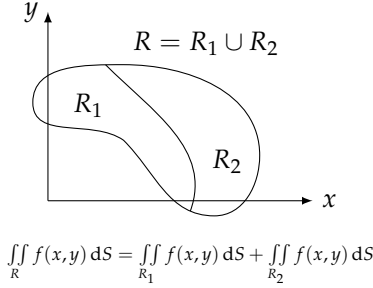
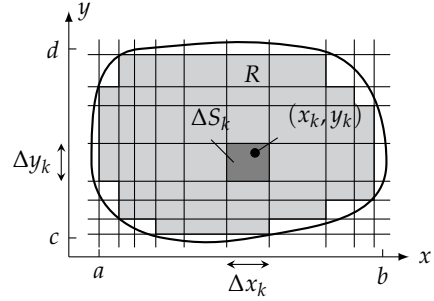
مسئلہ فوبنی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے لحاظ سے تکمل لے سکتے ہیں۔

مسئلہ فوبنی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بارہا تکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کار آمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم مثال 14.3 میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم x محور یا y محور کے عمودی سطحیں لے کر ٹکیاں کاٹ سکتے ہیں۔

مثال 14.1: خطہ $R: 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1$ میں $f(x,y) = 1-6x^2y$ کے دوہرا تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل: مسئلہ فوبنی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^1 \int_0^2 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left[x-2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^1 (2-16y)\,\mathrm{d}y = \left[2y-8y^2\right]_{-1}^1 = 4$$

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

شکل 14.7: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لئے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔

شکل 14.6: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔

تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-1}^1 (1 - 6x^2 y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \Big[y - 3x^2y^2\Big]_{y=-1}^{y=1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 \Big[(1 - 3x^2) - (-1 - 3x^2)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 4\end{aligned}$$

□

آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا تکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسما[4] میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

میکسما احکامات	درکار دوہرا تکمل
integrate(integrate($x^2 * y, x$), y);	$\iint x^2 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
integrate(integrate($x * \cos(y), x, 0, 1$), $y, -\%pi/3, \%pi/4$);	$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x \cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات

محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل 14.6) لیکن جزوی مجموعہ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم

[4] wxMaxima

ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات 14.1) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے ہیں۔البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختارانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کا حد موجود ہو گا۔ ہم اس حد کو R پر f کا **دوہرا تکمل** کہتے ہیں:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S\to 0}\sum f(x,y_k)\Delta S_k$$

یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا تکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لئے شکل 14.7 دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

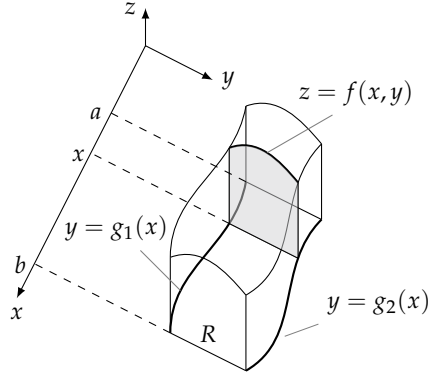
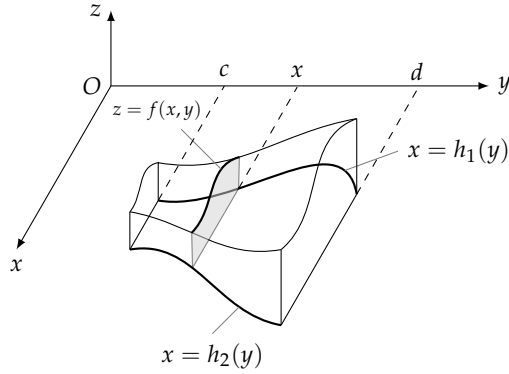
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $z = f(x,y)$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کرتے ہیں۔

اگر شکل 14.8 میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$ ، "زیریں" حد $y = g_1(x)$ ، اور اطراف کے حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے ہیں

$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیتے ہوئے بارہا تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{14.9}$$

شکل 14.8: سایہ دار انتصابی ٹکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لئے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیں گے۔

شکل 14.9: سایہ دار ٹکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ ہے۔ ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔

اسی طرح اگر شکل 14.9 میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کے حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$ ہوں تب ٹکیوں کی ترکیب سے بارہا تکمل سے حجم تلاش کیا جا سکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \tag{14.10}$$

ہم نے دیکھا کہ مساوات 14.9 اور مساوات 14.9، جو R پر f کے دوہرا تکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

مسئلہ 14.2: **مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)**
فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

ا. اگر R کو $a \le x \le b$ ، $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a, b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y) \,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

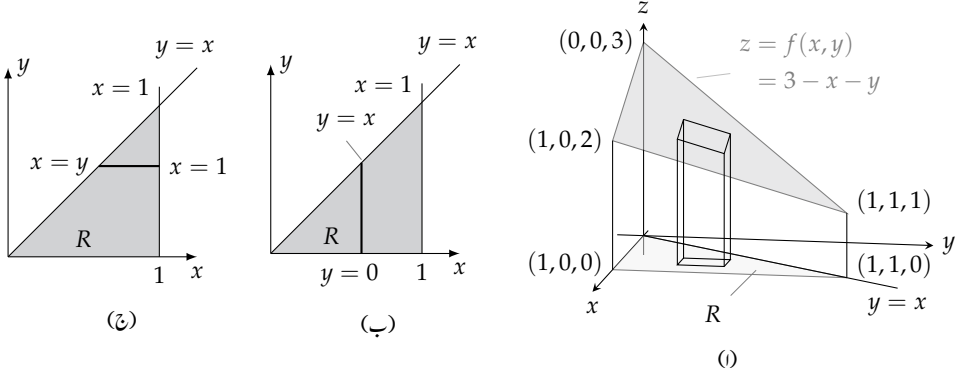
ب. اگر R کو $c \le y \le d$ ، $h_1(y) \le y \le h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c, d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x, y) \,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

مثال 14.2: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x ، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا راس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x, y) = 3 - x - y$$

حل: ہم دیکھتے ہیں (شکل 14.10-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لئے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہو گی (شکل 14.10-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1 \end{aligned}$$

شکل 14.10: منشور کا حجم (مثال 14.2)

تکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہو گا (شکل 14.10-ج)۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1
\end{aligned}$$

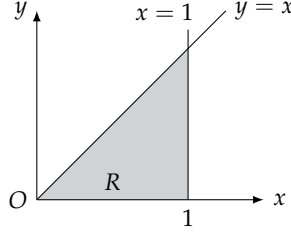
دونوں تکملات کے جواب ایک جیسے ہیں۔ ہمیں یہی توقع تھی۔ □

اگرچہ مسئلہ فوبنی ہمیں یقین دھیانی کرتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، حقیقت میں ایک تکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.3: مستوی xy میں محور x، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}S$$

حل: تکمل کا خطہ شکل 14.11 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لیں تب

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(y \frac{\sin x}{x}\right]_{y=0}^{y=x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= -\cos(1) + 1 \approx 0.46
\end{aligned}$$

شکل 14.11: تکمل کا دائرہ کار برائے مثال 14.3

ہو گا۔ اگر ہم تکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x)/x) \, \mathrm{d}x$ کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمل لینے سے ہمیں آسانی ہو گی لہٰذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □

تکمل کی حدوں کی تلاش

دوہرا تکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(ا) خطہ R پر $\iint_R f(x,y) \, \mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لینے کے لئے درج ذیل اقدام کریں۔

1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.12-ا)۔

2. تکمل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی y حدیں ہوں گی (شکل 14.12-ب)۔

3. تکمل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل 14.12-ب)۔ یہ قیمتیں تکمل کی x حدیں ہوں گی۔

(ا) تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔

(ب) خطہ R میں جس نقاط پر انتصابی لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتصابی لکیروں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے x حد ہوں گے۔

شکل 14.12: تکمل کے حدوں کی تلاش۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

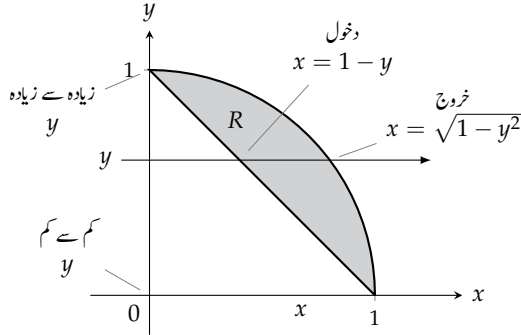
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

(ب) اسی دوہرا تکمل کو بطور بارہا تکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتصابی لکیروں کی بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل 14.13)۔ تکمل درج ذیل ہو گا۔

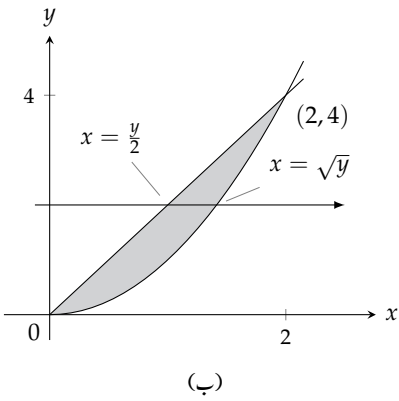
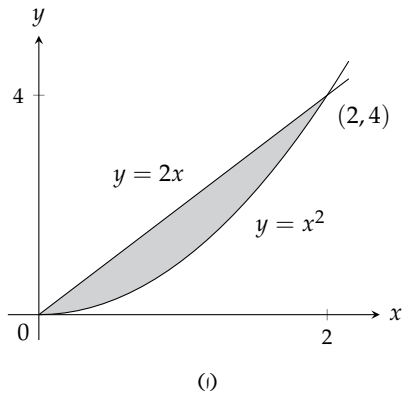
$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

مثال 14.4: درج ذیل تکمل کے خطہ تکمل کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی تکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل: تکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \le y \le 2x$ اور $0 \le x \le 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x = 0$ ، خط $x = 2$ اور منحنیات $y = x^2$ اور $y = 2x$ ہوں گی (شکل 14.14-ا)۔

شکل 14.13: بارہا تکمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔

(ب)

(ا)

شکل 14.14: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال 14.4)

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لئے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہو گا (شکل 14.14-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔ □

سوالات

تکمل کے خطہ کی تلاش اور دوہرا تکملات

سوال 14.1 تا سوال 14.10 میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.1: $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.2: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.3: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.4: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.5: $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.6: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.7: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.8: $\int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.9: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.10: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.11 تا سوال 14.16 میں f کو دیے ہوئے خطہ پر تکمل کریں۔

سوال 14.11: ربع اول میں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{x}{y}$ کا تکمل۔

سوال 14.12: چکور $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2$ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کا تکمل۔

سوال 14.13: مثلث خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں میں تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ کا تکمل۔

سوال 14.14: مستطیل $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$ پر تفاعل $f(x,y) = y \cos xy$ کا تکمل۔

سوال 14.15: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u,v) = v - \sqrt{u}$ کا تکمل۔

سوال 14.16: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s,t) = e^s \ln t$ کا تکمل۔

سوال 14.17 تا سوال 14.20 میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 14.17: $\int_{-2}^{0} \int_{v}^{-v} 2 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}v$ مستوی pv

سوال 14.18: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$ مستوی st

سوال 14.19: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{0}^{\sec t} 3 \cos t \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t$ مستوی tu

سوال 14.20: $\int_{0}^{3} \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ مستوی uv

تکمل کی الٹ ترتیب

سوال 14.21 تا سوال 14.30 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمل لکھیں۔

سوال 14.21: $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.22: $\int_{0}^{2} \int_{y-2}^{0} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.23: $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.24: $\int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.25: $\int_0^1 \int_1^{e^x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.26: $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.27: $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} 16x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.28: $\int_0^2 \int_0^{4-y^2} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.29: $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.30: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

دوہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 14.31 تا سوال 14.40 میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.31: $\int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.32: $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.33: $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.34: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.35: $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.36: $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.37: $\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2}\cos(16\pi x^5)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.38: $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{y^4+1}$

سوال 14.39: $\iint\limits_R (y-2x^2)\,\mathrm{d}S$ جہاں R چکور $|x|+|y|=1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

سوال 14.40: $\iint\limits_R xy\,\mathrm{d}S$ جہاں لکیر $y=x$ ، $y=2x$ اور $x+y=2$ کے بیچ خطہ R ہے۔

سطح $z=f(x,y)$ کے نیچے حجم

سوال 14.41: مستوی xy میں لکیر $y=x$ ، $x=0$ اور $x+y=2$ کے بیچ مثلث کے اور قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ کے نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.42: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z=x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $x=y$ اور قطع مکافی $y=2-x^2$ کے بیچ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.43: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y=3x$ اور قطع مکافی $y=4-x^2$ کے بیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر مستوی $z=x+4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.44: ثُمن اول میں محددی مستویات، بیلن $x^2+y^2=4$ اور مستوی $z+y=3$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.45: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x=3$ اور قطع مکافی بیلن $z=4-y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.46: ثُمن اول سے سطح $z=4-x^2-y$ ایک ٹھوس جسم کاٹتی ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.47: ثُمن اول سے بیلن $z=12-3y^2$ اور مستوی $x+y=2$ ایک پچر کاٹتے ہیں۔ اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.48: چکور ستون $|x|+|y|\le 1$ سے مستویات $z=0$ اور $3x+z=3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.49: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x=2$ اور $x=1$ ، اطراف سے بیلن $y=\mp\frac{1}{x}$ ، اوپر سے مستوی $z=x+1$ اور نیچے سے مستوی $z=0$ میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.50: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x=\pm\frac{\pi}{3}$ ، اطراف سے بیلن $y=\mp\sec x$ ، اوپر سے بیلن $z=1+y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوں پر تکملات

سوال 14.51 تا سوال 14.54 میں غیر مناسب تکملات کو بارہا تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.51: $\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.52: $\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}(2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.53: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.54: $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

دوہرا تکملات کی تخمین

سوال 14.55 اور سوال 14.56 میں تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کے خطہ R کو انتصابی خط $x=a$ اور افقی خط $y=c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k,y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا تکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S\approx\sum_{k=1}^{n}f(x_k,y_k)\Delta S_k$$

سوال 14.55: تفاعل $f(x,y)=x+y$ اور خطہ R ، جو نصف دائرہ $y=\sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔ خانہ بندی $x=-1,-1/2,0,1/4,1/2,1$ اور $y=0,1/2,1$ لیں۔ نقطہ (x_k,y_k) کو k واں خانے کا نچلا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال 14.56: تفاعل $f(x,y)=x+2y$ ہے جبکہ اور دائرہ $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔ خانہ بندی $x=1,3/2,2,5/2,3$ اور $y=2,5/2,3,7/2,4$ لیں۔ بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k,y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.57: قرص $x^2+y^2 \le 4$ کو شعاع $\theta=\frac{\pi}{6}$ اور $\theta=\frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}$ کا تکمل لیں۔

سوال 14.58: لا متناہی مستطیل $2 \le x \le \infty,\ 0 \le y \le 2$ پر $f(x,y)=\frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال 14.59: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ xy مستوی ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H=\int_0^1\int_0^y (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_1^2\int_0^{2-y}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بارہا تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال 14.60: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2(\tan^{-1}\pi x-\tan^{-1}x)\,\mathrm{d}x$$

سوال 14.61: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (4-x^2-2y^2)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.62: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint\limits_R (x^2+y^2-9)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.63: کیا استمراری تفاعل $f(x,y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیں۔

سوال 14.64: ایک مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(2,0)$ اور $(1,2)$ ہوں پر استمراری تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.65: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

سوال 14.66: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1\int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 14.67 تا سوال 14.70 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال 14.67: $\int_1^3\int_1^x \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.68: $\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.69: $\int_0^1\int_0^1 \tan^{-1} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.70: $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

14.2 رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور **حرکت دواری**[5] کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب 6 کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لئے حساب کر پائیں گے۔

[5] gyration

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x,y) = 1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k \tag{14.11}$$

حاصل ہو گی۔ یہ تخمینی طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل 14.15 میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کو ڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\text{رقبہ} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \iint_R \mathrm{d}S \tag{14.12}$$

تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint_R \mathrm{d}S \tag{14.13}$$

□

اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی یک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

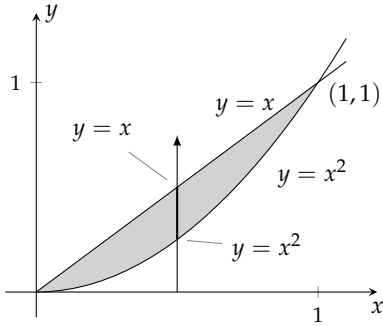
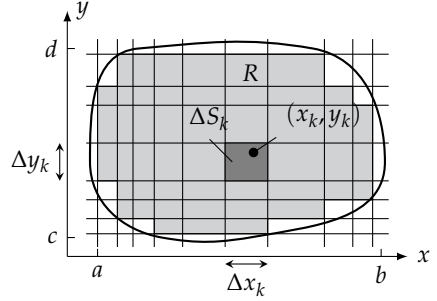
مساوات 14.13 میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x,y) = 1$ لیتے ہیں۔

مثال 14.5: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل 14.16) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

□

مثال 14.6: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = x + 2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

شکل 14.15: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کی اندرون کی خانہ بندی ہے۔

شکل 14.16: قطع مکافی اور لکیر کے بیچ رقبہ (مثال 14.5)۔

حل: اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ تکملات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ا)۔

$$S = \iint\limits_{R_1} \mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس کے برعکس تکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک تکمل

$$S = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

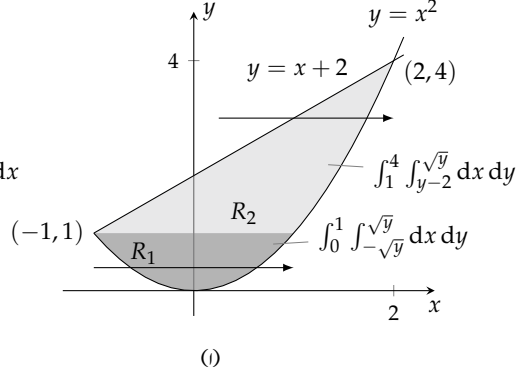
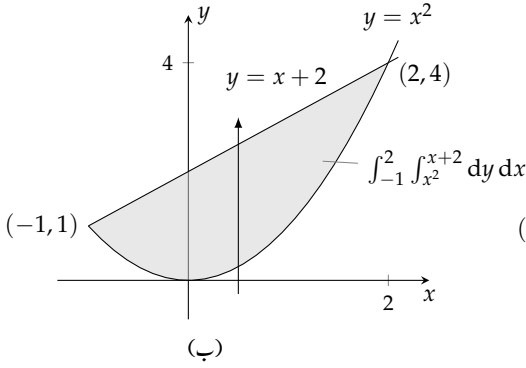
کی ضرورت پیش آئے گی (شکل 14.17-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

□

اوسط قیمت

بند وقفہ پر قابل تکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل تکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$R \text{ پر } f \text{ کی \textbf{اوسط قیمت}} = \frac{1}{R \text{ کا رقبہ}} \iint\limits_R f\,\mathrm{d}S \tag{14.14}$$

شکل 14.17: (ا) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب رقبے کے حصول کے لئے دو تکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے صرف ایک تکمل سے حاصل ہو گا۔

اگر خطہ R پر باریک (پتلی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

مثال 14.7: مستطیل $R: 0 \le x \le \pi,\, 0 \le y \le 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: خطہ R پر f کا تکمل

$$\int_0^\pi \int_0^1 x \cos xy \,dx\,dy = \int_0^\pi \Big[\sin xy\Big]_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^\pi (\sin x - 0)\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi 1 + 1 = 2$$

ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔ □

مراکز کمیت کے معیار اثر اول اور دوم

باریک چادروں کی کمیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لئے ہم باب 6 کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی بنا اب ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

مستوی xy میں باریک چادر کی کمیت، معیار اثر اول[6]، معیار اثر دوم[7] اور رداس دوار[8] کے کلیات

کثافت: $\delta(x,y)$

کمیت: $M = \iint \delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

معیار اثر اول: $M_x = \iint y\delta(x,y)\,\mathrm{d}S, \quad M_y = \iint x\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$ بلحاظ محور x

$$I_y = \int x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$$ بلحاظ محور y

$$I_L = \iint r^2(x,y)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S,$$ (جہاں L سے (x,y) کا فاصلہ $r(x,y)$ ہے) بلحاظ خط L

$$I_0 = \int (x^2+y^2)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S = I_x + I_y$$ (قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا

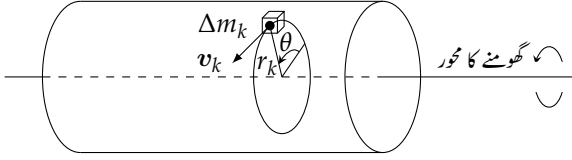
رداس دوار:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$ بلحاظ محور x

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}}$$ بلحاظ محور y

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$$ بلحاظ مبدا

---

[6] first moment
[7] second moment
[8] radius of gyration

شکل 14.18: گھومتے ہوئے دھرے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں، x اور y ، کا مربع لیتا ہے۔

معیار اثر I_0 کو **قطبی معیار اثر**[9] بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x, y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب $x^2 + y^2$ ، جو نمائندہ نقطہ (x, y) سے مبدا تک فاصلہ ہے، کا تکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہٰذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماثل $I_z = I_x + I_y$ **مسئلہ عمودی محور**[10] کہلاتا ہے۔)

رداس دوار R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت منجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار ا اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تاکہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے لئے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

---

[9] polar moment
[10] Perpendicular Axis Theorem

اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل 14.18)۔ اگر دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ریڈیئن فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

سے حرکت کرے گا۔اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{14.15}$$

ہو گی۔ دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{14.16}$$

ہو گی۔ دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے تکمل

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.17}$$

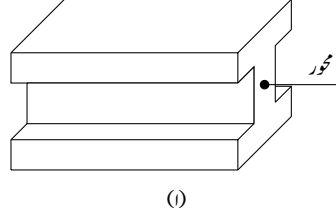
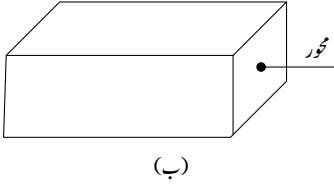
لکھا جا سکتا ہے۔ جزو

$$I = \int r^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.18}$$

درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.17 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{14.19}$$

ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لئے $\frac{1}{2}I\omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو روکنے کے لئے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لئے اس کو $\frac{1}{2}mv^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس کو روکنے کے لئے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

بوجھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاو کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑا پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔

شکل 14.19: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک جیسا ہے لیکن شہتیر-ا کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہٰذا شہتیر-ا زیادہ اکڑ ہو گا۔

یہی وجہ ہے کہ ہم شکل 14.19-ا میں دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں نا کہ ایسے شہتیر جن کا عمودی تراش چکور ہو (شکل 14.19-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں لگر زیادہ تر کمیت کو افقی محور سے دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لئے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپکا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی بنا ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب کریں۔ قلم اور سکوں کی کمیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

مثال 14.8: محور x ، لکیر $x = 1$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ تکونی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کمیت، پہلا معیار اثر، مرکز کمیت، جمودی معیار اثر اور محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

حل: ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل 14.20) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمل کے حد جان سکیں۔

چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[6xy + 3y^2 + 6y\right]_{y=0}^{y=2x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (24x^2 + 12x)\,\mathrm{d}x = \left[8x^3 + 6x^2\right]_0^1 = 14
\end{aligned}$$

محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy+6y^2+6y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big[3xy^2+2y^3+3y^2\Big]_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (28x^3+12x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[7x^4+4x^3\Big]_0^1 = 11\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 10$$

مرکز کمیت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2+6y^3+6y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big[2xy^3+\frac{3}{2}y^4+2y^3\Big]_{y=0}^{y=2x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (40x^4+16x^3)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[8x^5+4x^4\Big]_0^1 = 12\end{aligned}$$

اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{39}{5}$$

ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$

تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}R_x &= \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}} \\ R_y &= \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}} \\ R_0 &= \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}\end{aligned}$$

شکل 14.20: خطہ برائے مثال 14.8

شکل 14.21: خطہ برائے مثال 14.9

□

جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کمیت کا دارومدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت عموماً شکل کا **وسطانی مرکز**[11] پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کمیت سے تقسیم کرتے ہوئے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کرتے ہیں۔

مثال 14.9: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

حل: ہم خطے کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد جانتے ہیں (شکل 14.21)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\Big) \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

[11]centroid

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔ □

سوالات

رقبہ بذریعہ دوہرا تکمل

سوال 14.71 تا سوال 14.78 میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بارہا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.71: محددی محور اور لکیر $x + y = 2$

سوال 14.72: لکیر $x = 0$ ، $y = 2x$ اور $y = 4$

سوال 14.73: قطع مکافی $x = -y^2$ اور لکیر $y = x + 2$

سوال 14.74: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $y = -x$

سوال 14.75: منحنی $y = e^x$ اور لکیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

سوال 14.76: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2\ln x$ اور لکیر $x = e$

سوال 14.77: قطع مکافی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

سوال 14.78: قطع مکافی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

سوال 14.79 تا سوال 14.84 میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکمل یا تکملات کے مجموعوں کی کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.79: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.80: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.81: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.82: $\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

سوال 14.83: $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال 14.84: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

اوسط قیمت

سوال 14.85: تفاعل $f(x,y) = \sin(x+y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$

ب. مستطیل $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi/2$

سوال 14.86: کیا چکور $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ میں $f(x,y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.87: چکور $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$ میں قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.88: چکور $\ln 2 \le x \le 2\ln 2, \ln 2 \le y \le 2\ln 2$ میں $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال 14.89: ربع اول میں قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $x = 0$ ، $y = x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.90: ربع اول میں محددی محور اور لکیر $x = 3$ اور $y = 3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.91: ربع اول میں محور x ، قطع مکافی $y^2 = 2x$ اور لکیر $x + y = 4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.92: ربع اول سے لکیر $x + y = 3$ ایک تکونی خطہ کاٹتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.93: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.94: ربع اول میں قطع مکافی $y = 6x - x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔ اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.95: ربع اول سے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.96: دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال 14.97: محور x اور قوس $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.98: محور x اور منحنی $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi \le x \le 2\pi$ پر کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.99: لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز
ربع دوم میں محددی محور اور منحنی $y = e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال 14.100: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر
ربع اول میں منحنی $y = e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta = 1$ کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 14.101: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $x + y = 0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = x + y$ ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.102: ترخیم $x^2 + 4y^2 = 12$ سے قطع مکافی $x = 4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے، اس کی کثافت $\delta(x, y) = 5x$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.103: محور y اور لکیر $y = x$ اور $y = 2 - x$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ ہے۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.104: منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کی کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.105: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔ اس کی مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.106: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.107: قطع مکافی $y = x^2$، محور x اور لکیر $x = \mp 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.108: خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.109: لکیر $y = x$ ، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال 14.110: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال 14.109 کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.111: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \le x \le 5,\ -2 \le y \le 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال 14.112: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہو گی؟

سوال 14.113: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن $45°$ تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.114: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا
ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر لکیر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, dy \, dx$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال 14.115: مستوی xy میں لکیر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.116: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کمیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال 14.117: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چادر منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کمیت سوال 14.104 کے چادر کی کمیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل δ کی قیمت کا اس خطہ پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال 14.118: دائرہ $x^2 + (y-1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خطہ پر کمیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.20}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

سوال 14.119: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت
(ا) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-ا کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔ (اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال 14.120: (ا) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال 14.8 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-ا کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ 6.10 کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل دیگا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.21}$$

مساوات 14.21 کو **کلیہ پاپس**[12] کہتے ہیں۔ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متناہی تعداد کی) چادروں کے لئے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.22}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

سوال 14.121: کلیہ پاپس (مساوات 14.21) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو ترسیم کر کے ان کے مراکز کمیت $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ کی نشاندہی کریں۔ محددی محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال 14.122: ریاضی (الکراجی) ماخوذ اور مساوات 14.21 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لئے مساوات 14.22 مطمئن ہو گا۔

سوال 14.123: فرض کریں A ، B اور C تین اشکال ہیں (شکل 14.22-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

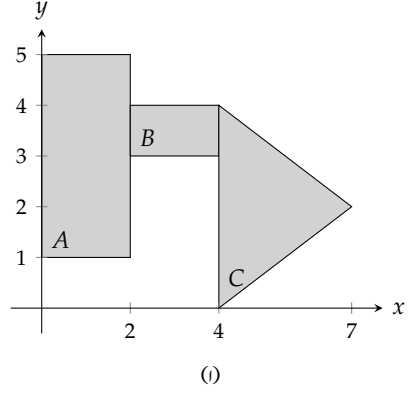
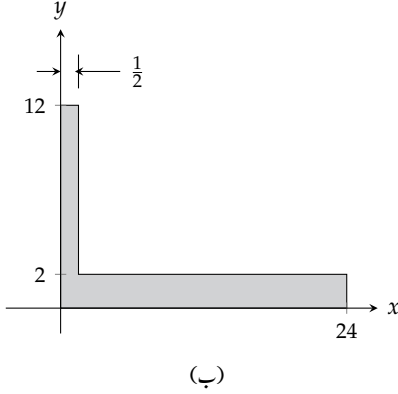
ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 14.124: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل 14.22-ب)۔

سوال 14.125: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔ اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (ا) T اور D کی مشترک سرحد پر (ب) T کے اندر ہونے کے لئے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

سوال 14.126: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چکور اور مثلث ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں۔) $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال 14.125 کے جواب کے ساتھ کریں۔

---

[12] Pappus's formula

شکل 14.22: اشکال برائے سوال 14.123 اور سوال 14.124

14.3 دوہرا تکملات کا قطبی روپ

بعض اوقات تکمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان تکملات کی قیمت کا حصول دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

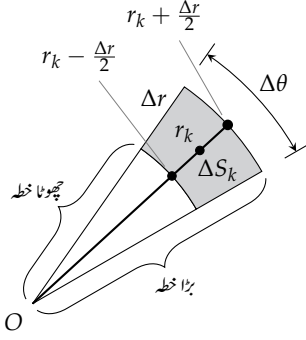
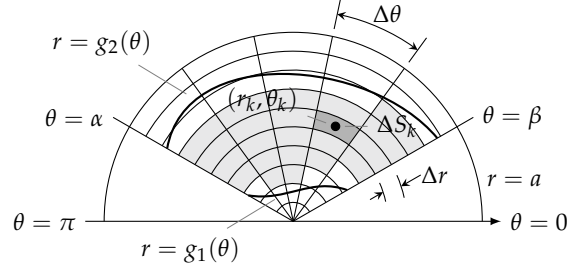
قطبی روپ میں تکملات

مستوی xy میں دوہرا تکمل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محددی محوروں کے متوازی ہوں۔اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جا سکتے ہیں۔کارتیسی محدد میں مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محددی نظام میں "قطبی مستطیل" قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جا سکتے ہیں۔

فرض کریں تفاعل $f(r,\theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta=\alpha$ اور $\theta=\beta$ اور استمراری منحنیات $r=g_1(\theta)$ اور $r=g_2(\theta)$ ہیں۔مزید α اور β کے بیچ ہر قیمت کے لئے $0\le g_1(\theta)\le g_2(\theta)\le a$ ہے۔ یوں R پنکھا نما خطہ Q میں، جس کو عدم مساوات $0\le r\le a,\ \alpha\le\theta\le\beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا (شکل 14.23)۔

ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr ، $2\Delta r$ ، $\cdots$ ، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r=\frac{a}{m}$ ہے۔ان شعاع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\Delta\theta=\frac{\beta-\alpha}{m'}$ ہے۔

$$\theta=\alpha,\ \theta=\alpha+\Delta\theta,\ \theta=\alpha+2\Delta\theta,\cdots,\theta=\alpha+m'\Delta\theta=\beta$$

یہ شعاع اور قوسین Q کو "قطبی مستطیلوں" میں تقسیم کرتے ہیں۔

شکل 14.24: سایہ دار خطے کا رقبہ ΔS_k حاصل کرنے کے لئے بڑے خطے سے چھوٹے خطے کا رقبہ منفی کریں۔

شکل 14.23: خطہ $R:\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ پنکھا نما خطہ $Q:\ 0 \le r \le a$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ میں پایا جاتا ہے۔ خطہ Q کی خانہ بندی شعاعوں اور دائری قوسین سے کرتے ہوئے R کی خانہ بندی کی جاتی ہے۔

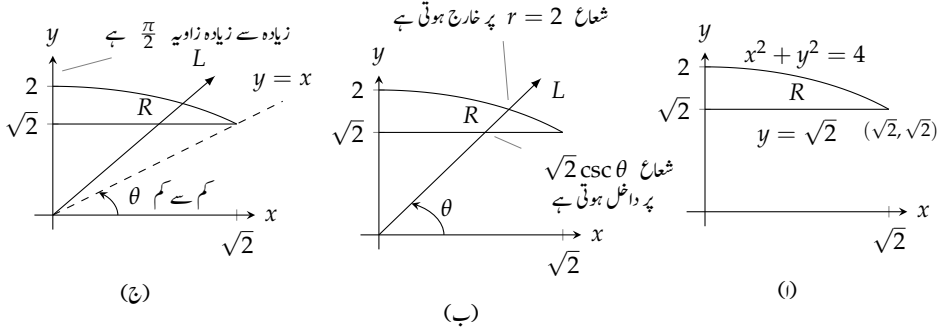
ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ، ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو (r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کی اوسط رداس کے قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹتی ہو۔ ہم اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r,\theta)\Delta S_n \tag{14.23}$$

اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta\theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد R پر f کا دوہرا تکمل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$$

اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta\theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے (شکل 14.24)۔ ان قوسین سے مبدا تک دائری تکونی خطوں کے رقبے

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned} \tag{14.24}$$

شکل 14.25: قطبی محدد میں تکمل کی قیمت کے قدم۔

ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned}\Delta S_k &= \text{بیرونی تکونی رقبہ} - \text{اندرونی تکونی رقبہ}\\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r_k\Delta\theta\end{aligned}$$

اس نتیجہ کو مساوات 14.23 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta \tag{14.25}$$

مسئلہ فوبنی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بارہا تکمل دیگا۔

$$\iint\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.26}$$

تکمل کی حدیں

کارتیسی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار قطبی محدد کے لئے بھی کارآمد ہے۔

قطبی محدد میں تکمل حاصل کرنے کا طریقہ

قطبی محدد میں خطہ R پر $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل 14.25-ا)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہو گی (شکل 14.25-ب)۔

3. تکمل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں (شکل 14.25-ج)۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta) r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

مثال 14.10: دائرہ $r=1$ کے باہر اور قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر خطہ میں $f(r,\theta)$ کے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

حل:

1. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں (شکل 14.26)۔

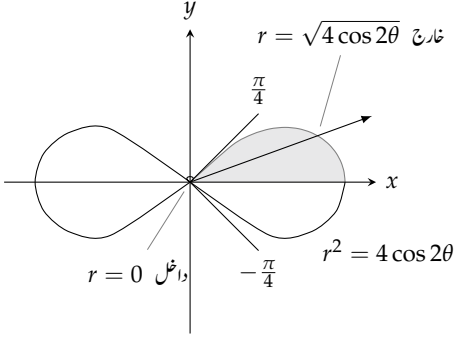
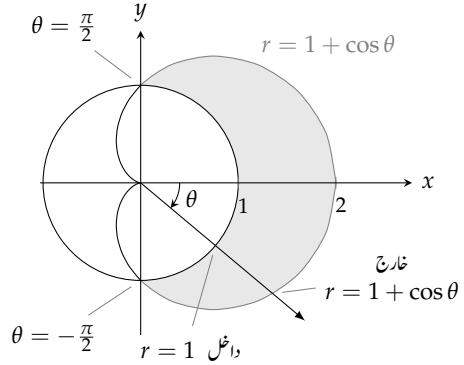
2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r=1$ کے مقام پر داخل اور $r=1+\cos\theta$ کے مقام پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta=-\frac{\pi}{2}$ تا $\theta=\frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

□

اگر $f(r,\theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمل R کا رقبہ ہو گا۔

شکل 14.27: تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم r کو 0 تا $\sqrt{4\cos 2\theta}$ جبکہ θ کو 0 تا $\frac{\pi}{4}$ لیتے ہیں۔

شکل 14.26: دائرہ اور قلب نما (مثال 14.10)

قطبی محدد میں رقبہ

قطبی محددی مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint_R r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \tag{14.27}$$

جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

مثال 14.11: دو چشمہ $r^2 = 4\cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم دو چشمہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.27)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دو چشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} \mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$

□

کارتیسی تکملات کی قطبی تکملات میں تبدیلی

کارتیسی تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کو قطبی تکمل میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

1. کارتیسی تکمل میں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھیں۔
2. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

یوں کارتیسی تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمل کے خطہ کو قطبی محدد میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{14.28}$$

یہ باب 5 میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کی بجائے دو متغیرات ہیں۔دھیان رہے کہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ نہیں بلکہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ پر کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ حصہ 14.7 پیش کی جائے گی۔

مثال 14.12: ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x,y) = 1$ کی باریک چادر کی مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل 14.28)۔ کارتیسی محدد میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمل ہے۔

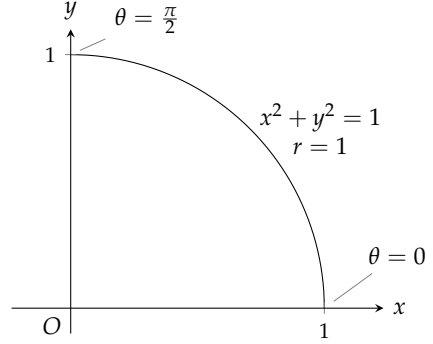
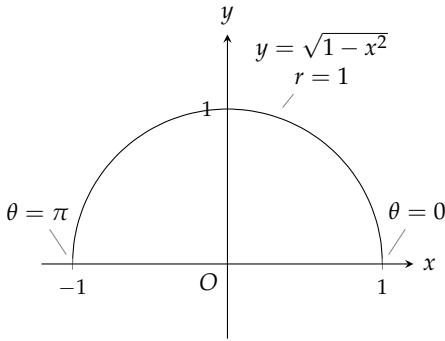
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ہم y کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\int_0^1 \Big(x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\Big)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

اس تکمل کو قطبی تکمل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi/2} \Big[\frac{r^2}{4}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

شکل 14.28: قطبی محدد میں یہ خطہ $1 \leq r \leq 0$ ، $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ہے۔

شکل 14.29: نصف دائری خطہ $1 \leq r \leq 0$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ہے۔

حاصل کرتے ہیں۔ قطبی محدد میں تکمل اتنا آسان کیوں ہوا۔ ایک وجہ یہ ہے کہ $x^2 + y^2$ سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔ دوسری وجہ یہ کہ تکمل کی حدیں اب مستقل ہیں۔ $\square$

مثال 14.13: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں (شکل 14.29)۔

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

حل: کارتیسی محدد میں یہ تکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے تکمل، سیدھا طریقے سے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ تکمل اور اس طرح کے دیگر تکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محدد یہاں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R e^{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \int_0^1 e^{r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} e^{r^2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(e - 1) \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e - 1)\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے تکمل میں ہمیں $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم تکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ $\square$

سوالات

قطبی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال 14.127 تا سوال 14.142 میں دیے گئے تکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال 14.127: $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.128: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.129: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.130: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.131: $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.132: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.133: $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.134: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.135: $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.136: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.137: $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.138: $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.139: $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.140: $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.141: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.142: $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

قطبی محدد میں رقبات کی تلاش

سوال 14.143: ربع اول سے منحنی $r=2(2-\sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.144: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.145: گلاب $r=12\cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.146: مثبت محور x اور پیچ دار $r=\frac{4\theta}{3},\ 0\le\theta\le 2\pi$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطہ کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال 14.147: ربع اول میں قلب نما $r=1+\sin\theta$ جس خطہ کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال 14.148: قلب نما $r=1+\cos\theta$ اور $r=1-\cos\theta$ کے مشترکہ خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال 14.149: مستقل کثافت $\delta(x,y)=3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r=1-\cos\theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال 14.150: دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کثافت $\delta(x,y)=k(x^2+y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کی محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.151: دائرہ $r=3$ کے باہر اور دائرہ $r=6\sin\theta$ کے اندر چادر کی کثافت $\delta(r,\theta)=\frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.152: قلب نما $r=1-\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر باریک چادر کی کثافت $\delta(r,\theta)=\frac{1}{r^2}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.153: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.154: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر باریک چادر کی کثافت $\delta(x,y)=1$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال 14.155: مستوی xy میں قرص $x^2+y^2\le a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.156: مستوی xy میں قرص $x^2+y^2\le a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال 14.157: قرص $x^2+y^2\le a^2$ میں مبدا سے نقطہ $N(x,y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال 14.158: قرص $x^2+y^2\le a$ میں نقطہ $N(x,y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1,0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.159: خطہ $1\le x^2+y^2\le e$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کے تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال 14.160: خطہ $1\le x^2+y^2\le e^2$ پر $f(x,y)=\frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ کا تکمل حل کریں۔

سوال 14.161: قلب نما $r=1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r=1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی مستوی $z=x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.162: دو چشمہ $r^2=2\cos 2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی کرہ $z=\sqrt{2-r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.163: (ا) غیر مناسب تکمل $I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2=\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس تکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ 8.6 کا سوال 8.453 جاری)۔

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\, \mathrm{d}t$$

سوال 14.164: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

سوال 14.165: قرص $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x,y) = 1/(1-x^2-y^2)$ کا تکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2+y^2 \le 1$ پر $f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال 14.166: قطبی محدد میں دوہرا تکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ اور مبدا کے بیچ پنکھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\, \mathrm{d}\theta$$

سوال 14.167: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لئے آسانی پیدا کریں۔)

سوال 14.168: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

(ا) اس تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ 6.10 میں سوال 6.350 میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال 14.169 تا سوال 14.172 میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی تکملات کو قطبی تکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی تکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-ا میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لئے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے تکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی تکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال 14.169: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 14.170: $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

سوال 14.171: $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

سوال 14.172: $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

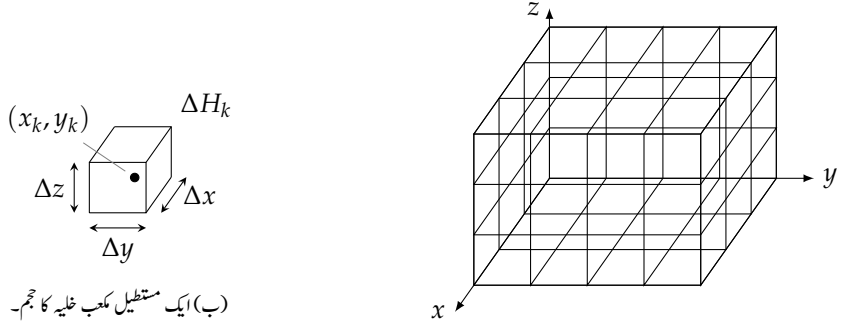
14.4 کارتیسی محدد میں تہرا تکمل

ہم تہرا تکملات کی مدد سے تین بعدی اجسام کے حجم، کمیت اور معیار اثر اور تین متغیری تفاعل کی اوسط قیمت معلوم کرتے ہیں۔ باب 15 میں ہم دیکھیں گے کہ سمتی میدان اور حرکت سیال کے مطالعہ میں ہمیں ان تکملات سے کیسا واسطہ پڑتا ہے۔

تہرا تکمل

فرض کریں فضا میں بند محدود خطہ D پر تفاعل $F(x,y,z)$ معین ہے، تب D پر تکمل F کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔ ہم ایک مستطیل خطہ جس میں D پایا جاتا ہو کو محددی مستویات کے متوازی مستویات سے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.30-ا)۔ ہم D کے اندر پائے جانے والے خانوں کو (کسی بھی ترتیب سے) 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں ایک علامتی مستطیل خانے کے اضلاع Δx_k ، Δy_k اور Δz_k جبکہ اس کا حجم ΔH_h ہو گا (شکل 14.30-ب)۔ ہم ہر مستطیل خانے میں کوئی نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k \tag{14.29}$$

(ا) ایک جم جس میں D پایا جاتا ہے کو محددی مستویات کے متوازی سطحوں سے مستطیل مکعب خلیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

(ب) ایک مستطیل مکعب خلیہ کا حجم۔

شکل 14.30: ٹھوس جسم کو ΔH_k حجم کے مستطیل خانوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

اگر F استمراری ہو اور D کی تحدیدی سطح ہموار سطحوں پر مشتمل ہو جو ایک دوسرے کے ساتھ استمراری منحنیات میں جڑتے ہوں، تب جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر کے قریب پہنچتے ہوں توں توں مجموعات J_n ایک حد تک پہنچتے ہیں:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}H \tag{14.30}$$

ہم اس حد کو D پر F **کا تہرا تکمل**[13] کہتے ہیں۔ یہ حد چند غیر استمراری تفاعل کے لئے بھی موجود ہے۔

تہرا تکملات کے خواص

تہرا تکملات کے خواص وہی ہیں جو واحد تکملات اور دوہرا تکملات کے ہیں۔ اگر $F = F(x,y,z)$ اور $G = G(x,y,z)$ استمراری ہوں، تب

1. $\iiint\limits_D kF\,\mathrm{d}H = k\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H$ (k کوئی عدد ہے)
2. $\iiint\limits_D (F \mp G)\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \mp \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$
3. اگر D پر $F \geq 0$ تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq 0$
4. اگر D پر $F \geq D$ ہو تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$

[13] triple integral

5. تہرا تکملات مجموعیت کی خاصیت بھی رکھتے ہیں جو طبیعیات، انجینئری اور ریاضیات کے میدان میں کام آتی ہے۔ اگر استمراری تفاعل F کے دائرہ کار D کو ہموار سطحوں سے متناہی تعداد کے علیحدہ علیحدہ ٹکڑوں D_1 ، D_2 ، $\cdots$ ، D_n میں تقسیم کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_{D_1} F\,\mathrm{d}H + \iiint\limits_{D_2} F\,\mathrm{d}H + \cdots + \iiint\limits_{D_n} F\,\mathrm{d}H$$

فضا میں خطے کا حجم

اگر F ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب مساوات 14.29 کے تہرا مجموعہ کی تخفیف صورت درج ذیل ہو گی۔

$$J_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \sum 1 \cdot \Delta H_k = \sum \Delta H_k \tag{14.31}$$

جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر تک پہنچتے ہیں توں توں ΔH_k جسامت میں چھوٹے اور تعداد میں زیادہ ہوتے جاتے ہیں اور D کے زیادہ حصہ کو بھرتے ہیں۔اسی لئے ہم D کے حجم کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \iiint\limits_D \mathrm{d}H$$

تعریف : فضا میں بند محدود خطہ D کا **حجم**[14] درج ذیل ہو گا۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}H \tag{14.32}$$

□

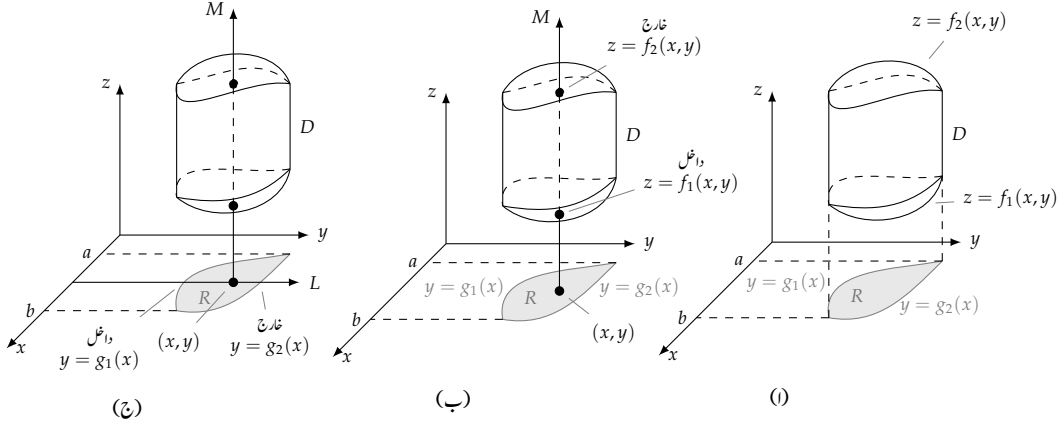
جیسا ہم جلد دیکھیں گے، قوسی سطحوں میں ملفوف ٹھوس اجسام کا حجم اس تکمل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

ہم تہرا تکمل کی تعریف سے اس کی قیمت شاذ و نادر حاصل کرتے ہیں۔ اس کی بجائے ہم مسئلہ فوبنی کی تین بعدی روپ استعمال کرتے ہوئے تین بار ایک گنا تکملات سے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ دہرا تکمل کی طرح، تکمل کے حدیں معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ کار پایا جاتا ہے۔

---

[14] volume

شکل 14.31: تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش۔

تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش

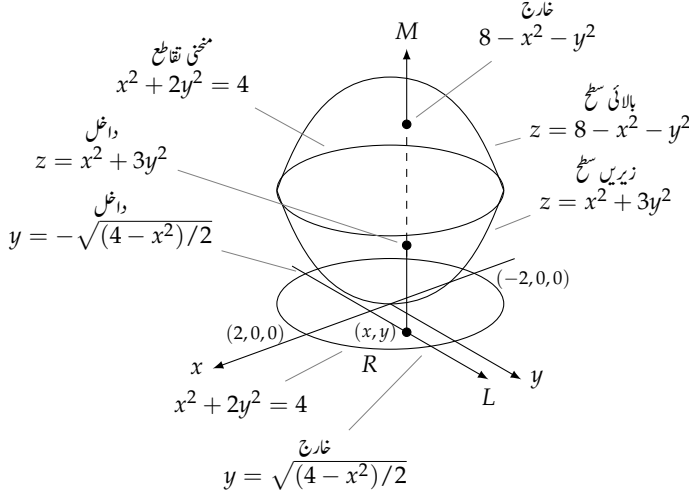
دائرہ کار D پر درج ذیل تکمل میں پہلے z ، اس کے بعد y اور آخر میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

1. خاکہ: خطہ D کا خاکہ بنائیں اور مستوی xy پر اس کا انتصابی سایہ R دکھائیں۔ خطہ D کی بالائی اور زیریں تحدیدی سطحوں کی نشاندہی کریں اور R کی بالائی اور زیریں تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.31-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے z محور کے متوازی لکیر M کھینچیں۔ بڑھتے z رخ چلتے ہوئے، یہ لکیر $z = f_1(x, y)$ پر D میں داخل ہو گی اور $z = f_2(x, y)$ پر D سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی z حدیں ہیں (شکل 14.31-ب)۔

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی y محور کے متوازی لکیر L کھینچیں۔ بڑھتے y رخ چلتے ہوئے یہ لکیر R میں $y = g_1(x)$ پر داخل اور $y = g_2(x)$ پر خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی y حدیں ہیں (شکل 14.31-ج)۔

4. تکمل کی x حدیں: وہ x حدیں منتخب کریں جس میں محور y کے متوازی، R سے گزرتی ہوئی تمام لکیریں L شامل ہوں۔ ہماری مثال میں یہ حدیں $x = a$ اور $x = b$ ہیں۔

شکل 14.32: دو سطحوں کے بیچ حجم (مثال 14.14)

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)}\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

تکملات کی ترتیب تبدیل کرنے کی صورت میں اسی طرح کی طریقہ کار سے تکملات کی حدیں تلاش کریں۔ بارہا تکمل میں آخری دو متغیرات، جن کے لحاظ سے تکمل لیا گیا ہو، کے مستوی میں D کا سایہ درکار ہو گا۔

مثال 14.14: خطہ D سطح $z=x^2+3y^2$ اور سطح $z=8-x^2-y^2$ میں ملفوف ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل: ہم $F(x,y,z)=1$ لیتے ہوئے حجم کے لئے درج ذیل تکمل لکھتے ہیں۔

$$H=\iiint\limits_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ہم تکمل کی حدیں درج ذیل اقدام سے معلوم کرتے ہیں۔

1. خاکہ: یہ سطحیں ایک دوسرے کو قطع مکافی $x^2+3y^2=8-x^2-y^2$ یعنی $x^2+2y^2=4$ میں قطع کرتی ہیں (شکل 14.32)۔ مستوی xy میں D کے سایہ R کی سرحد کی مساوات یہی ($x^2+2y^2=4$) ہو گی۔ خطہ R کی بالائی سرحد منحنی $y=\sqrt{(4-x^2)/2}$ اور اس کی زیریں سرحد منحنی $y=-\sqrt{(4-x^2)/2}$ ہو گی۔

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور z کی متوازی لکیر M خطہ D میں $z = x^2 + 3y^2$ پر داخل اور $z = 8 - x^2 - y^2$ پر خارج ہوتی ہے۔

3. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور y کی متوازی لکیر L خطہ R میں $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ پر داخل اور $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمل کی x حدیں: محور y کی متوازی لکیریں L خطہ R میں $x = -2$ (نقطہ (-2,0,0)) سے $x = 2$ (نقطہ (2,0,0)) تک گزرتی ہیں۔

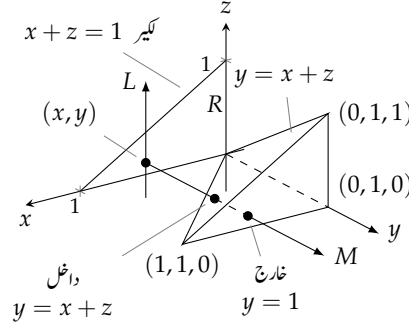
یوں حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_D \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left(2(8 - 2x^2)] \sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3} \left(\frac{4 - x^2}{2} \right)^{3/2} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left[8 \left(\frac{4 - x^2}{2} \right)^{3/2} - \frac{8}{3} \left(\frac{4 - x^2}{2} \right)^{3/2} \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2} \, \mathrm{d}x \\
&= 8\pi\sqrt{2} && x = 2 \sin u \text{ پر کر کے تکمل لیا گیا ہے}
\end{aligned}$$

□

اگلی مثال میں ہم مستوی xy کی بجائے مستوی xz میں D کا سایہ لیتے ہیں۔

مثال 14.15: چو سطحہ D کے راس $(0, 0, 0)$ ، $(1, 1, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 1, 1)$ ہیں۔ تفاعل $F(x, y, z)$ کے تہرا تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

حل:

شکل 14.33: چو سطحہ (مثال 14.15)

1. خطہ: ہم D اور مستوی xz میں اس کے سایہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.33)۔ خطہ D کی بالائی (دائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y=1$ میں پائی جاتی ہے۔ اس کی زیریں (بائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y=x+z$ میں پائی جاتی ہے۔ خطہ R کی بالائی سرحد لکیر $z=1-x$ اور زیریں سرحد لکیر $z=0$ ہیں۔

2. تکمل کی y حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر جو محور y کے متوازی ہو D میں $y=x+z$ پر داخل اور $y=1$ پر خارج ہوتی ہے۔

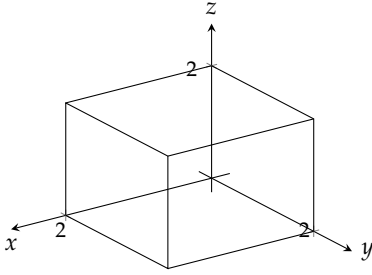
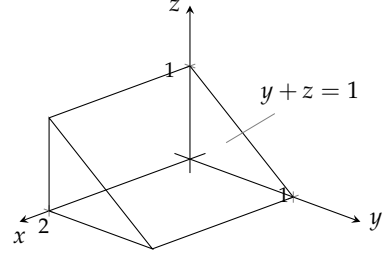
3. تکمل کی z حدیں: محور z کے متوازی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر L خطہ R میں $z=0$ پر داخل اور $z=1-x$ پر خارج ہوتی ہے۔

4. تکمل کی x حدیں: خطہ R میں $x=0$ سے $x=1$ تک گزرتی ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

□

جیسا ہم جانتے ہیں، دہرا تکمل کا حصول عموماً (لیکن ضروری نہیں) ایک گنّا تکملات کو دو مختلف ترتیب سے حاصل کر کے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تہرا تکمل کے لئے اس طرح کے چھ ترتیب ممکن ہو سکتے ہیں۔

شکل 14.34: منشور کے حجم کی چھ بارہا تہرا تکملات مثال 14.16 میں دیے گئے ہیں۔

شکل 14.35: تکمل کا خطہ (مثال 14.17)

مثال 14.16: درج ذیل چھ تکملات شکل 14.34 میں دکھائے گئے منشور کا حجم دیتے ہیں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$
$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

□

فضا میں تفاعل کی اوسط قیمت

فضا میں خطہ D پر تفاعل F کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$D \text{ پر } F \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{D \text{ کا حجم}} \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \tag{14.33}$$

مثال کے طور پر اگر $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہو تب D پر F کی اوسط قیمت سے مراد مبدا سے D میں نقطوں کا اوسط فاصلہ ہے۔ اگر D میں $F(x,y,z)$ ایک ٹھوس جسم کی کمیتی کثافت ہو تب D میں F کی اوسط قیمت اس جسم کی اوسط کمیتی کثافت ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی حجم ہو گی۔

مثال 14.17: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ کے بیچ $F(x,y,z) = xyz$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

حل: ہم اس مکعب کا خاکہ بنا کر اس پر تکمل کی حدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.35)۔ اس کے بعد مساوات 14.33 سے مکعب پر F کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مکعب کا حجم $8 = (2)(2)(2)$ ہو گا۔مکعب پر F کی قیمت درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^2 2yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 \left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}z = \int_0^2 4z\,\mathrm{d}z = \left[2z^2\right]_0^2 = 8$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 14.33 سے درج ذیل اوسط قیمت حاصل ہو گی۔

$$\text{مکعب پر اوسط قیمت} = \frac{1}{\text{حجم}}\iiint xyz\,\mathrm{d}H = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1$$

ہم نے اس تکمل کو $\mathrm{d}x$ ، $\mathrm{d}y$ ، $\mathrm{d}z$ ترتیب سے حاصل کیا۔ ہم باقی پانچ ترتیب میں سے کسی ایک ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے بھی اس تکمل کو حل کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

مختلف اعادوں سے تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال 14.173: چھ مختلف اعادوں سے مثال 14.16 میں حجم کا حل دیا گیا ہے۔ ان تمام کا مشترک جواب کیا ہے؟

سوال 14.174: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 2$ اور $z = 3$ کے بیچ ٹھوس مستطیل جسم کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14.175: ثُمن اول سے مستوی $6x + 3y + 2z = 6$ ایک چو سطحہ کاٹتا ہے۔ اس کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال 14.176: ثُمن اول سے بیلن $x^2 + z^2 = 4$ اور مستوی $y = 3$ ایک خطہ کاٹتے ہیں۔ اس خطہ کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.177: قطعات مکافی $z = 8 - x^2 - y^2$ اور $z = x^2 + y^2$ میں محیط خطہ D کے حجم کا چھ مختلف تہرا اعادہ تکملات لکھیں۔ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال 14.178: قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور مستوی $z = 2y$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کی تہرا اعادہ تکملات ترتیب $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ میں لکھیں۔ ان میں سے کسی بھی تکمل کی قیمت حاصل نہ کریں۔

تہرا اعادہ تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال 14.179 تا سوال 14.192 میں تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال 14.179: $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.180: $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.181: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.182: $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.183: $\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y\sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.184: $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

سوال 14.185: $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.186: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2x+y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال 14.187: $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.188: $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال 14.189: $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos(u+v+w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ (فضا uvw)

سوال 14.190: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$ (فضا rst)

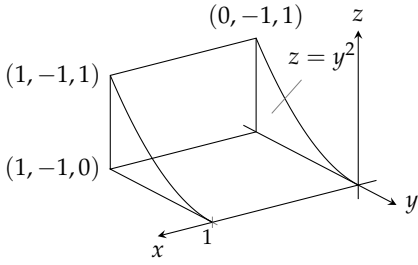
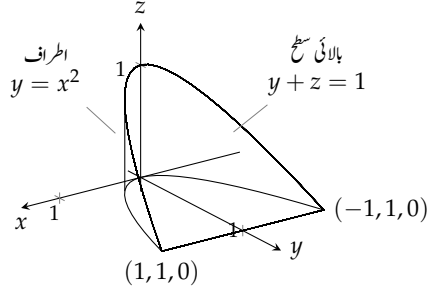
سوال 14.191: $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln\sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$ (فضا tvx)

سوال 14.192: $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}r$ (فضا pqr)

حجم بذریعہ تہرا تکملات

سوال 14.193: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.36 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

شکل 14.37: خاکہ برائے سوال 14.194

شکل 14.36: خاکہ برائے سوال 14.193

ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ه. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

سوال 14.194: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل 14.37 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

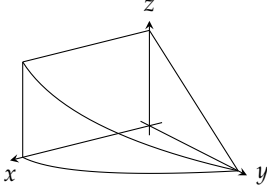
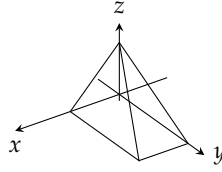
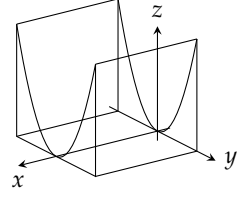
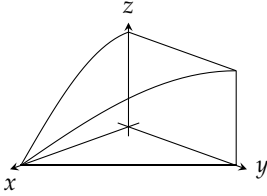
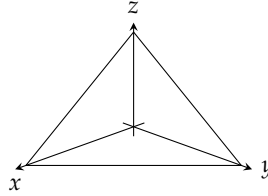
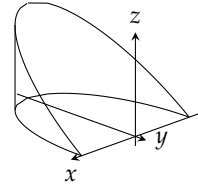
اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ه. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

سوال 14.195 تا سوال 14.208 میں خطوں کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.195: بیلن $z = y^2$ اور مستوی xy کے بیچ خطہ جس کی سرحدیں مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ ہیں (شکل 14.38)۔

سوال 14.196: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x + z = 1$ ، $y + 2z = 2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.39)۔

شکل 14.38: خاکہ برائے سوال 14.195

شکل 14.39: خاکہ برائے سوال 14.196

شکل 14.40: خاکہ برائے سوال 14.197

شکل 14.41: خاکہ برائے سوال 14.198

شکل 14.42: خاکہ برائے سوال 14.199

شکل 14.43: خاکہ برائے سوال 14.200

سوال 14.197: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $y + z = 2$ اور بیلن $x = 4 - y^2$ کے بیچ خطہ (شکل 14.40)۔

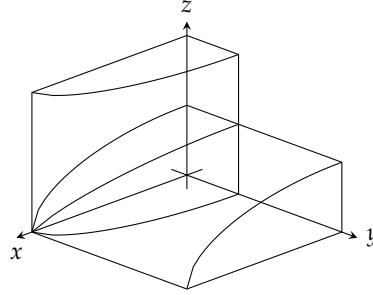
سوال 14.198: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے مستویات $z = -y$ اور $z = 0$ جو پچر کاٹتے ہیں (شکل 14.41)۔

سوال 14.199: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ کے بیچ چو سطحہ (شکل 14.42)۔

سوال 14.200: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $y = 1 - x$ اور سطح $z = \cos(\pi x/2), 0 \leq x \leq 1$ کے بیچ خطہ (شکل 14.43)۔

سوال 14.201: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترک اندرون (شکل 14.44)۔

سوال 14.202: ثُمن اول میں محددی مستویات اور سطح $z = 4 - x^2 - y$ کے بیچ خطہ (شکل 14.45)۔

سوال 14.203: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x + y = 4$ اور بیلن $y^2 + 4z^2 = 16$ کے بیچ خطہ (شکل 14.46)۔

شکل 14.44: خاکہ برائے سوال 14.201

شکل 14.45: خاکہ برائے سوال 14.202

شکل 14.46: خاکہ برائے سوال 14.203

شکل 14.47: خاکہ برائے سوال 14.204

سوال 14.204: بیلن $x^2+y^2=4$ سے مستویات $z=0$ اور $x+z=3$ جو خطہ کاٹتے ہیں (شکل 14.47)۔

سوال 14.205: ثُمن اول میں مستویات $x+y+2z=2$ اور $2x+2y+z=4$ کے بیچ خطہ۔

سوال 14.206: مستویات $z=x$ ، $x+z=8$ ، $z=y$ ، $y=8$ اور $z=0$ کے بیچ متناہی خطہ۔

سوال 14.207: ٹھوس ترخیمی بیلن $x^2+4y^2\leq 4$ سے xy مستوی اور مستوی $z=x+2$ جو خطہ کاٹتے ہیں۔

سوال 14.208: وہ خطہ جس کا پشت مستوی $x=0$ ، سامنے اور اطراف قطع مکافی بیلن $x=1-y^2$ ، بالا قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ اور نیچے مستوی xy ہوں۔

اوسط قیمتیں

سوال 14.209 تا سوال 14.212 میں دیے گئے خطہ پر $F(x,y,z)$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.209: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ کے بیچ مکعب خطہ اور تفاعل $F(x,y,z)=x^2+9$ لیں۔

سوال 14.210: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=1$ ، $y=1$ اور $z=2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x,y,z)=x+y-z$ لیں۔

سوال 14.211: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=1$ ، $y=1$ اور $z=1$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ لیں۔

سوال 14.212: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x=2$ ، $y=2$ اور $z=2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x,y,z)=xyz$ لیں۔

تکمل کی ترتیب بدلنا

سوال 14.213 تا سوال 14.216 میں موزوں طریقہ سے تکمل کی ترتیب تبدیل کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.213: $\int_0^4\int_0^1\int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.214: $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

سوال 14.215: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\sin \pi y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال 14.216: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

نظریہ اور مثالیں

سوال 14.217: درج ذیل کو a کے لئے حل کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{15}$$

سوال 14.218: ترخیمی سطح $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{c^2}=1$ کا حجم c کی کس قیمت کے لئے 8π ہو گا؟

سوال 14.219: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D (4x^2+4y^2+z^2-4)\,\mathrm{d}H$$

سوال 14.220: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D (1-x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}H$$

کمپیوٹر

سوال 14.221 تا سوال 14.224 میں دیے گئے خطہ پر تفاعل کا تہرا تکمل کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔

سوال 14.221: مستویات $z=0$ اور $z=1$ اور سطح $x^2+y^2=1$ کے بیچ ٹھوس بیلن پر تفاعل $F(x,y,z)=x^2y^2z$ لیں۔

سوال 14.222: ٹھوس خطہ جو نیچے سے قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ اور اوپر سے مستوی $z=1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x,y,z)=\lvert xyz\rvert$ لیں۔

سوال 14.223: ٹھوس خطہ جو نیچے سے مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z=1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x,y,z)=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ لیں۔

سوال 14.224: ٹھوس کرہ $x^2+y^2+z^2\leq 1$ اور تفاعل $F(x,y,z)=x^4+y^2+z^2$ لیں۔

14.5 تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر

اس حصہ میں تین بعدی اجسام کی کمیت اور معیار اثر کا حصول کارتیسی محدد میں سکھایا جائے گا۔ یہ کلیات دو بعدی اجسام کے کلیات کی طرح ہیں۔ کروی اور نلکی محدد میں حساب کرنا حصہ 14.6 میں دکھایا جائے گا۔

کمیت اور معیار اثر

فضا میں خطہ D میں پائے جانے والے ایک جسم کی کمیتی کثافت $\delta(x,y,z)$ ہے۔ خطہ D پر δ کا تکمل اس جسم کی کمیت دیگا۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں کر ہو گا ہم اس جسم کو n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل 14.48)۔ جسم کی کمیت درج ذیل حد ہو گی۔

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta H_k=\iiint\limits_D \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}H \tag{14.34}$$

اگر D میں لکیر L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہو، تب L کے لحاظ سے کمیت $\Delta m_k=\delta(x,y_k,z_k)\Delta H_k$ تقریباً $\Delta I_k=r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$ ہو گا۔ یوں L کے لحاظ سے پورے جسم کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$I_L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta I_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}r^2(x_k,y_k,z_k)\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta H_k=\iiint\limits_D r^2\delta\,\mathrm{d}H$$

اگر L محور x ہو تب $r^2=y^2+z^2$ ہو گا اور

$$I_x=\iiint\limits_D(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

ہو گا۔اسی طرح

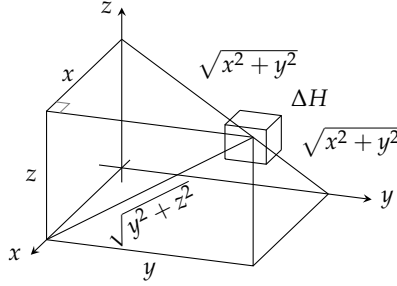
$$I_z=\iiint\limits_D(x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}H \quad \text{اور} \quad I_y=\iiint\limits_D(x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

ہوں گے۔ان کلیات کو دیگر کلیات کے ساتھ یہاں یکجا کیا گیا ہے۔

کمیت: $M=\iiint\limits_D \delta\,\mathrm{d}H$ (δ =کثافت)

محددی مستویات کے لحاظ سے معیار اثر اول:

$$M_{yz}=\iiint\limits_D x\delta\,\mathrm{d}H,\quad M_{xz}=\iiint\limits_D y\delta\,\mathrm{d}H,\quad M_{xy}=\iiint\limits_D z\delta\,\mathrm{d}H$$

مرکز کمیت: $\bar{x}=\frac{M_{yz}}{M},\quad \bar{y}=\frac{M_{xz}}{M},\quad \bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}$

شکل 14.48: محددی محور اور محددی مستویات سے ایک ٹکڑے کے فاصلے۔

جمودی معیار اثر (معیار اثر دوم):

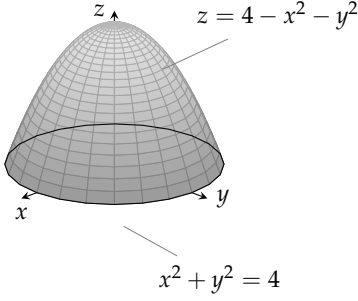
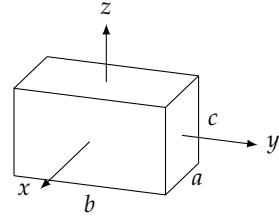
$$
\begin{aligned}
I_x &= \iiint (y^2+z^2)\delta \, \mathrm{d}H \\
I_y &= \iiint (x^2+z^2)\delta \, \mathrm{d}H \\
I_z &= \iiint (x^2+y^2)\delta \, \mathrm{d}H
\end{aligned}
$$

خط L کے لحاظ سے معیار اثر: $I_L = \iiint r^2 \delta \, \mathrm{d}H$ (جہاں L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے۔)

خط L کے لحاظ سے رداس دوار: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

مثال 14.18: مستقل کثافت δ کا مستطیل ٹھوس جسم شکل 14.49 میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کریں۔

حل: ہم مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2+z^2)\delta \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \tag{14.35}$$

شکل 14.50: ٹھوس جسم برائے مثال 14.19

شکل 14.49: ٹھوس جسم برائے مثال 14.18

ہو گا۔ چونکہ $\delta(y^2 + z^2)$ متغیرات x ، y اور z کا جفت تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I_x &= 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2}\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2)
\end{aligned}$$

اسی طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \quad \text{اور} \quad I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2)$$

□

مثال 14.19: مستقل کثافت δ کے جسم کی نچلی سرحد مستوی $z = 0$ میں قرص $R: x^2 + y^2 \leq 4$ ہے جبکہ اس کی بالائی حد قطع مکافی $z = 4 - x^2 - y^2$ ہے (شکل 14.50)۔ اس جس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: تشاکلی کی بنا $\bar{x}=\bar{y}=0$ ہو گا۔ ہمیں $\bar{z}$ معلوم کرنے کے لئے پہلے درج ذیل دریافت کرنے ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint\limits_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\delta \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \iint\limits_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2} \iint\limits_R (4-x^2-y^2)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4-r)^2 r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \qquad \text{قطبی محدد} \\
&= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{32\pi\delta}{3}
\end{aligned}
$$

اسی طرح

$$
M = \iint\limits_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 8\pi\delta
$$

ہو گا۔یوں $\bar{z}=\frac{M_{xy}}{M}=\frac{4}{3}$ اور مرکز کمیت $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/3)$ ہو گا۔ □

جب جسم کی کثافت اٹل ہو (جیسا مثال 14.18 اور مثال 14.19 میں تھا)، تب (دو بعدی اجسام کی طرح) مرکز کمیت اس جسم کا **وسطانی مرکز**[15] ہو گا۔

سوالات

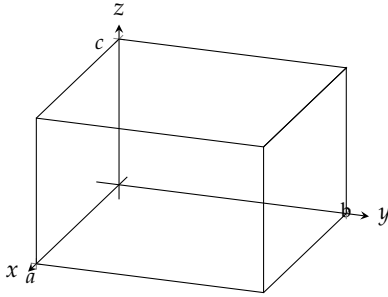
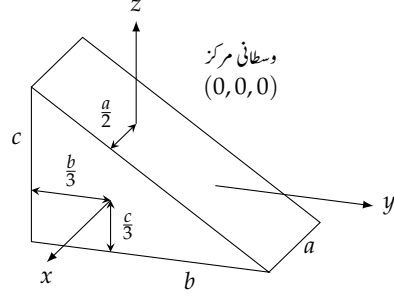
مستقل کثافت

سوال 14.225 تا سوال 14.236 میں کثافت $\delta=1$ ہے۔

سوال 14.225: جمودی معیار اثر کی مساوات 14.35 کو سیدھا حل کر کے مثال 14.18 میں مستعمل چھوٹے طریقہ کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ مثال 14.18 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس جسم کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.226: ایک پچر کے وسطانی مرکز گزرتے محددی محور پچر کے کناروں کے متوازی ہیں (شکل 14.51)۔اگر $a=b=6$ اور $c=4$ تب I_x ، I_y اور I_z کیا ہوں گے۔

سوال 14.227: مستطیل ٹھوس جسم کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کرتے ہوئے جسم کے کناروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں (شکل 14.52)۔

[15] centroid

شکل 14.52: مستطیل ٹھوس جسم برائے سوال 14.227

شکل 14.51: پچر برائے سوال 14.226

سوال 14.228: (ا) ایک چو سطحہ جس کے راس $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ ہیں کا وسطانی مرکز اور I_x ، I_y اور I_z تلاش کریں۔ (ب) محور x کے لحاظ سے اس چو سطحہ کا رداس دوار معلوم کریں۔ محور x سے وسطانی مرکز تک فاصلہ کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔

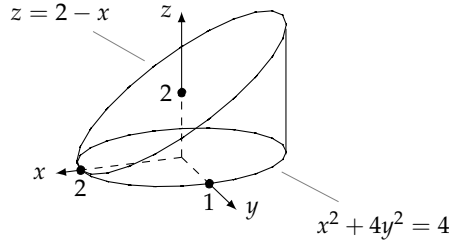
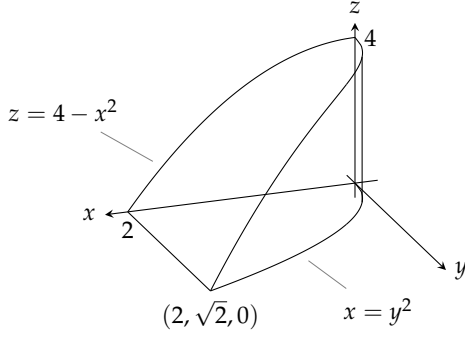
سوال 14.229: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس "کونڈا" کی زیریں سرحدی سطح $z = 4y^2$ ، بالائی سرحدی سطح $z = 4$ اور اطراف مستویات $x = 1$ اور $x = -1$ ہیں۔ اس کی مرکز کمیت اور تینوں محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.230: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد مستوی $z = 0$ ، بالائی سرحد مستوی $z = 2 - x$ اور اس کے اطراف ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 = 4$ ہے (شکل 14.53)۔ (ا) $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ آخری تکمل میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے آپ کو تکملات کا جدول استعمال کرنا ہو گا۔ $M_{xy} = \int_{-2}^{2}\int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{2-x} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ اس کے بعد M_{xy} کو M سے تقسیم کر کے تصدیق کریں کہ $\bar{z} = \frac{5}{4}$ ہو گا۔

سوال 14.231: (ا) مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور بالائی سرحد مستوی $z = 4$ ہے۔ اس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ (ب) وہ مستوی $z = c$ دریافت کریں جو اس جسم کو برابر حجم کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہو۔ یہ مستوی اس جسم کے مرکز کمیت سے نہیں گزرتا ہے۔

سوال 14.232: ایک ٹھوس مکعب کے اضلاع کی لمبائیاں 2 اکائیاں ہے۔ یہ مستویات $x = \mp 1$ ، $z = \mp 1$ ، $y = 3$ اور $y = 5$ کے بیچ واقع ہے۔ اس مکعب کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے مکعب کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.233: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 6, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

شکل 14.54: ٹھوس جسم برائے سوال 14.238

شکل 14.53: ٹھوس جسم برائے سوال 14.230

سوال 14.234: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں)۔ اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال 14.235: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 14.227 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 2, z = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (y-2)^2 + z^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.236: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال 14.227 دیکھیں)۔ اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہو گا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال 14.237 اور سوال 14.238 میں (ا) جسم کی کمیت اور (ب) اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.237: ثُمن اول میں ایک ٹھوس جسم جو محددی مستویات اور مستوی $x + y + z = 2$ کے بیچ واقع ہے۔ اس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2x$ ہے۔

سوال 14.238: ثُمن اول میں مستویات $y = 0$ اور $z = 0$ اور سطح $z = 4 - x^2$ اور سطح $x = y^2$ کے بیچ واقع جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (شکل 14.54)۔

سوال 14.239 اور سوال 14.240 میں درج ذیل تلاش کریں۔

ا. اس جسم کی کمیت۔

ب. اس جسم کا مرکز کمیت۔

ج. محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر۔

د. محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دور۔

سوال 14.239: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ ٹھوس مکعب جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے۔

سوال 14.240: ایک مستطیل ٹھوس جسم جس کے $a = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال 14.226 دیکھیں) کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + 1$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل کثافت کی صورت میں اس جسم کا مرکز کمیت $(0, 0, 0)$ ہو گا۔

سوال 14.241: مستویات $x + z = 1$ ، $x - z = -1$ ، $y = 0$ اور سطح $y = \sqrt{z}$ کے بیچ واقع ٹھوس جسم جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ ہے۔

سوال 14.242: قطع مکافی سطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ اور $z = 2x^2 + 2y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس جسم کی کمیت تلاش کریں۔

کام

سوال 14.243 اور سوال 14.244 میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. مکمل بھرے ہوئے برتن سے سیال کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟ (اشارہ: برتن میں سیال کو چھوٹے چھوٹے حجم کے ٹکڑوں ΔH_k میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کو منتقل کرنے کے لئے درکار کام دریافت کریں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے سیال کو منتقل کرنے کا کام ہو گا۔ یہ مجموعہ، حد کی صورت میں، تہرا تکمل دیگا جس کی قیمت آپ کو معلوم کرنی ہو گی۔)

ب. مکمل بھرے ہوئے برتن میں سیال کے مرکز کمیت کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لئے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟

سوال 14.243: برتن ثُمن اول میں کعبی ڈبہ کی صورت کا ہے جو محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے (سوال 14.239 دیکھیں)۔

سوال 14.244: مستویات $y = 0$ ، $z = 0$ اور سطحوں $z = 4 - x^2$ ، $x = y^2$ کے بیچ برتن پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (سوال 14.238 دیکھیں)۔

مسئلہ متوازی محور

مسئلہ متوازی محور (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں ایک جسم جس کی کمیت m ہو کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہو جس کے متوازی h فاصلہ پر خط L پایا جاتا ہو۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے اس جسم کے جمودی معیار اثر درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{14.36}$$

دو بعدی صورت کی طرح اگر ہمیں ایک جمودی معیار اثر، فاصلہ h اور جسم کی کمیت m معلوم ہو تب ہم اس مسئلہ کی مدد سے دوسرا جمودی معیار اثر باآسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

سوال 14.245: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

ا. پہلے دکھائیں کہ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے فضا میں کسی بھی مستوی کے لحاظ سے معیار اثر اول صفر ہو گا۔ (اشارہ: جسم کے مرکز کمیت کو مبدا پر اور مستوی کو مستوی yz لیں۔ تب کلیہ $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ کیا معلومات فراہم کرتا ہے؟)

ب. جسم کے مرکز کمیت کو بدا پر، خط $L_{c,m}$ کو محور z پر، اور نقطہ $(h, 0, 0)$ پر L کو مستوی xy کا متوازی رکھیں۔ فرض کریں یہ جسم فضا میں خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ تب شکل کے لحاظ سے درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \iiint_D |\boldsymbol{v} - h\boldsymbol{i}|^2 \,\mathrm{d}m \tag{14.37}$$

اس تکمل کو پھیلا کر حل کر کرتے ہوئے ثبوت مکمل کریں۔

سوال 14.246: مستقل کثافت، رداس a کے کرہ قطر کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $\frac{2}{5}ma^2$ ہو گا جہاں کرہ کی کمیت m ہے۔ کرہ کو مماسی خط کے لحاظ سے کرہ کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.247: محور z کے لحاظ سے سوال 14.227 کے جسم کا جمودی معیار اثر $I_z = \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2)$ ہے۔

ا. مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے اس ٹھوس جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے، محور z کے متوازی خط کے لحاظ سے جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

ب. جزو-ا کے نتائج اور مساوات 14.36 استعمال کرتے ہوئے خط $x = 0,\ y = 2b$ کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.248: اگر سوال 14.226 کے پچر میں $a = b = 6$ اور $c = 4$ ہوں محور x کے لحاظ سے $I_x = 208$ ہو گا۔ اس پچر کا خط $y = 4,\ z = -4/3$ (پچر کے تنگ سر کے کنارہ) کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

کلیہ پاپس

کلیہ پاپس (حصہ 14.2 کے سوالات دیکھیں) دو بعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بعدی صورت کے لئے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں دو اجسام B_1 اور B_2 جن کی کمیتیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں فضا میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے خطوں میں پائے جاتے ہیں۔ مبدا سے ان اجسام کے مراکز کمیت تک سمتیات بالترتیب c_1 اور c_2 ہیں۔ تب ان کے اشتراک $B_1 \cup B_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{14.38}$$

پہلے کی طرح، اس کو **کلیہ پاپس**[16] کہتے ہیں۔ دو بعدی صورت کی طرح، n عدد اجسام کے لئے اس کلیہ کی عمومی روپ درج ذیل ہو گی۔

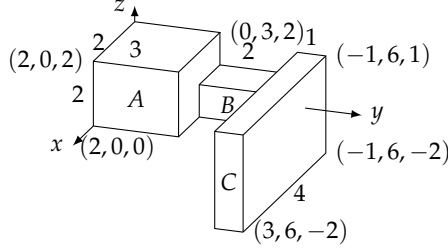
$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{14.39}$$

سوال 14.249: کلیہ پاپس (مساوات 14.38) اخذ کریں۔ (اشارہ: ثُمن اول میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے اجسام B_1 اور B_2 کا خاکہ بنا کر ان کے مراکز کمیت کو $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ سے ظاہر کریں۔ کمیت m_1 اور m_2 اور ان کمیت کے مراکز کے محدد کی صورت میں محددی مستویات کے لحاظ سے $B_1 \cup B_2$ کے معیار اثر حاصل کریں۔)

سوال 14.250: مستقل کثافت $\delta = 1$ کے تین مستطیل ٹھوس اجسام سے ایک جسم حاصل کیا گیا ہے (شکل 14.55)۔ کلیہ پاپس استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کے مراکز کمیت تلاش کریں۔

ا. $A \cup B$ ب. $A \cup C$ ج. $B \cup C$ د. $A \cup B \cup C$

سوال 14.251:

[16] Pappus's formula

شکل 14.55: ٹھوس جسم برائے سوال 14.250

ا. قد h اور رداس r کے قاعدہ کا دائری ٹھوس مخروط C، رداس a کے ٹھوس نصف کرہ S پر قلفی کی طرح جمایا گیا ہے۔ ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی ($\frac{1}{4}$) فاصلہ پر واقع ہے۔ نصف کرہ کے وسطانی مرکز قاعدہ سے سر کے رخ تین آٹھواں ($\frac{3}{8}$) فاصلہ دور ہے۔ مشترک جسم $C \cup S$ کا مرکز مشترک قاعدہ پر رکھنے کی خاطر a اور h کے بیچ تعلق معلوم کریں۔

ب. اگر آپ نے حصہ 14.2 میں معادل سوال 14.125 کو اب تک حل نہ کیا ہو، تب اس کو حل کریں۔ دونوں کے جواب ایک جیسے نہیں ہیں۔

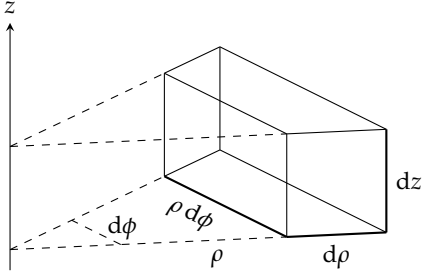
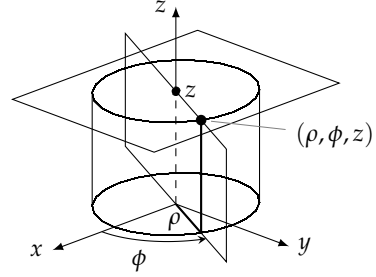
سوال 14.252: ایک ٹھوس اہرام P جس کا قد h اور مماثل چار اضلاع ہیں کا قاعدہ ٹھوس مکعب C کا ایک مربعی سطح ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں s ہے۔ ٹھوس اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ ٹھوس جسم $P \cup C$ کا وسطانی مرکز اہرام کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر s اور h کا تعلق دریافت کریں۔ سوال 14.251 کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔ حصہ 14.2 میں سوال 14.126 کے نتیجہ کے ساتھ بھی موازنہ کریں۔

14.6 نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل

انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام نلکی اور کروی محدد میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔

نلکی محدد

جن بیلن کا محور z محدد پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں z محدد پایا جاتا ہو یا جو z محدد کے عمودی ہوں، کو نلکی محدد میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے (شکل 14.56)۔

شکل 14.56: نلکی محدد میں مستقل محدد سطحیں۔

شکل 14.57: نلکی محدد میں چھوٹا حجم $\mathrm{d}H = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محددی صورت رکھتی ہیں۔

$$\rho = 4$$
$$\phi = \frac{\pi}{3}$$
$$z = 2$$

فضا میں خطہ کی نلکی محدد میں مستطیلی خانہ بندی کا ایک خانہ شکل 14.57 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر z محدد سے اس خانے کی وسط تک رداس ρ ہو تب خانے کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رداس بالترتیب $\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ اور $\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}$ ہوں گے۔اس چھوٹے خانے کو نقطہ دار لکیروں سے z محدد تک بڑھا کر حجم $\frac{1}{2}(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ حاصل ہو گا جس میں سے اضافی حجم $\frac{1}{2}(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ منفی کر کے چھوٹے حصہ کا حجم معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\ &= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

چھوٹے مستطیل خانے کی وسطی (یا اندرونی قوسی) چوڑائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ ، لمبائی $\mathrm{d}\rho$ اور قد $\mathrm{d}z$ لے کر

$$\mathrm{d}H = (\rho\,\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

حجم زیادہ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح خانے کی سامنے (یا پشت) سطح کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ ، نچلی (یا بالائی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$ اور قوسی (اندرونی یا بیرونی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔ یوں نلکی محدد میں تہرا تکملات کو بطور بارہا تکملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 14.20: خطہ D پر تفاعل $f(\rho,\phi,z)$ کی نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ D نیچے سے مستوی $z = 0$ اور اطراف سے دائری بیلن $x^2 + (y-1)^2 = 1$ جبکہ اوپر سے قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کے بیچ پایا جاتا ہے (شکل 14.58)۔

حل

1. خاکہ بنانا: D کا قاعدہ ہی مستوی xy پر D کی تظلیل R ہو گی۔تظلیل R کی سرحد دائرہ $x^2+(y-1)^2=2$ ہو گی جس کی قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
x^2+(y-1)^2 &= 1\\
x^2+y^2-2y+1 &= 1\\
\rho^2-2\rho\sin\phi &= 0\\
\rho &= 2\sin\phi
\end{aligned}$$

2. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں عمومی نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتی ہوئی لکیر M، جو z محدد کے متوازی ہو D میں $z=0$ پر داخل اور $z=x^2+y^2=\rho^2$ پر خارج ہو گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے خط L جو نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتا ہو، R میں $\rho=0$ پر داخل اور $\rho=2\sin\phi$ پر خارج ہو گا۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: خط L جھاڑو کی طرح R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ $\phi=0$ اور $\phi=\pi$ کے بیچ رہتا ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}H=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{\rho^2} f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

□

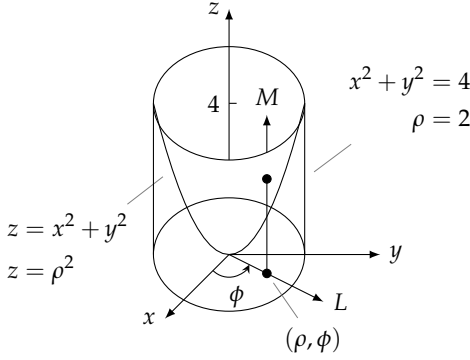
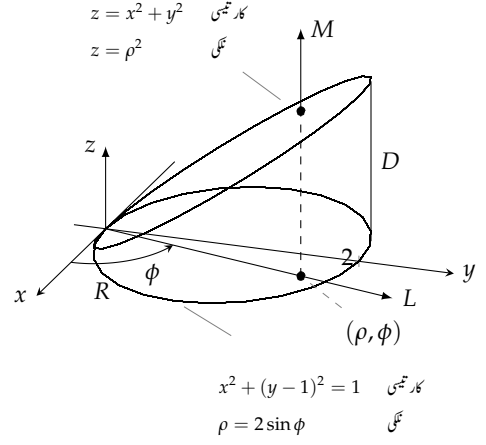
اس مثال میں ہم نے نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔

مثال 14.21: بیلن $x^2+y^2=4$ میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکافی سطح $z=x^2+y^2$ اور نیچے سے مستوی xy کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں (شکل 14.21)۔ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta=1$ ہے۔

حل

ہم اوپر سے قطع کافی $z=\rho^2$ اور نیچے سے مستوی $z=0$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔اس کا قاعدہ R مستوی xy میں قرص $|\rho|\le 2$ ہو گا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہو گا جو محور z ہے۔ یوں $\bar{x}=\bar{y}=0$ ہو گا۔ ہم معیار اثر M_{xy} کو کمیت M سے تقسیم کر کے $\bar{z}$ تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے تکملات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔

شکل 14.59: جسم برائے مثال 14.21

شکل 14.58: جسم برائے مثال 14.20

2. تکمل کی z حدیں: علامتی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی، محدد z کی متوازی لکیر M ، ٹھوس جسم میں $z = 0$ سے داخل اور $z = \rho^2$ سے خارج ہو گی۔

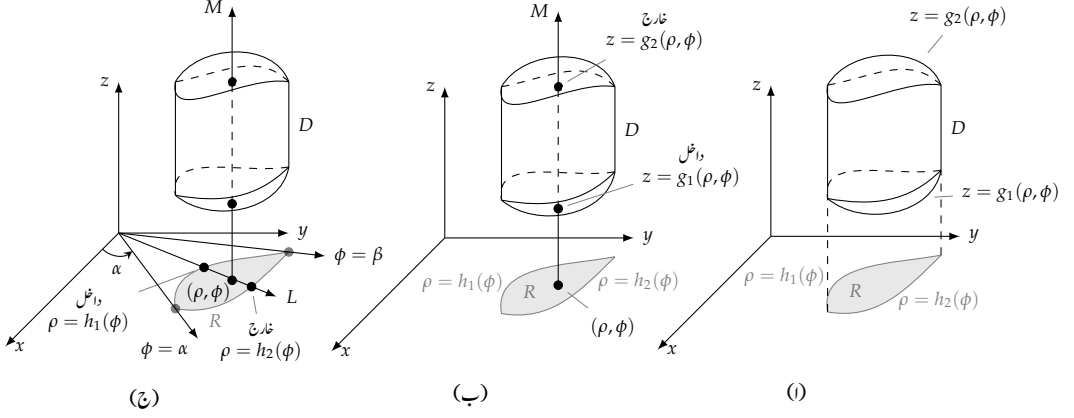
3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے شروع نقطہ ρ, ϕ سے گزرتی ہوئی لکیر L خطہ R میں $\rho = 0$ سے داخل اور $\rho = 2$ سے خارج ہو گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی $\phi = 0$ سے $\phi = 2\pi$ تک طے کرتی ہے۔

یوں M_{xy} کی قیمت

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} z \,\mathrm{d}z \,\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho^2} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho^5}{2} \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^6}{12}\right]_0^{\rho^2} \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3} \,\mathrm{d}\phi = \frac{32\pi}{3}
\end{aligned}$$

اور M کی قیمت

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\rho^2} \mathrm{d}z \,\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \Big[z\Big]_0^{\rho^2} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} 4 \,\mathrm{d}\phi = 8\pi
\end{aligned}$$

شکل 14.60: نلکی محدد میں تہرا تکمل کی حدوں کا تعین۔

ہو گی لہٰذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

ہو گا۔ وسطانی مرکز $(0, 0, 4/3)$ ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔ □

نلکی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint\limits_D f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}H$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نلکی محدد میں پہلے z، اس کے بعد ρ اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy پر اس کی تظلیل R کا خاکہ بنائیں۔ D اور R کی سرحدی سطحوں اور منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل 14.60-ا)۔

2. تکمل کی z حدیں: R میں علامتی نقطہ (ρ,ϕ) پر محور z کے متوازی ایک علامتی لکیر M کھینچیں جو بڑھ کر D میں $z = g_1(\rho,\phi)$ سے داخل اور $z = g_2(\rho,\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ب)۔ یہی تکمل کی z حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے ایک لکیر L کھینچیں جو نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ R میں $\rho = h_1(\phi)$ سے داخل اور $\rho = h_2(\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ρ حدیں ہوں گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L خطہ R کو جھاڑتے ہوئے مثبت x محور کے ساتھ زاویہ $\phi = \alpha$ اور $\phi = \beta$ کے بیچ رہتی ہے (شکل 14.60-ج)۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z)\, \mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho,\phi)}^{z=g_2(\rho,\phi)} f(\rho, \phi, z)\, \mathrm{d}z\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi \tag{14.40}$$

کروی محدد

ایسے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا چول محور z ہو، اور وہ مخروط جن کا راس مبدا پر اور محور محددی نظام کے محور z پر ہو، کو کروی محدد (شکل 14.61) میں بیان کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔ اس نظام میں کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کے محدد (r_0, θ_0, ϕ_0)، آپس میں عمودی تین سطحوں $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ ، $\phi = \phi_0$ کا نقطہ ملاپ ہو گا (شکل 14.62)۔

$r = 4$	کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبدا پر ہے
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$	مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت z محور کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے
$\phi = \dfrac{\pi}{3}$	نصف چادر جس کا چول محور z ہے اور جو مثبت x محور کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے

کروی محدد میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کروی پچر**[17] ہے جس کو $\mathrm{d}r$ ، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ تعین کرتے ہیں۔ یہ پچر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک اطراف کی قوسی لمبائی $r\,\mathrm{d}\theta$ ، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی $r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ اور موٹائی $\mathrm{d}r$ ہو گی۔ یوں کروی محدد میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم $\mathrm{d}H$ (شکل 14.63)

$$\mathrm{d}H = (\mathrm{d}r)(r\sin\theta\,\mathrm{d}\phi)(r\,\mathrm{d}\theta) = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \tag{14.41}$$

ہو گا اور تہرا تکمل کی صورت درج ذیل ہو گی۔

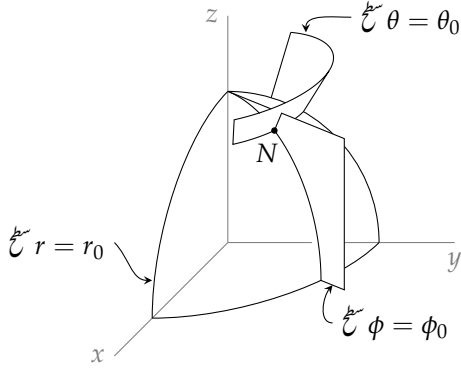
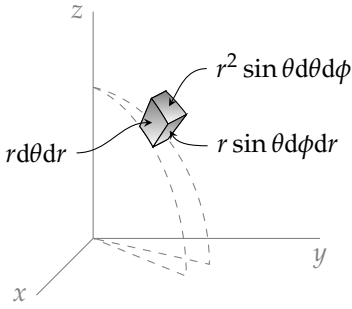
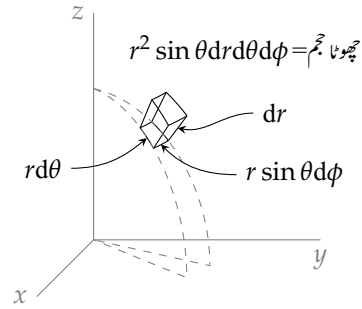
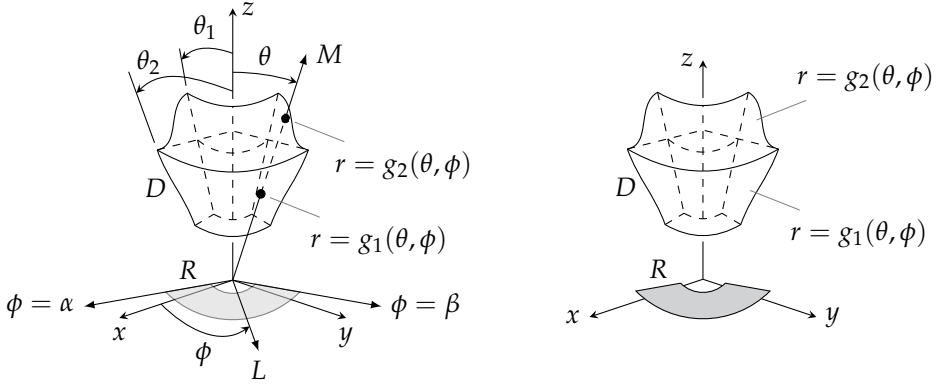
$$\iiint F(r, \theta, \phi)\, \mathrm{d}H = \iiint F(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

ہم عموماً پہلے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان تکملات پر غور کریں گے جو z محور کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے θ اور ϕ حدیں مستقل ہوں۔

اس مستطیلی پچر کی سطحیں شکل 14.64 میں دکھائی گئی ہیں۔

---

[17] spherical wedge

شکل 14.61: کروی محدد کی پیمائش ایک فاصلہ اور دو زاویات کی مدد سے کی جاتی ہے۔

شکل 14.62: کروی محدد میں تین آپس میں عمودی سطحیں نقطہ N تعین کرتے ہیں۔

شکل 14.63: کروی محدد میں چھوٹا حجم۔

شکل 14.64: کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔

شکل 14.65: کروی محدد میں تہرا تکمل کے حدوں کی تلاش۔

کروی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

فضا میں خطہ D پر تکمل

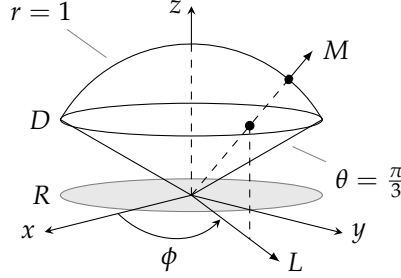
$$\iiint\limits_D F(r, \theta, \phi) \,\mathrm{d}H$$

کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے r، اس کے بعد θ، اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy میں D کی تظلیل R کا خاکہ بنا کر D کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں (شکل 14.65)۔

2. تکمل کی r حدیں: مبدا سے ایک لکیر M کھینچیں جو مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہو۔ ساتھ ہی R پر M کی تظلیل L کا خاکہ بنائیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بنائی گی۔ جیسے جیسے r بڑھے گا M خطہ D میں $r = g_1(\theta, \phi)$ سے داخل اور $r = g_2(\theta, \phi)$ سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی r حدیں ہوں گی۔

3. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے M مثبت محور z کے ساتھ $\theta = \theta_1$ سے $\theta = \theta_2$ تک زاویہ بنائے گی۔ یہی تکمل کی θ حدیں ہوں گی۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لئے L خطہ R پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے $\phi = \alpha$ سے $\phi = \beta$ تک چلتی ہے۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔

شکل 14.66: کرہ اور مخروط کے بیچ خطہ۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D F(r,\theta,\phi)\,\mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r=g_1(\theta,\phi)}^{r=g_2(\theta,\phi)} F(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

مثال 14.22: ٹھوس کرہ $r \le 1$ سے مخروط $\theta = \pi/3$ بالائی خطہ D کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔ حل: اس خطے کا حجم $\iiint\limits_D r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔ تکمل کی قیمت معلوم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

1. خاکہ: ہم D اور مستوی xy میں اس کی تظلیل R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.66)۔

2. تکمل کی r حدیں: ہم مثبت z محور کے ساتھ θ زاویہ پر مبدا سے شعاع M کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی xy مستوی میں اس کی تظلیل L کھینچتے ہیں جو مثبت x محور کے ساتھ زاویہ ϕ بناتا ہے۔ شعاع M خطہ D میں $(r=0$ سے داخل اور $r=1$ سے خارج ہو گا۔

3. تکمل کی θ حدیں: مخروط $\theta = \pi/3$ مثبت z محور کے ساتھ زاویہ $\pi/3$ بناتا ہے۔ یوں شعاع M زاویہ $\theta = 0$ سے $\theta = \pi/3$ تک چل سکتی ہے۔

4. تکمل کی ϕ حدیں: شعاع L خطہ R پر $\phi = 0$ سے 2π تک چلتی ہے۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_D r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^1 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{1}{3}\cos\theta\Big]_0^{\pi/3} \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\Big)\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

□

مثال 14.23: مستقل کثافت $\delta = 1$ کا ایک ٹھوس جسم مثال 14.22 کے خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

حل: کارتیسی محدد میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}H$$

ہو گا۔ کروی محدد میں $x^2 + y^2 = (r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 = r^2\sin^2\theta$ کی بنا جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2\sin^2\theta) r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \iiint r^4 \sin^3\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

ہو گا جس کی قیمت مثال 14.22 کے خطہ کے لئے درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^4 \sin^3\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\Big]_0^{\pi/3} \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\Big)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

□

محددی بدل کے کلیات

نلکی سے کارتیسی	کروی سے کارتیسی	کروی سے نلکی
$x = \rho\cos\phi$	$x = r\sin\theta\cos\phi$	$\rho = r\sin\theta$
$y = \rho\sin\phi$	$y = r\sin\theta\sin\phi$	$z = r\cos\theta$
$z = z$	$z = r\cos\theta$	$\phi = \phi$

مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H &= \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z && \text{کارتیسی} \\
&= \mathrm{d}z\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi && \text{نلکی} \\
&= r^2\sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi && \text{کروی}
\end{aligned}$$

سوالات

نلکی محدد

سوال 14.253 تا سوال 14.258 میں تکمل کی قیمت نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال 14.253: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.254: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{18-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.255: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2\pi}\int_0^{3+24\rho^2} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.256: $\int_0^{\pi}\int_0^{\phi/\pi}\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{3\sqrt{4-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.257: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{1/\sqrt{2-\rho^2}} 3\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.258: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2} (\rho^2\sin^2\phi+z^2)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

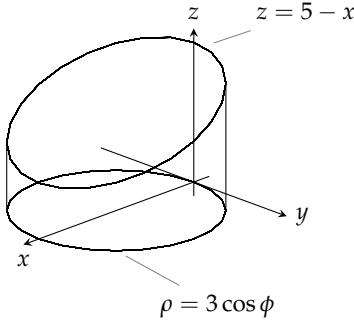
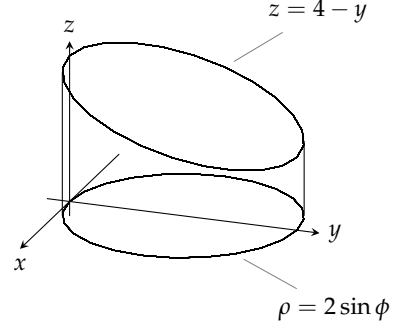
اب تک ہم نلکی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب z ، ρ ، ϕ سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال 14.259 تا سوال 14.262 کے تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.259: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.260: $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi} 4\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

سوال 14.261: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\phi+z^2)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

سوال 14.262: $\int_0^2\int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi} (\rho\sin\phi+1)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 14.263: نیچے سے مستوی $z=0$ ، اوپر سے کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ ، اور اطراف سے بیلن $x^2+y^2=1$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

شکل 14.68: خطہ برائے سوال 14.268

شکل 14.67: خطہ برائے سوال 14.267

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 14.264: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اوپر سے قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لئے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لئے لکھیں۔

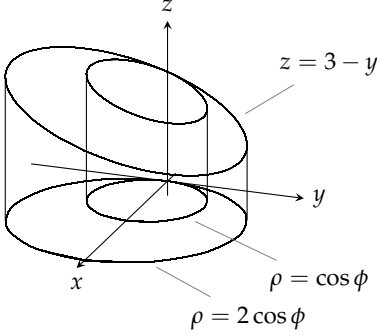
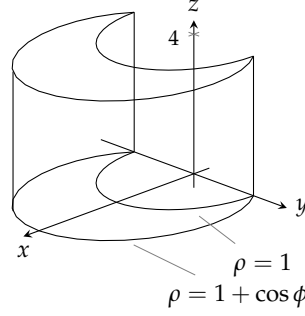
ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال 14.265: نیچے سے مستوی $z = 0$ ، اطراف سے بیلن $\rho = \cos\phi$ ، اور اوپر سے قطع مکافی سطح $z = 3\rho^2$ میں ملفوف خطہ D کے لئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لئے کے تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

سوال 14.266: درج ذیل تکمل کو معادل نلکی محدد کے تکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.267 تا سوال 14.272 میں دیے گئے خطہ D پر تکمل $\iiint_D F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ کی قیمت حاصل کرنے کے لئے تہرا تکمل لکھیں۔

شکل 14.70: خطہ برائے سوال 14.270

شکل 14.69: خطہ برائے سوال 14.269

سوال 14.267: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 2\sin\phi$ اور سر مستوی $z = 4 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.67)۔

سوال 14.268: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 3\cos\phi$ اور سر مستوی $z = 5 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.68)۔

سوال 14.269: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں قلب نما $\rho = 1 + \cos\phi$ کے اندر اور دائرہ $\rho = 1$ کے باہر اور سر مستوی $z = 4$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.69)۔

سوال 14.270: وہ ٹھوس قائمہ بیلن جس کا قاعدہ دائرہ $\rho = \cos\phi$ اور دائرہ $\rho = 2\cos\phi$ کے بیچ اور سر مستوی $z = 3 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.70)۔

سوال 14.271: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور x ، لکیر $y = x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.71)۔

سوال 14.272: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور y ، لکیر $y = x$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل 14.72)۔

کروی محدد

سوال 14.273 تا سوال 14.278 میں کروی تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

شکل 14.71: خطہ برائے سوال 14.271

شکل 14.72: خطہ برائے سوال 14.272

سوال 14.273: $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.274: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.275: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\theta)/2} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.276: $\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 5r^3\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

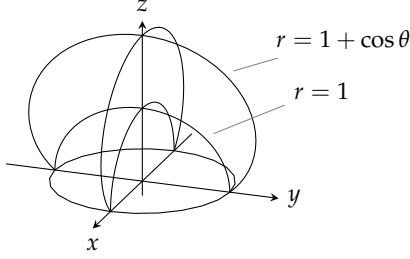
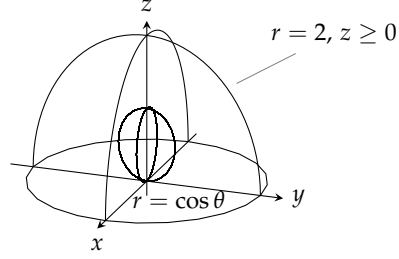
سوال 14.277: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^{2} 3r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

سوال 14.278: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}(r\cos\theta)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

اب تک ہم کروی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آ رہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔سوال 14.279 تا سوال 14.282 میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.279: $\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$

سوال 14.280: $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2\csc\theta}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

سوال 14.281: $\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12r\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$

شکل 14.74: جسم برائے سوال 14.286

شکل 14.73: جسم برائے سوال 14.285

سوال 14.282: $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc\theta}^{2} 5r^4 \sin^3\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$

سوال 14.283: کروی محدد میں (ا) $\mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$، (ب) $\mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ ترتیب سے سوال 14.263 کے خطہ کے حجم کے تہرا تکمل لکھیں۔

سوال 14.284: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ کے بیچ خطہ D کے حجم کا تکمل کروی محدد میں(ا) $\mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$، (ب) $\mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi$ ترتیب کے لئے لکھیں۔

سوال 14.285 تا سوال 14.290 میں دئے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروی تکمل (ا) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروی تکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال 14.285: کرہ $r = \cos\theta$ اور نصف کرہ $r = 2, z \geq 0$ کے بیچ ٹھوس جسم (شکل 14.73)۔

سوال 14.286: نیچے سے نصف کرہ $r = 1, z \geq 0$ اور اوپر سے سطح طواف قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ میں ملفوف ٹھوس جسم (شکل 14.74)۔

سوال 14.287: جسم طواف قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ میں ملفوف۔

سوال 14.288: وہ بالائی خطہ جو سوال 14.287 کے جسم سے مستوی xy کاٹتا ہے۔

سوال 14.289: نیچے سے کرہ $r = 2\cos\theta$ اور اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ میں ملفوف جسم (شکل 14.75)۔

سوال 14.290: نیچے سے مستوی xy، اوپر سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور اطراف سے کرہ $r = 2$ میں ملفوف جسم (شکل 14.76)۔

شکل 14.75: جسم برائے سوال 14.289

شکل 14.76: جسم برائے سوال 14.290

کارتیسی، نلکی اور کروی محدد

سوال 14.291: کرہ $r = 2$ کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔

سوال 14.292: ثُمن اول میں نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور اوپر سے کرہ $r = 3$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کا تہرا تکمل (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.293: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹتی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا تکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال 14.294: ٹھوس نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ کے جمودی معیار اثر I_z کو (ا) نلکی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔ (ج) I_z کی قیمت تلاش کریں۔

حجم

سوال 14.295 تا سوال 14.300 میں ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

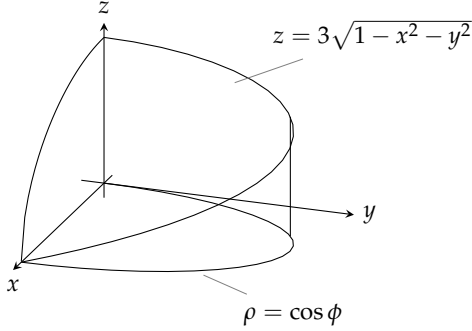
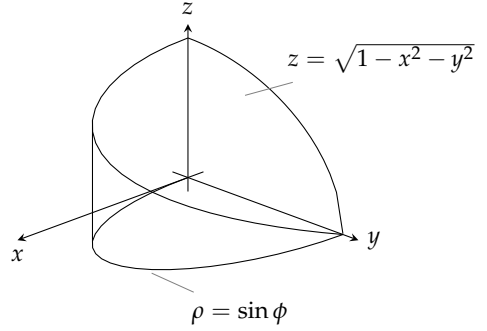
سوال 14.295: اوپر سے $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ اور نیچے سے $z = (x^2 + y^2)^2 - 1$ میں ملفوف جسم (شکل 14.77)۔

سوال 14.296: اوپر سے $z = 1 - \rho$ اور نیچے سے $z = -\sqrt{1 - \rho^2}$ میں ملفوف جسم (شکل 14.78)۔

شکل 14.77: جسم برائے شکل 14.295

شکل 14.78: جسم برائے شکل 14.296

شکل 14.79: جسم برائے شکل 14.297

شکل 14.80: جسم برائے شکل 14.298

شکل 14.82: جسم برائے شکل 14.300

شکل 14.81: جسم برائے شکل 14.299

سوال 14.297: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = 3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = -y$ سے نیچے ہے (شکل 14.79)۔

سوال 14.298: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = -3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.80)۔

سوال 14.299: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \sin\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.81)۔

سوال 14.300: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = 3\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل 14.82)۔

سوال 14.301: مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.302: ثُمن اول میں نصف مستویات $\phi = 0$ اور $\phi = \frac{\pi}{6}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.303: ٹھوس کرہ $r \leq 2$ سے مستوی $z = 1$ جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.304: مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.305: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.306: نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 1 + x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.307: موٹی دیوار کے بیلن $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ سے مخروط $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$ جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.308: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے اندر اور بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کے باہر خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.309: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.310: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $x + y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.311: اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 5 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = 4x^2 + 4y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.312: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے باہر، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 9 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال 14.313: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 1$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ سے کاٹتا ہے۔

سوال 14.314: اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

اوسط قیمت

سوال 14.315: مستویات $z = -1$ اور $z = 1$ کے بیچ بیلن $\rho = 1$ میں تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.316: کرہ $\rho^2 + z^2 = 1$ (یعنی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) کے اندر تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.317: ٹھوس گیند $r \leq 1$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.318: بالائی نصف ٹھوس کرہ $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r\cos\theta$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مراکز

سوال 14.319: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے مخروط $z = \rho, \rho \geq 0$، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.320: ثُمن اول میں اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، نیچے سے مستوی $z = 0$، اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $x = 0$ اور $y = 0$ میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.321: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال 14.286 میں دیا گیا ہے۔

سوال 14.322: اوپر سے کرہ $r = a$ اور نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.323: اوپر سے سطح $z = \sqrt{\rho}$، نیچے سے مستوی xy، اور اطراف سے بیلن $\rho = 4$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال 14.324: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات $\phi = -\pi/3, \rho \geq 0$ اور $\phi = \pi/3, \rho \geq 0$ ٹھوس گیند $\rho^2 + z^2 \leq 1$ سے کاٹتے ہیں۔

سوال 14.325: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن $\rho = 1$ اور بیرونی سطح بیلن $\rho = 2$ ہیں۔اس کا نچلا سر مستوی $z = 0$ اور بالائی سر مستوی $z = 4$ میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.326: ایک قائمہ دائری بیلن کا رداس 1 اور قد 2 ہے۔ (ا) بیلن کے محور، (ب) بیلن کے وسطانی مرکز سے گزرتی ہوئے لکیر جو بیلن کے محور کو عمودی ہو، کے لحاظ سے بیلن کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.327: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ 1 اور قد 1 ہے۔مخروط کے راس سے گزرتی ہوئی لکیر جو مخروط کے محور کو عمودی ہے کے لحاظ سے مخروط کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.328: رداس a کے کرہ کا جمودی معیار اثر کرہ کے قطر کے لحاظ سے تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال 14.329: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ a اور قد h ہے۔ اس کا جمودی معیار اثر مخروط کے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (اشارہ: مخروط کے محور کو محور z اور راس کو مبدا پر رکھیں۔)

سوال 14.330: ایک ٹھوس جسم اوپر سے قطع مکافی سطح $z = \rho^2$، نیچے سے مستوی $z = 0$، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ ہے۔

سوال 14.331: ایک ٹھوس جسم نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = z^2$ ہے۔

سوال 14.332: ایک ٹھوس گیند کا رداس $r = a$ ہے اور کثافت (ا) $\delta(r, \theta, \phi) = r^2$، (ب) $\delta(r, \theta, \phi) = \rho = r \sin \theta$ ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس گیند کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال 14.333: دکھائیں کہ ایک نیم ترخیمی سطح طواف $\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} \leq 1, z \geq 0$ کا وسطانی مرکز محور z پر قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہے۔ بالخصوص $h = a$ ایک ٹھوس نصف کرہ دیتا ہے۔ یوں ٹھوس نصف کرہ کا وسطانی مرکز قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہو گا۔

سوال 14.334: دکھائیں کہ ایک قائمہ دائری ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز محور پر قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا۔ (عمومی طور پر مخروط اور اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا)۔

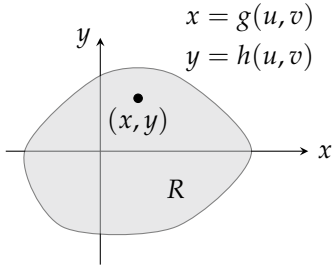
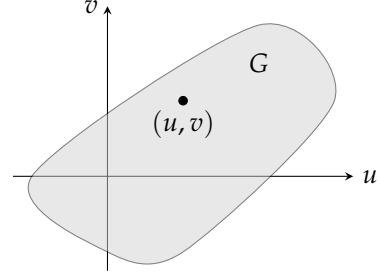
سوال 14.335: رداس $\rho = a$ کا ایک قائمہ دائری بیلن مستویات $z = 0$ اور $z = h, h > 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال 14.336: رداس R کے ایک سیارہ پر ہوا کی کثافت $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ہے جہاں سیارہ کی سطح سے بلندی h ہے جبکہ سیارہ کی سطح پر ہوا کی کثافت μ_0 ہے اور c ایک مثبت مستقل ہے۔ سیارہ میں ہوا کی کمیت تلاش کریں۔

سوال 14.337: ایک سیارہ کا رداس R اور کمیت M ہے۔ اس کی کثافت کروی تشاکلی ہے جو سطح سے مرکز تک خطی بڑھتی ہے۔ سیارہ کی سطحی کثافت صفر لیتے ہوئے اس کے مرکز پر کثافت تلاش کریں۔

14.7 تکملات بالکثرت میں بدل

اس حصہ میں بارہا تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل سکھایا جائے گا۔ واحد تکمل کی طرح یہاں بھی پیچیدہ تکمل کو سادہ تکمل سے بدلا جاتا ہے۔ بدل سے متکمل یا تکمل کی حدوں یا ان دونوں کی سادہ روپ استعمال کی جاتی ہے۔

(ا) کارتیسی uv مستوی

(ب) کارتیسی xy مستوی

شکل 14.83: مستوی xy میں خطہ R پر تکمل کا تبادلہ مساوات $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ مستوی uv میں خطہ G پر کرتی ہیں۔

دوہرا تکملات میں بدل

ہم قطبی محدد کی بدل کا استعمال حصہ 14.3 میں دیکھ چکے ہیں جو دہرا تکملات کی بدل، جس میں متغیرات کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی تصور کیا جاتا ہے، کی ایک مخصوص صورت ہے۔

فرض کریں مستوی uv کے خطہ G کا تبادلہ ایک ایک مطابقت کی مساوات

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v)$$

کے ذریعہ مستوی xy کے خطہ R میں کیا جاتا ہے (شکل 14.83)۔ ہم R کو اس تبادل میں G کا **عکس**[18] اور G کو R کا **قبل عکس**[19] کہتے ہیں۔ خطہ R میں کسی بھی تفاعل $f(x,y)$ کو خطہ G میں معین تفاعل $f(g(u,v),h(u,v))$ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خطہ R میں $f(x,y)$ کے تکمل کا خطہ G میں $f(g(u,v),h(u,v))$ کے تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

اس کا جواب: اگر g ، h اور f کے جزوی تفرقات استمراری ہوں اور $J(u,v)$ (جس پر جلد تبصرہ کیا جائے گا) صرف تنہا نقطوں پر صفر ہو (اگر صفر ہو بھی) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(g(u,v),h(u,v))\big|J(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{14.42}$$

مذکورہ بالا مساوات میں $J(u,v)$ ، جو یعقوبی کہلاتا ہے، کی مطلق قیمت استعمال کی گئی۔

---

[18] image
[19] preimage

تعریف: **یعقوبی مقطع**[20] یا محددی تبادل $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ کے **یعقوبی**[21] سے مراد درج ذیل ہے:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{14.43}$$

□

یعقوبی کو

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے جو ہمیں یاد دلاتا ہے کہ x اور y کی جزوی تفرقات سے یعقوبی (مساوات 14.43) حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 14.42 کی استخراج آپ کو اعلٰی احصاء کے نصاب میں ملے گی جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

قطبی محدد میں میں u اور v کی جگہ r اور θ ہوں گے لہٰذا $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لیتے ہوئے یعقوبی

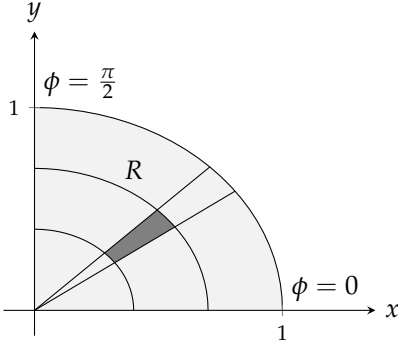
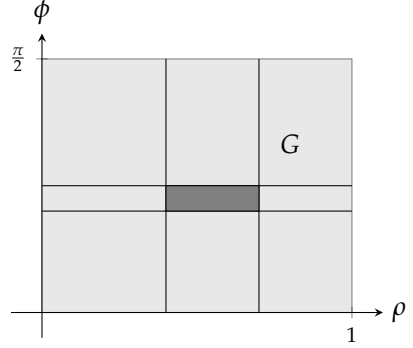
$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

ہو گا اور مساوات 14.42 درج ذیل صورت اختیار کرے گی جو حصہ 14.3 کی مساوات 14.28 ہے۔

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{اگر } r \geq 0 \text{ ہو} \end{aligned} \tag{14.44}$$

شکل 14.84 میں دکھایا گیا ہے کہ کس طرح مستطیل $G: 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$ کا تبادلہ مساوات $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ ایک چوتھائی دائرہ R ، جس کی سرحد ربع اول میں مستوی xy پر $x^2 + y^2 = 1$ ہے، میں کرتی ہیں۔

دھیان رہے کہ مساوات 14.44 کی دائیں ہاتھ میں قطبی محددی مستوی میں کسی خطہ پر $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ کا تکمل نہیں بلکہ کارتیسی r,θ مستوی کے خطہ G میں $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ اور r کے حاصل ضرب کا تکمل ہے۔

[20] یہ ریاضی دان کارل گستاف یعقوب یعقوبی کے نام سے منسوب ہے۔
[21] Jacobian

(ا) کارتیسی $\rho\phi$ مستوی

(ب) کارتیسی xy مستوی

شکل 14.84: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \rho\cos\phi$ ، $y = \rho\sin\phi$ خطہ R میں کرتی ہیں۔

دھیان رہے کہ مساوات تبادل $x = g(u, v)$ ، $y = h(u, v)$ خطہ G کا تبادلہ R میں کرتی ہیں مگر یہ مساوات R میں تکمل کو تبدیل کر کے G میں تکمل دیتی ہیں۔

آئیں تبادل کی دوسری مثال دیکھیں۔

مثال 14.24: مستوی uv میں موزوں خطہ پر تبادل

$$u = \frac{2x - y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \tag{14.45}$$

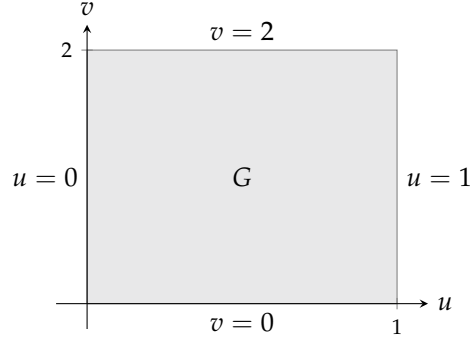
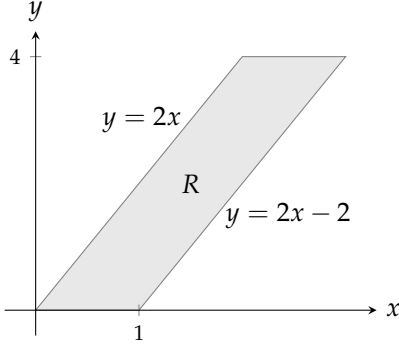
استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x - y}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

حل: ہم مستوی xy میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.85)۔

مساوات 14.42 استعمال کرنے کی خاطر ہمیں مستوی uv میں مطابقتی خطہ G اور تبادل کا یعقوبی معلوم کرنے ہوں گے۔ انہیں دریافت کرنے کے لئے ہم مساوات 14.45 کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = u + v, \quad y = 2v \tag{14.46}$$

اس کے بعد ہم R کی سرحدوں کی مساوات میں انہیں پر کر کے G کی سرحدیں دریافت کرتے ہیں۔

شکل 14.85: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = u + v$ ، $y = 2v$ خطہ R میں کرتی ہیں۔ ان مساوات کو $u = (2x - y)/2$ ، $v = y/2$ لکھ کر R کا تبادلہ G میں کیا جا سکتا ہے۔

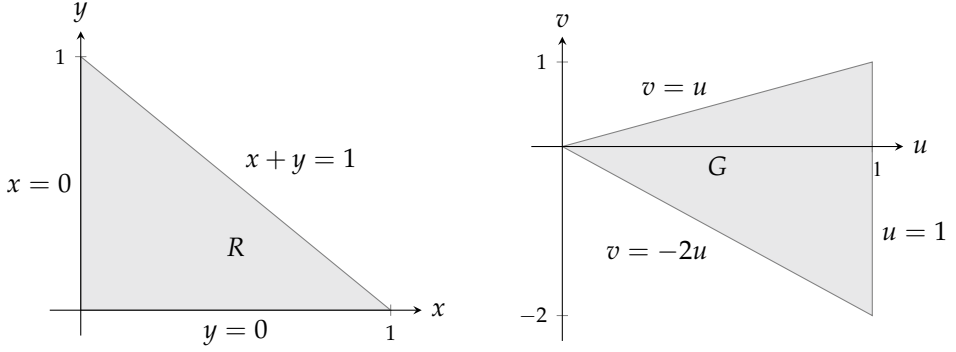
خطہ R کی سرحد کی xy مساواتیں	خطہ G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	uv مساواتوں کی سادہ صورت
$x = \frac{y}{2}$	$u + v = \frac{2v}{2} = v$	$u = 0$
$x = \frac{y}{2} + 1$	$u + v = \frac{2v}{2} + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

تبادل کا یعقوبی (مساوات 14.46 سے) درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

ہم اب مساوات 14.42 استعمال کرنے کی تمام معلومات جانتے ہیں:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u \left| J(u,v) \right| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^2 \left[u^2 \right]_0^1 \mathrm{d}v = \int_0^2 \mathrm{d}v = 2 \end{aligned}$$

□

شکل 14.86: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}$ ، $y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$ خطہ R میں کرتی ہیں۔ ان مساوات کو $u = x + y$ ، $v = y - 2x$ لکھ کر R کا تبادلہ G میں کیا جا سکتا ہے۔

مثال 14.25: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

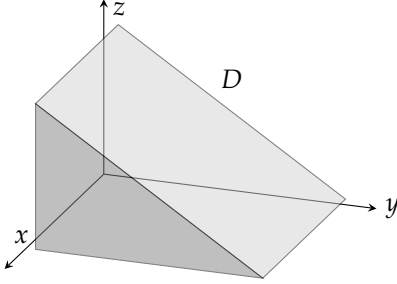
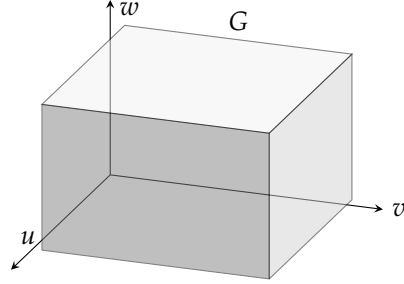
حل: ہم مستوی xy میں تکمل کے خطہ R کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.86)۔ متکمل کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ تبادل $u = x + y$ اور $v = y - 2x$ استعمال کیا جائے جنہیں u اور v کی صورت میں x اور y کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \tag{14.47}$$

ہم مساوات 14.47 سے مستوی uv میں خطہ G کی سرحدیں معلوم کرتے ہیں۔

uv مساواتوں کی سادہ صورت	G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	R کی سرحد کی xy مساواتیں
$u = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$x + y = 1$
$v = u$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$x = 0$
$v = -2u$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$y = 0$

مساوات 14.47 میں دیے تبادل کا یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

(ا) کارتیسی uvw فضا۔

(ب) کارتیسی xyz فضا۔

شکل 14.87: کارتیسی xyz فضا میں خطہ D پر تکمل کا تبادلہ مساوات $x = g(u, v, w)$ ، $y = h(u, v, w)$ ، $z = k(u, v, w)$ کارتیسی uvw فضا میں خطہ G پر تکمل میں کرتی ہیں۔

ہم مساوات 14.42 سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \,dy\,dx &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2}\, v^2 \big|J(u,v)\big| \,dv\,du \\ &= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2}\, v^2 \Big(\frac{1}{3}\Big) \,dv\,du = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2}\Big(\frac{1}{3}v^3\Big)_{v=-2u}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,du = \int_0^1 u^{7/2}\,du = \frac{2}{9}u^{9/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\end{aligned}$$

□

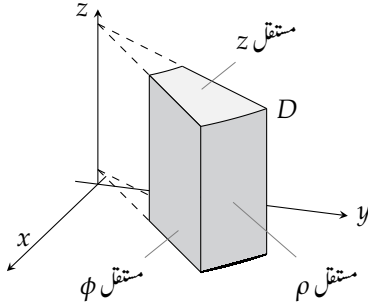
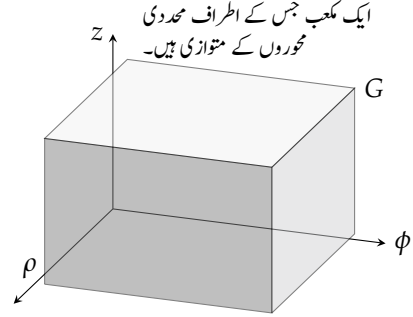
تہرا تکملات میں بدل

نلکی اور کروی بدل ان بدل کی خصوصی صورتیں ہیں جو تہرا تکملات کے متغیرات کی تبدیلی کو تین بعدی فضا کا تبادل تصور کرتے ہیں۔ یہ ترکیب دوہرا تکملات کی ترکیب کی طرح ہے، بس اب ہم دو کی بجائے تین بعد میں کام کرتے ہیں۔

فرض کریں uvw فضا میں خطہ G کا تبادلہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ xyz فضا کے خطہ D میں درج ذیل روپ کی مساواتوں سے کیا جاتا ہے (شکل 14.87)۔

$$x = g(u,v,w), \quad y = h(u,v,w), \quad z = k(u,v,w)$$

تب D میں کسی بھی تفاعل $F(x,y,z)$ کو G میں معین تفاعل

$$F(g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)) = H(u,v,w)$$

(ا) کارتیسی $\rho\phi z$ فضا۔

(ب) کارتیسی xyz فضا۔

شکل 14.88: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \rho\cos\phi$ ، $y = \rho\sin\phi$ ، $z = z$ خطہ D میں کرتی ہیں۔

تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگر g ، h اور k کے اول جزوی تفرقات استمراری ہوں تب D پر F کے تکمل کا G پر $H(u,v,w)$ کے تکمل کے ساتھ تعلق درج ذیل مساوات دیگی۔

$$\iiint_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_G H(u,v,w)\left|J(u,v,w)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \tag{14.48}$$

اس مساوات میں $J(u,v,w)$ کی مطلق قیمت استعمال کی گئی ہے جو درج ذیل **یعقوبی مقطع**[22] ہے۔

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \tag{14.49}$$

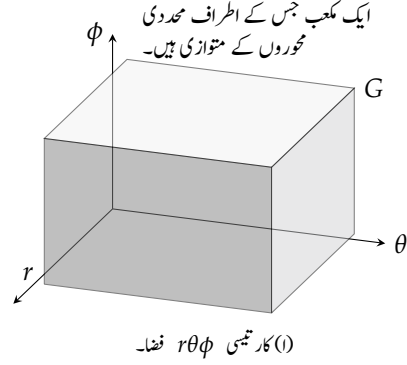
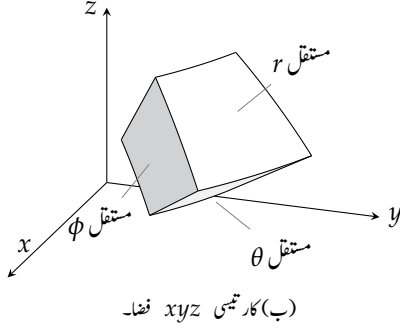
متغیرات کی تبدیلی کا کلیہ، جس کو مساوات 14.48 میں پیش کیا گیا ہے، پیچیدہ ہے اور دو بعدی صورت کی طرح، اس کی اشتقاق کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

نلکی محدد میں u ، v اور w کی جگہ ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔ کارتیسی $\rho\phi z$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں تبادل درج ذیل مساوات دیں گی (شکل 14.88)۔

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

[22] Jacobian determinant

(ب) کارتیسی xyz فضا۔

(ا) کارتیسی $r\theta\phi$ فضا۔

شکل 14.89: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = r\sin\theta\cos\phi$ ، $y = r\sin\theta\sin\phi$ ، $z = r\cos\theta$ خطہ D میں کرتی ہیں۔

اس تبادل کا یعقوبی

$$J(\rho,\phi,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho$$

ہو گا۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

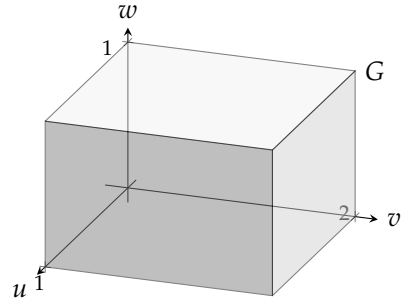
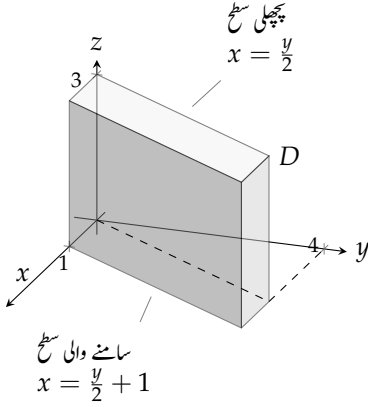
$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(\rho,\phi,z)\big|\rho\big|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{14.50}$$

جب بھی $\rho \geq 0$ ہو، ہم مطلق کی علامت سے چھٹکارا حاصل کر سکتے ہیں۔

کروی محدد میں u ، v اور w کی جگہ r ، θ اور ϕ ہوں گے۔کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں تبادل درج ذیل مساوات دیں گی (شکل 14.89)۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

اس تبادل کا یعقوبی

$$J(r,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \tag{14.51}$$

شکل 14.90: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = u + v$ ، $y = 2v$ ، $z = 3w$ خطہ D میں کرتی ہیں جبکہ ان کی مخالف مساوات $u = \frac{2x-y}{2}$ ، $v = \frac{y}{2}$ ، $w = \frac{z}{3}$ خطہ D کا تبادلہ G میں کرتی ہیں۔

ہو گا (سوال 14.354)۔یوں مساوات 14.48 درج ذیل صورت اختیار کریگی۔

$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(r, \theta, \phi)\left|r^2 \sin\theta\right|\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{14.52}$$

کروی محدد میں $0 \leq \theta \leq \pi$ کی بنا $\sin\theta$ کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا مطلق کی علامت لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

آئیں تبادل کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال 14.26: درج ذیل تبادل

$$u = (2x - y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \tag{14.53}$$

استعمال کرتے ہوئے uvw فضا میں موزوں خطہ پر تکمل لے کر درج ذیل تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم xyz فضا میں تکمل کے خطہ D کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل 14.90)۔ یہاں سرحدی سطحیں مستویات ہیں۔

مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے ہمیں uvw فضا میں مطابقتی خطہ G اور تبادل کا یعقوبی جاننا ہو گا۔ ہم مساوات 14.53 کو x ، y اور z کے لئے u ، v اور w کی صورت میں حل کر کے

$$x = u + v, \quad y = 2v, \quad z = 3w \tag{14.54}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم D کی سرحدوں کی مساوات میں یہ قیمتیں پر کر کے G کی سرحدوں کی مساواتیں دریافت کرتے ہیں:

D کی سرحدوں کی xyz مساواتیں	G کی سرحدوں کی مطابقتی uvw مساواتیں	uvw مساواتوں کی سادہ صورتیں
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = y/2 + 1$	$u + v = 2v/2 + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$
$z = 0$	$3w = 0$	$w = 0$
$z = 3$	$3w = 3$	$w = 1$

ہم مساوات 14.54 استعمال کرتے ہوئے یعقوبی تلاش کرتے ہیں۔

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

ہم مساوات 14.48 استعمال کرنے کے لئے درکار تمام معلوم جان چکے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \Big(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\qquad = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&\qquad = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 6\int_0^1 \int_0^2 \Big[\frac{u^2}{2} + uw\Big]_0^1 \mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&\qquad = 6\int_0^1 \int_0^2 \Big(\frac{1}{2} + w\Big)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 6\int_0^1 \Big[\frac{v}{2} + vw\Big]_0^2 \mathrm{d}w = 6\int_0^1 (1+2w)\,\mathrm{d}w \\
&\qquad = 6\Big[w + w^2\Big]_0^1 = 6(2) = 12
\end{aligned}$$

□

سوالات

تبادلِ محدد

سوال 14.338:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

ب. مستوی xy میں تکونی خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(1,-2)$ ہیں کا عکس تبادل $u = x - y$ ، $v = 2x + y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.339:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = x + 2y, \quad v = x - y$$

ب. مستوی xy میں لکیر $y = 0$ ، $y = x$ اور $x + 2y = 2$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس تبادل $u = x + 2y$ ، $v = x - y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.340:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

ب. مستوی xy میں محور x ، محور y اور لکیر $x + y = 1$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس تبادل $u = 3x + 2y$ ، $v = x + 4y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.341:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لئے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = 2x - 3y, \quad v = -x + y$$

ب. مستوی xy میں $x = -3$ ، $x = 0$ ، $y = x$ اور $y = x + 1$ کے بیچ متوازی الاضلاع کا عکس تبادل $u = 2x - 3y$ ، $v = -x + y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال 14.342: درج ذیل تبادل کے یعقوبی تلاش کریں۔

ا. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v$ ب. $x = u\sin v, \quad y = u\cos v$

سوال 14.343: درج ذیل تبادل کے یعقوبی تلاش کریں۔

ا. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = w$

ب. $x = 2u - 1, \quad y = 3v - 4, \quad z = \frac{1}{2}(w - 4)$

دوہرا تکملات

سوال 14.344: درج ذیل تکمل کی قیمت x اور y کے لحاظ سے تکمل لے کر حاصل کرتے ہوئے مثال 14.24 میں حاصل قیمت (2) کی تصدیق کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x - y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.345: ربع اول میں لکیر $y = -2x + 4$ ، $y = -2x + 7$ ، $y = x - 2$ اور $y = x + 1$ کے بیچ خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.338 کا تبادل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint\limits_R (2x^2 - xy - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.346: ربع اول میں لکیر $y = -\frac{3}{2}x + 1$ ، $y = -\frac{3}{2}x + 3$ ، $y = -\frac{1}{4}x$ اور $y = -\frac{1}{4}x + 1$ کے بیچ خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.340 کا تبادل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint\limits_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.347: درج ذیل تکمل کی قیمت سوال 14.341 کا خطہ R اور تبادل استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

$$\iint\limits_R 2(x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال 14.348: ربع اول میں مستوی xy میں قطع زائد $xy = 1$ ، $xy = 9$ اور لکیر $y = x$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ تبادل $x = u/v$ ، $y = uv$ جہاں $u > 0$ ، $v > 0$ ہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو مستوی uv میں موزوں خطہ G پر ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\iint\limits_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

خطہ G پر اس uv تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال 14.349: (ا) تبادل $x = u$ ، $y = uv$ کا یعقوبی تلاش کریں اور خطہ $G : 1 \le u \le 2, 1 \le uv \le 2$ کا مستوی uv میں خاکہ بنائیں۔ (ب) اس کے بعد مساوات 14.42 استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو G پر ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں تکملات کو حل کرتے ہوئے تکمل کی قیمتیں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

سوال 14.350: مستوی xy میں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ کے بیچ خطہ پر مستقل کثافت کی پتلی چادر کی مبدا کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔ (اشارہ: تبادل $x = ar\cos\theta$ ، $y = br\sin\theta$ استعمال کریں۔)

سوال 14.351: مستوی xy میں $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر تفاعل $f(x, y) = 1$ کا تکمل لے کر ترخیم کا رقبہ πab حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس تکمل کو سیدھا حل کرنے کے لئے اس میں تکونیاتی تفاعل پر کرنا ہو گا۔ اس سے آسان طریقہ تبادل $x = au$ ، $y = bv$ استعمال کرتے ہوئے تبدیل شدہ تکمل کی قیمت کا مستوی uv میں قرص $G : u^2 + v^2 \le 1$ پر حصول ہے۔

سوال 14.352: درج ذیل تکمل کو پہلے مستوی uv میں خطہ G پر سوال 14.339 کے تبادل سے تبدیل کرتے ہوئے حل کریں۔

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y) e^{(y-x)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

سوال 14.353: مستوی uv میں درج ذیل تکمل کو تبادل $x = u + \frac{v}{2}$ ، $y = v$ کی مدد سے منتقل کریں۔ تبدیل شدہ تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3 (2x - y) e^{(2x-y)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

تہرا تکملات

سوال 14.354: کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا کے تبادل کا یعقوبی مساوات 14.51 کا مقطع دیتا ہے۔ اس مقطع کو حل کر کے اس کی قیمت $r^2 \sin\theta$ حاصل کریں۔

سوال 14.355: متغیرات x ، y اور z کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے مثال 14.26 کا تکمل حل کریں۔

سوال 14.356: ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

کا حجم تلاش کریں۔(اشارہ: تبادل $x=au$ ، $y=bv$ ، $z=cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

سوال 14.357: ٹھوس ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔(اشارہ: تبادل $x=au$ ، $y=bv$ ، $z=cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

$$\iiint \left|xyz\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

سوال 14.358: فضا xyz میں خطہ D درج ذیل ہے۔

$$1\le x\le 2,\quad 0\le xy\le 2,\quad 0\le z\le 1$$

تبادل

$$u=x,\quad v=xy,\quad w=3z$$

استعمال کر کے فضا uvw میں موزوں خطہ G پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iiint\limits_D (x^2y+3xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

سوال 14.359: یہ جانتے ہوئے کہ نصف کرہ کا مرکز کمیت کرہ کے قاعدہ سے سر جانب محور تشاکلی پر تین آٹھواں فاصلہ پر ہے، موزوں تکملات کو بدل کر دکھائیں کہ نصف ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1,\ z\ge 0$$

کا مرکز کمیت محور z پر قاعدہ سے راس جانب تین آٹھواں فاصلہ پر ہو گا۔ آپ کو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آنی چاہیے۔

سوال 14.360: واحد متغیر کے تکملات میں بدل کو کس طرح ترکیب تبادل کا ایک خصوصی روپ تصور کیا جا سکتا ہے؟ ان میں یعقوبی کی قیمت کیا ہو گی؟ ایک مثال کی مدد سے وضاحت کریں۔

باب 15

سمتی میدان میں تکمل

ایک جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاو پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

15.1 خطی تکمل

جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا **خطی تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، خطی تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

خطی تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاو کا حساب کرتے ہیں۔

[1] line integral

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کو متناہی تعداد کے ذیلی قوسین میں ٹکڑے کرتے ہیں۔ ایک علامتی ذیلی قوس کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ ہم ہر ذیلی قوس پر ایک نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{15.1}$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات 15.1 کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a **تا** b **اس قوس پر** f **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{"} C \text{ پر } f \text{ کا تکمل"} \tag{15.2}$$

ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ حصہ 12.3 کی مساوات 12.20 میں}$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right| \mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

خطی تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{15.3}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال 15.1: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کا تکمل کریں۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات 15.3}\\ &= \int_0^1 (t-3t^2+t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{3}\int_0^1 (2t-3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\Big[t^2-t^3\Big]_0^1 = 0\end{aligned}$$

□

15.1.1 جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1 ، C_2 ، $\cdots$ ، C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{15.4}$$

مثال 15.2: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2]پر چل کر پہنچا جاتا ہے۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} C_1: \quad & \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ C_2: \quad & \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{15.4}$$

□

یہاں مثال 15.1 اور مثال 15.2 کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا تکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔سوم، مثال 15.1 میں C اور مثال 15.2 میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x,y,z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $M = \iiint\limits_D \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}H$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\,\mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\,\mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta \, \mathrm{d}s$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s \qquad I_L = \int_C r^2 \delta \, \mathrm{d}s$$

جہاں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر L کے لحاظ سے رداس دور: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

مثال 15.3: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پڑا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|\boldsymbol{v}(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}\end{aligned}$$

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17} \, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\ I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17}) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{17} \, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\ R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1\end{aligned}$$

دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

مثال 15.4: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

$$\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \,\mathrm{d}s = \int_C (2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (2 - \sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta\,\mathrm{d}s = \int_C z(2 - z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2 - \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{8 - \pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}$$

یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

جوابات

حصہ 11.5 صفحہ 1401

(11.227 $x = 3 + t,\ y = -4 + t,\ z = -1 + t$

(11.229 $x = -2 + 5t,\ y = 5t,\ z = 3 - 5t$

(11.231 $x = 0,\ y = 2t,\ z = t$

(11.233 $x = 1,\ y = 1,\ z = 1 + t$

(11.235 $x = t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2t$

(11.237 $x = t,\ y = 0,\ z = 0$

(11.239 $x = t,\ y = t,\ z = 3/2t,\ 0 \leq t \leq 1$

(11.241 $x = 1,\ y = 1 + t,\ z = 0,\ -1 \leq t \leq 0$

(11.243 $x = 0,\ y = 1 - 2t,\ z = 1,\ 0 \leq t \leq 1$

(11.245 $x = 2 - 2t,\ y = 2t,\ z = 2 - 2t,\ 0 \leq t \leq 1$

(11.247 $3x - 2y - z = -3$

(11.249 $7x - 5y - 4z = 6$

(11.251 $x + 3y + 4z = 34$

(11.253 $(1, 2, 3),\ -20x + 12y + z = 7$

(11.255 $y + z = 3$

(11.257 $x - y + z = 0$

(11.259 $2\sqrt{30}$

(11.261 0

(11.263 $\frac{9\sqrt{42}}{7}$

(11.265 3

(11.267 $19/5$

(11.269 $5/3$

(11.271 $9/\sqrt{41}$

(11.273 $\pi/4$

(11.275 1.76 ریڈیئن

(11.277 0.82 ریڈیئن

(11.279 $(3/2, -3/2, 1/2)$

(11.281 $(1, 1, 0)$

(11.283 $x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = -1$

(11.285 $x = 4,\ y = 3 + 6t,\ z = 1 + 3t$

(11.287 L_1 اور L_2 متقاطع ہیں؛ L_2 اور L_3 متوازی ہیں؛ L_1 اور L_3 غیر ہمسطحی ہیں۔

(11.289 $x = 2 + 2t,\ y = -4 - t,\ z = 7 + 3t;\ x = -2 - t,\ y = -2 + t/2,\ z = 1 - 3/2t$

(11.291 $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}),\ (-1, 0, -3),\ (1, -1, 0)$

(11.295 بہت سارے مختلف جوابات ممکن ہیں۔ ان میں سے ایک جواب ہے: $x + y = 3,\ 2y + z = 7$

(11.297 ماسوائے ان سطحوں کے جو مبدا سے گزرتے ہوں یا جو محددی محور کے متوازی ہوں تمام سطحوں کو $x/a + y/b + z/c = 1$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

حصہ 11.6 صفحہ 1417

(11.301 شکل 11.76ب

(11.303 شکل 11.76ي

(11.305 شکل 11.76ج

(11.307 شکل 11.76ہ

(11.309 شکل 11.76ح

(11.311 شکل 11.76ط

(11.313 $x^2 + y^2 = 4$

(11.315 $z = y^2 - 1$

(11.317 $x^2 + 4z^2 = 16$

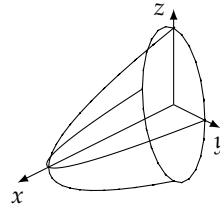
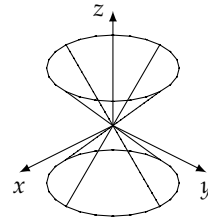
(11.319 $z^2 - y^2 = 1$

(11.321 $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(11.323 $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

(11.325 $z = x^2 + 4y^2$

$z = 8 - x^2 - y^2$ (11.327

$x = 4 - 4y^2 - z^2$ (11.329

$x^2 + y^2 = z^2$ (11.331

$4x^2 + 9z^2 = 9y^2$ (11.333

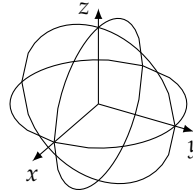
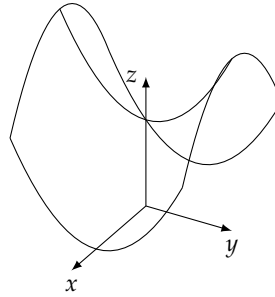
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (11.335

$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ (11.337

$z^2 - x^2 - y^2 = 1$ (11.339

$x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ (11.341

$y^2 - x^2 = z$ (11.343

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (11.345

$z = 1 + y^2 - x^2$ (11.347

$y = -x^2 - z^2$ (11.349

$16x^2 + 4y^2 = 1$ (11.351

$x^2 + y^2 - z^2 = 4$ (11.353

$x^2 + z^2 = y$ (11.355

$x^2 + z^2 = 1$ (11.357

$16y^2 + 9z^2 = 4x^2$ (11.359

(11.361 $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$

(11.363 $x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$

(11.365 $z = -x^2 - y^2$

(11.367 $x^2 - 4y^2 = 1$

(11.369 $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$

(11.371 $x^2 + y^2 = z$

(11.373 $yz = 1$

(11.375 $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$

(11.377 (ا) $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$، (ب) 8π، (ج) $\frac{4\pi abc}{3}$

(11.381 راس $(0, y_1, cy_1^2/b^2 2)$، ماسکہ $(0, y_1, cy_1^2/b^2 - a^2/(4c))$

حصہ 11.7 صفحہ 1432

(11.395 نلکی $(0,0,0)$، کروی $(0,0,0)$

(11.397 نلکی $(1, \pi/2, 0)$، کروی $(1, \pi/2, \pi/2)$

(11.399 کارتیسی $(1,0,0)$، کروی $(1, \pi/2, 0)$

(11.401 کارتیسی $(0,1,1)$، کروی $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/2)$

(11.403 کارتیسی $(0, -2\sqrt{2}, 0)$، نلکی $(2\sqrt{2}, 3\pi/2, 0)$

(11.405 $x^2 + y^2 = 0$ ، $\phi = 0$ یا $\phi = \pi$ یعنی محور z

(11.407 $z = 0$ ، $\theta = \pi/2$ ، مستوی xy

(11.409 $z = \rho$ ، $0 \le \rho \le 1$ ؛ $\theta = \pi/4$ ، $0 \le r \le \sqrt{2}$ ؛ ایک محدود ترخیم

(11.411 $x = 0$ ، $\phi = \pi/2$ ، مستوی yz

(11.413 $\rho^2 + z^2 = 4$ ، $r = 2$ ؛ رداس 2 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

(11.415 $x^2 + y^2 + (z - 5/2)^2 = 25/4$ ، $\rho^2 + z^2 = 5z$ ، رداس $5/2$ کا کرہ جس کا مرکز $(0,0,5/2)$ (کارتیسی) ہے۔

(11.417 $y = 1$ ، $r \sin\theta \sin\phi = 1$ ، مستوی $y = 1$

(11.419 $z = \sqrt{2}$ ، سطح $z = \sqrt{2}$

(11.421 $\rho^2 + z^2 = 2z$ ، $z \le 1$ ؛ $r = 2\cos\theta$ ، $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$ ؛ نچلا نصف کرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0,0,1)$ (کارتیسی) ہے۔

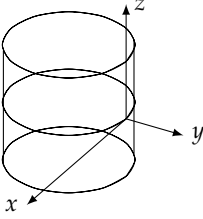
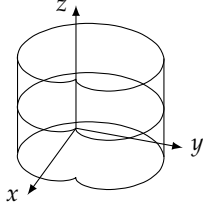
(11.423 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ، $-3/2 \le z \le 3/2$ ؛ $\rho^2 + z^2 = 9$ ، $-3/2 \le z \le 3/2$ ، رداس 3 کے کرہ کا وہ حصہ جو سطح $z = -3/2$ اور سطح $z = 3/2$ کے بیچ ہے۔ کرہ کا مرکز مبدا پر ہے۔

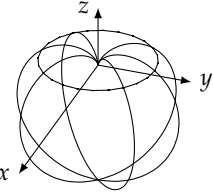
(11.425 $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ ، $0 \le z \le 4$ ؛ $r\cos\theta = 4 - 4r^2 \sin^2\theta$ ، $0 \le \theta \le \pi/2$ ، قطع مکافی سطح $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ کا بالائی حصہ جس کو مستوی xy کاٹتا ہے۔

(11.427 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ، $-1 \le z \le 0$ ؛ $z = -\rho$ ، $0 \le \rho \le 1$ ، ترخیم جس کا راس مبدا پر ہے، اس کا قاعدہ، مستوی $z = -1$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ ہے،

(11.429 $z + x^2 - y^2 = 0$ یا $z = y^2 - x^2$ ، $\cos\theta + r\sin^2\theta\cos 2\phi = 0$ ، قطع زائد قطع مکافی سطح

(11.431 $(2,3,1)$

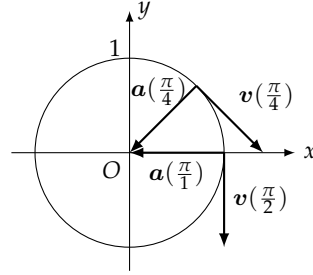
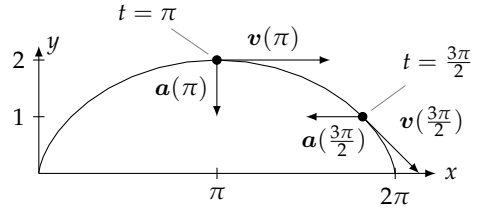
(11.433 مستوی $\rho\phi$ میں دائرہ $\rho = -2\sin\phi$ کا پیدا کردہ ، محور z کا متوازی قائمہ دائری بیلن۔

(11.435 محور z کے متوازی لکیروں کی پیدا کردہ نلکی جس کو مستوی $\rho\phi$ میں قلب نما $\rho = 1 - \cos\phi$ پیدا کرتا ہے۔

(11.437 سطح طواف قلب نما جو محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ مبدا پر کنگرہ نیچے رخ ہے۔

(11.439 (ب) $\theta = \pi/2$

(11.443 سطح کی مساوات $\rho = f(z)$ ہمیں بتاتی ہے کہ نقطہ $(\rho, \phi, z) = (f(z), \phi, z)$ تمام ϕ کے لئے سطح پر واقع ہو گا۔ بالخصوص جس بھی $(f(z), \phi, z)$ اس سطح پر پایا جاتا ہو اس وقت $(f(z), \phi + \pi, z)$ بھی اس سطح پر پایا جائے گا لہٰذا محور z کے لحاظ سے یہ سطح تشاکلی ہے۔

حصہ 12.1 صفحہ 1449

(12.1 $y = x^2 - 2x$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$

(12.3 $y=\frac{2}{9}x^2,\ \boldsymbol{v}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$

(12.5 $t=\frac{\pi}{4}:\ \boldsymbol{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j};\ t=\frac{\pi}{2}:\ \boldsymbol{v}=-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}$

(12.7 $t=\pi:\ \boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{j};\ t=\frac{3\pi}{2}:\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a}=-\boldsymbol{i}$

(12.9 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a}=2\boldsymbol{j};$ رفتار $3;$ رخ $\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{1})=3(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

(12.11 $\boldsymbol{v}=(-2\sin t)\boldsymbol{i}+(3\cos t)\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a}=(-2\cos t)\boldsymbol{i}-(3\sin t)\boldsymbol{j};$ رفتار $2\sqrt{5};$ رخ $\frac{-1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(\pi/2)=2\sqrt{5}[-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}]$

(12.13 $\boldsymbol{v}=(\frac{2}{t+1})\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a}=\frac{-2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k};$ رفتار $\sqrt{6};$ رخ $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(1)=\sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k})$

(12.15 $\frac{\pi}{2}$

(12.17 $\frac{\pi}{2}$

(12.19 $t=0,\ \pi,\ 2\pi$

(12.21 $\frac{1}{4}\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+\frac{3}{2}\boldsymbol{k}$

(12.23 $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

(12.25 $(\ln 4)\boldsymbol{i}+(\ln 4)\boldsymbol{j}+(\ln 2)\boldsymbol{k}$

(12.27 $\boldsymbol{r}(t)=(\frac{-t^2}{2}+1)\boldsymbol{i}+(\frac{-t^2}{2}+2)\boldsymbol{j}+(\frac{-t^2}{2}+3)\boldsymbol{k}$

(12.29 $\boldsymbol{r}(t)=((t+1)^{3/2}-1)\boldsymbol{i}+(-e^{-t}+1)\boldsymbol{j}+(\ln(t+1)+1)\boldsymbol{k}$

(12.31 $\boldsymbol{r}(t)=8t\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j}+(-16t^2+100)\boldsymbol{k}$

(12.33 $x=t,\ y=-1,\ z=1+t$

(12.35 $x=at,\ y=a,\ z=2\pi b+bt$

(12.37 ا) (1) مستقل رفتار 1 ؛ (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں
ب) (1) مستقل رفتار 2 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں
ج) (1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) یہ $(1,0)$ کی بجائے $(0,-1)$ سے ابتدا کرتا ہے
د) (1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے رخ (4) جی ہاں
ہ) (1) متغیر رفتار (2) نہیں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں

(12.39 $\boldsymbol{r}(t)=(\frac{3}{2}t^2+\frac{6}{\sqrt{11}}t+1)\boldsymbol{i}-(\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{11}}t-2)\boldsymbol{j}+(\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{\sqrt{11}}t+3)\boldsymbol{k}=(\frac{1}{2}t^2+\frac{2t}{\sqrt{11}})(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$

(12.41 $\boldsymbol{v}(t)=2\sqrt{5}\boldsymbol{i}+\sqrt{5}\boldsymbol{j}$

(12.43 زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{v}|=3$ ، کم سے کم $|\boldsymbol{v}|=2$ ، زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{a}|=3$ ، کم سے کم $|\boldsymbol{a}|=2$

حصہ 12.2 صفحہ 1466

(12.64 $50\,\mathrm{s}$

(12.66 ا) $72.2\,\mathrm{s}$ ، $25\,510\,\mathrm{m}$ ؛ (ب) $4020\,\mathrm{m}$ ؛ (ج) $6378\,\mathrm{m}$

(12.68 $t\approx 2.1257\,\mathrm{s},\quad x\approx 20.14\,\mathrm{m}$

(12.70 $v_0=9.9\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ \alpha=18.4°,\alpha=71.6°$

(12.72 $174\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

(12.74 گیند درخت کے پتوں کو چھوتا ہوا اسے پار کر پائے گا۔

(12.76 $24.87\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(12.80 $141\,\%$

(12.84 1.789 سیکنڈ، $19.92\,\mathrm{m}$

(12.88 $\boldsymbol{v}(t)=-gt\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{r}(t)=-\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}_0t$

حصہ 12.3 صفحہ 1475

(12.91 $\boldsymbol{T} = (-\frac{2}{3}\sin t)\boldsymbol{i} + (\frac{2}{3}\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{k}, \quad 3\pi$

(12.93 $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{k}, \quad \frac{52}{3}$

(12.95 $\boldsymbol{T} = -\cos t\boldsymbol{j} + \sin t\boldsymbol{k}, \quad \frac{3}{2}$

(12.97 $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - t\sin t}{t+1})\boldsymbol{i} + (\frac{\sin t + t\cos t}{t+1})\boldsymbol{j} + (\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1})\boldsymbol{k}, \quad \frac{\pi^2}{2} + \pi$

(12.99 $(0, 5, 24\pi)$

(12.101 $s(t) = 5t, \quad L = \frac{5\pi}{2}$

(12.103 $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \quad L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(12.105 $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$

(12.107 (ا) نلکی $x^2 + y^2 = 1$ اور مستوی $x + z = 1$ (ب) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ (ج) $L \approx 7.64$

حصہ 12.4 صفحہ 1491

(12.109 $\boldsymbol{T} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \kappa = \cos t$

(12.111 $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$

(12.113 $\boldsymbol{a} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{T} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{N}$

(12.115 (ب) $\cos x$

(12.117 (ب) $\boldsymbol{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{j}$ ، (ج) $\boldsymbol{N} = -\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j})$

(12.119 $\boldsymbol{T} = \frac{3\cos t}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3\sin t}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = (\frac{4}{5}\cos t)\boldsymbol{i} - (\frac{4}{5}\sin t)\boldsymbol{j} - \frac{3}{5}\boldsymbol{k}, \kappa = \frac{3}{25}, \tau = -\frac{4}{25}$

(12.121 $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}, \tau = 0$

(12.123 $\boldsymbol{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\boldsymbol{j}}{\sqrt{t^2+1}}, \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}, \tau = 0$

(12.125 $\boldsymbol{T} = (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (-\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^2\frac{t}{a}, \tau = 0$

(12.127 $\boldsymbol{a} = |a|\,\boldsymbol{N}$

(12.129 (ا) $\boldsymbol{a}(1) = \frac{4}{3}\boldsymbol{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{N}$

(12.131 $\boldsymbol{a}(0) = 2\boldsymbol{N}$

(12.133 $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{T}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{k};$ مستوی دائرہ انحنا $z = -1$ ہے؛ عمودی مستوی $-x + y = 0$ ہے؛ سمت کار مستوی $x + y = \sqrt{2}$ ہے۔

(12.135 جی ہاں۔اگر گاڑی مڑتی سڑک $(\kappa \neq 0)$ پر چل رہی ہو تب $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \neq 0$ اور $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

(12.139 $|\boldsymbol{F}| = \kappa(m(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2)$

(12.143 $\frac{1}{2b}$

(12.147 (ا) $b - a$ ، (ب) π

(12.153 $\kappa(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

(12.155 $\kappa(x) = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

(12.165 $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: -1.8701 ، 0.7089 ، 1.0000 ؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: -1.6960 ، -2.0307 ، 0 ؛ رفتار: 2.2361 ؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: -0.8364 ، 0.3170 ، 0.4472 ؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.4143 ، -0.8998 ، -0.1369 ؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.3590 ، -0.2998 ، 0.8839 ؛ انحنا: 0.5060 ؛ مروڑ: 0.2813 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.7746 ؛ اسراع کا عمودی جزو: 2.5298 ؛

(12.167 $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: 2.0000 ، 0 ، 0.1629 ؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: 0 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ رفتار: 2.0066 ؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: 0.9967 ، 0 ، 0.0812 ؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.0007 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.0812 ، -0.0086 ، -0.9967 ؛ انحنا: 0.2484 ؛ مروڑ: -0.0411 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.0007 ؛ اسراع کا عمودی جزو: 1.0000 ؛

حصہ 12.5 صفحہ 1508

(12.169 $T = 93.2\,\mathrm{min}$

(12.171 $a = 6763\,\mathrm{km}$

(12.173 $T = 1655\,\mathrm{min}$

(12.175 $a = 20\,430\,\mathrm{km}$

(12.177 $|v| = 1.9966 \times 10^7 r^{-1/2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(12.179) دائرہ: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ ؛ ترخیم: $\sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ ؛ قطع مکافی: $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ ؛ قطع زائد: $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

(12.183) (ا) $x(t) = 2 + (3 - 4\cos(\pi t))\cos(\pi t)$
$y(t) = (3 - 4\cos(\pi t))\sin(\pi t)$

(12.185) (ج) $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}$

(12.187) (ا) $\boldsymbol{u}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{u}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}$

حصہ 13.1 صفحہ 1523

(13.1) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) خطوط $y - x = c$، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

(13.3) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) $z \geq 0$، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لئے مرکز عین مبدا پر ہے؛ $f(x,y) \neq 0$ کے لئے وہ ترخیم جس کا مرکز $(0,0)$ جبکہ محور اکبر اور محور اصغر بالترتیب محور x اور محور y پر ہوں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

(13.5) (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لئے محور x اور محور y جبکہ $f(x,y) \neq 0$ کے لئے قطع زائد جس کے متقارب محور x اور محور y ہیں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

(13.7) (ا) وہ تمام (x,y) جو $x^2 + y^2 < 16$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $z \geq \frac{1}{4}$، (ج) وہ دائرے جن کے مرکز مبدا پر ہوں اور جن کے رداس $r < 4$ ہوں، (د) دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ سرحد ہے، (ہ) کھلا، (و) محدود

(13.9) (ا) $(x,y) \neq (0,0)$، (ب) تمام حقیقی، (ج) وہ دائرے جن کے مراکز مبدا پر ہوں اور جن کے رداس $r > 0$ ہوں، (د) واحد نقطہ $(0,0)$ سرحدی نقطہ ہے، (ہ) کھلا، (و) غیر محدود

(13.11) (ا) وہ تمام (x,y) جو $-1 \leq y - x \leq 1$ کو مطمئن کرتے ہوں، (ب) $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$، (ج) $y - x = c$ طرز کے خطوط جہاں $-1 \leq c \leq 1$ ہے، (د) دو سیدھے خطوط $y = 1 + x$ اور $y = -1 + x$ سرحد ہیں، (ہ) بند، (و) غیر محدود

(13.13) شکل 13.18 جو تفاعل $z = \cos x \cos y e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$ ہے۔

(13.14) شکل 13.13 جو تفاعل $z = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ ہے۔

(13.15) شکل 13.16 جو تفاعل $z = \frac{1}{4x^2+y^2}$ ہے۔

(13.16) شکل 13.15 جو تفاعل $z = e^{-y}\cos x$ ہے۔

(13.17) شکل 13.14 جو تفاعل $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ ہے۔

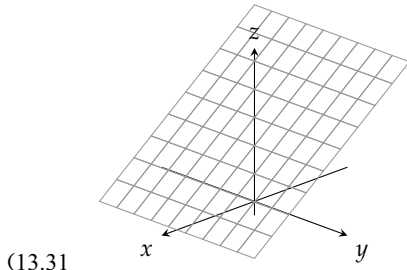
(13.18) شکل 13.17 جو تفاعل $z = y^2 - y^4 - x^2$ ہے۔

(13.19)

(13.21)

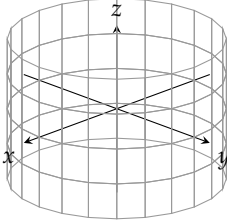
(13.23)

(13.25

(13.27

(13.29

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1$

(13.31

$f(x,y,z)=x+z=1$

(13.33

$f(x,y,z)=x^2+y^2=1$

(13.35

$f(x,y,z)=z-x^2-y^2=1$

یعنی $z=x^2+y^2+1$

(13.37 $x^2+y^2=10$

(13.39 $\tan^{-1}y-\tan^{-1}x=2\tan^{-1}\sqrt{2}$

(13.41 $\sqrt{x-y}-\ln z=2$

(13.43 $\frac{x+y}{z}=\ln 2$

(13.45 جی ہاں، 2000

(13.47 $63\,\mathrm{km}$

(13.61 $\frac{5}{2}$

(13.63 $2\sqrt{6}$

(13.65 1

(13.67 $\frac{1}{2}$

13.69) 1

13.71) 0

13.73) 0

13.75) -1

13.77) 2

13.79) $\frac{1}{4}$

13.81) $\frac{19}{12}$

13.83) 2

13.85) 3

13.87) (ا) تمام (x,y) ، (ب) ماسوائے $(0,0)$ تمام (x,y)

13.89) (ا) تمام (x,y) ماسوائے جہاں $x=0$ یا $y=0$ ہو، (ب) تمام (x,y)

13.91) (ا) تمام (x,y,z) ، (ب) نلکی $x^2+y^2=1$ کی اندرون کے علاوہ تمام (x,y,z)

13.93) (ا) وہ تمام (x,y,z) جہاں $z\neq 0$ ہو، (ب) وہ تمام (x,y,z) جہاں $x^2+y^2\neq 1$ ہو۔

13.95) راہ $y=x, x>0$ اور $y=x, x<0$ لیں۔

13.97) راہ $y=kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل ہو۔

13.99) راہ $y=mx$ لیں جہاں m ایک مستقل $m\neq -1$ ہو۔

13.101) راہ $y=kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل $k\neq 0$ ہو۔

13.103) نہیں

13.105) حد 1 ہے۔

13.107) حد 0 ہے۔

13.109) (ا) $f(x,y)\big|_{y=mx}=\sin 2\theta$ جہاں $\tan\theta=m$ ہے۔

13.111) 0

13.113) غیر موجود ہے۔

13.115) $\frac{\pi}{2}$

13.117) $f(0,0)=\ln 3$

13.121) $\delta=0.1$

13.123) $\delta=0.005$

13.125) $\delta=\sqrt{0.015}$

13.127) $\delta=0.005$

حصہ 13.3 صفحہ 1555

13.131) $\frac{\partial f}{\partial x}=4x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-3$

13.133) $\frac{\partial f}{\partial x}=2x(y+2),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$

13.135) $\frac{\partial f}{\partial x}=2y(xy-1),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2x(xy-1)$

13.137) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

13.139) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$

13.141) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y^2-1}{(xy-1)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

13.143) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y+1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y+1}$

13.145) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

13.147) $\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin(x-3y)\cos(x-3y),$ $\frac{\partial f}{\partial y}=-6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$

13.149) $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

13.151) $\frac{\partial f}{\partial x}=-g(x),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=g(y)$

13.153) $f_x=y^2,\quad f_y=2xy,\quad f_z=-4z$

13.155) $f_x=1, f_y=-y(y^2+z^2)^{-1/2},$ $f_z=-z(y^2+z^2)^{-1/2}$

13.157) $f_x=\frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, f_y=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},$ $f_z=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

13.159) $f_x=\frac{1}{x+2y+3z}, f_y=\frac{2}{x+2y+3z},$ $f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$

13.161) $f_x=-2xe^{-(x^2+y^2+z^2)},$ $f_y=-2ye^{-(x^2+y^2+z^2)},$ $f_z=-2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

13.163) $f_x=\operatorname{sech}^2(x+2y+3z),$ $f_y=2\operatorname{sech}^2(x+2y+3z),$ $f_z=3\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

13.165) $\frac{\partial f}{\partial t}=-2\pi\sin(2\pi t-\alpha),$ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\sin(2\pi t-\alpha)$

13.167) $\frac{\partial h}{\partial \rho}=\sin\theta\cos\phi,$ $\frac{\partial h}{\partial \theta}=\rho\cos\theta\cos\phi,$ $\frac{\partial h}{\partial \phi}=-\rho\sin\theta\sin\phi$

13.169) $W_P(P,H,\delta,v,g)=H,$ $W_H(P,H,\delta,v,g)=P+\frac{\delta v^2}{2g},$ $W_\delta(P,H,\delta,v,g)=\frac{Hv^2}{2g},$ $W_v(P,H,\delta,v,g)=\frac{H\delta v}{g},$ $W_g(P,H,\delta,v,g)=-\frac{H\delta v^2}{2g^2}$

13.171) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + y, \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

13.173) $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x,$ $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x,$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\sin x, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y,$ $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + \cos x$

13.175) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$ $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

13.177) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$

13.179) $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4,$ $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3,$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3,$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

13.181) (ا) پہلے x ، (ب) پہلے y ، (ج) پہلے x ، (د) پہلے x ، (ہ) پہلے y ، (ہ) پہلے y

13.183) $f_x(1,2) = -13, f_y(1,2) = -2$

13.185) 12

13.187) -2

13.189) $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin A}, \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c\cos A - b}{bc\sin A}$

13.191) $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

حصہ 13.4 صفحہ 1574

13.206) (ا) $L(x,y) = 1$ ، (ب) $L(x,y) = 2x + 2y - 1$

13.208) (ا) $L(x,y) = 3x - 4y + 5$ ، (ب) $L(x,y) = 3x - 4y + 5$

13.210) (ا) $L(x,y) = 1 + x$ ، (ب) $L(x,y) = -y + \frac{\pi}{2}$

13.212) $L(x,y) = 7 + x - 6y; 0.06$

13.214) $L(x,y) = x + y + 1; 0.08$

13.216) $L(x,y) = 1 + x; 0.0222$

13.218) چھوٹے ضلع پر زیادہ توجہ دیں۔یہ زیادہ بڑا جزوی تفرق دے گا۔

13.220) خلل کی زیادہ سے زیادہ مقدار (اندازاً) ≤ 0.31 ہو گی۔

13.222) زیادہ سے زیادہ فی صد خلل $\mp 4.83\,\%$ ہو گا۔

13.224) $|x - 1| \leq 0.014$ اور $|y - 1| \leq 0.014$ لیں۔

13.226) $\approx 0.1\,\%$

13.228) (ا) $L(x,y,z) = 2x + 2y + 2z - 3$ ، (ب) $L(x,y,z,) = y + z$ ، (ج) $L(x,y,z) = 0$

13.230) (ا) $L(x,y,z) = x$ ، (ب) $L(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$ ، (ج) $L(x,y,z) = \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}$

13.232) (ا) $L(x,y,z) = 2 + x$ ، (ب) $L(x,y,z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$ ، (ج) $L(x,y,z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$

13.234) $L(x,y,z) = 2x - 6y - 2z + 6, 0.0024$

13.236) $L(x,y,z) = x + y - z - 1, 0.00135$

13.238) (ا) $S_0(\frac{1}{100}\,\mathrm{d}p + \mathrm{d}x - 5\,\mathrm{d}w - 30\,\mathrm{d}h)$ (ب) قد میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے۔

13.240) d میں تبدیلی کو f زیادہ حساس ہے۔

13.244) ممکنہ خلل کی مقدار $4.8 \leq$ ہو گی۔

13.246) جی ہاں

حصہ 13.5 صفحہ 1587

13.248) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(\pi) = 0$

13.250) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 1, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(3) = 1$

13.252) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 4t\tan^{-1}t + 1, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(1) = \pi + 1$

13.254) (ا) $\frac{\partial z}{\partial r} = 4\cos\theta\ln(r\sin\theta) + 4\cos\theta,$ $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -4r\sin\theta\ln(r\sin\theta) + \frac{4r\cos^2\theta}{\sin\theta}$ (ب) $\frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2),$ $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2\sqrt{2}\ln 2 + 4\sqrt{2}$

13.256) (ا) $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv,$ $\frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$ (ب) $\frac{\partial w}{\partial u} = 3, \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

13.258) (ا) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2}$ $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$ (ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = -2$

13.260) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

13.262) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$ $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$

(13.264 $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

(13.266 $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

(13.268 $\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial s},\ \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}$

(13.270 چونکہ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}=0$ ہے لہٰذا

$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}$

چونکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=0$ ہے لہٰذا

$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$

(13.272 $\frac{4}{3}$

(13.274 $-\frac{4}{5}$

(13.276 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{4},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{4}$

(13.278 $\frac{\partial z}{\partial x}=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-1$

(13.280 12

(13.282 -7

(13.284 $\frac{\partial z}{\partial u}=2,\ \frac{\partial z}{\partial v}=1$

(13.286 $-0.000\,05\,\mathrm{A\,s^{-1}}$

(13.292 $(\cos 1,\sin 1,1)$ اور $(\cos(-2),\sin(-2),-2)$

(13.294 (ا) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ اور $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ پر زیادہ سے زیادہ، $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ اور $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ کم سے کم۔
(ب) زیادہ $=6$، کم $=2$

(13.296 $2x\sqrt{x^8+x^3}+\int_0^{x^2}\frac{3x^2}{2\sqrt{t^4+x^3}}\,\mathrm{d}t$

حصہ 13.6 صفحہ 1599

(13.298 (ا) 0، (ب) $1+2z$، (ج) $1+2z$

(13.300 (ا) $\frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{H}{nR}\right)+\frac{\partial U}{\partial P}$ (ب) $\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{H}\right)$

(13.302 (ا) 5، (ب) 5

(13.304 $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

حصہ 13.7 صفحہ 1615

(13.310

(13.312

(13.314 $\nabla f=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

(13.316 $\nabla f=-\frac{26}{27}\boldsymbol{i}+\frac{23}{54}\boldsymbol{j}-\frac{23}{54}\boldsymbol{k}$

(13.318 -4

(13.320 $\frac{31}{13}$

(13.322 3

(13.324 2

(13.326 $\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},\ (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=\sqrt{2};$
$-\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},$
$(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-\sqrt{2}$

(13.328 $\boldsymbol{u}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{5}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{k},$
$(D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=3\sqrt{3};$
$-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{k},$
$(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-3\sqrt{3};$

(13.330 $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\ (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=2\sqrt{3};$
$-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$
$(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-2\sqrt{3};$

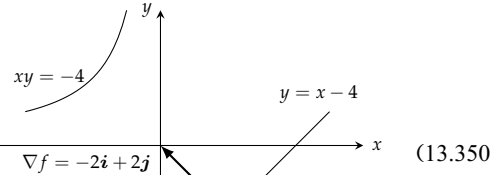
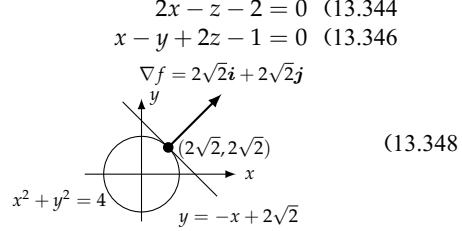
(13.332 $\mathrm{d}f=\frac{9}{910}\approx 0.01$

(13.334 $\mathrm{d}g=0$

(13.336) مماس $x+y+z=3$ ، عمودی خط
$x=1+2t,\ y=1+2t,\ z=1+2t$
(13.338) مماس $2x-z-2=0$ ، عمودی خط
$x=2-4t,\ y=0,\ z=2+2t$
(13.340) مماس $2x+2y+z-4=0$ ، عمودی خط
$x=2t,\ y=1+2t,\ z=2+t$
(13.342) مماس $x+y+z-1=0$ ، عمودی خط
$x=t,\ y=1+t,\ z=t$
(13.344) $2x-z-2=0$
(13.346) $x-y+2z-1=0$
(13.348)

$\nabla f=2\sqrt{2}\boldsymbol{i}+2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$, $(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $x^2+y^2=4$, $y=-x+2\sqrt{2}$

(13.350)

$xy=-4$, $y=x-4$, $\nabla f=-2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$, $(2,-2)$

(13.352) $x=1, y=1+2t, z=1-2t$
(13.354) $x=1-2t, y=1, z=\frac{1}{2}+2t$
(13.356) $x=1+90t, y=1-90t, z=3$
(13.358) $\boldsymbol{u}=\frac{7}{\sqrt{53}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j},$
$-\boldsymbol{u}=-\frac{7}{\sqrt{53}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j}$
(13.360) نہیں، زیادہ سے زیادہ شرح تبدیلی $\sqrt{185}<14$ ہے۔
(13.362) $-\frac{7}{\sqrt{5}}$
(13.364) (ا) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cos\sqrt{3}\approx 0.935\,°\mathrm{C\,m^{-1}}$
(ب) $\sqrt{3}\sin\sqrt{3}-\cos\sqrt{3}\approx 1.87\,°\mathrm{C\,s^{-1}}$
(13.366) $-\frac{\pi}{4}$ پر $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ؛ 0 پر 0 ؛ $\frac{\pi}{4}$ پر $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

حصہ 13.8 صفحہ 1632

(13.375) $f(-3,3)=-5$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ
(13.377) $f(\frac{2}{3},\frac{4}{3})=0$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ
(13.379) $f(-2,1)$ نقطہ زین
(13.381) $f(\frac{6}{5},\frac{69}{25})$ نقطہ زین
(13.383) $f(2,1)$ نقطہ زین
(13.385) $f(2,-1)=-6$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ
(13.387) $f(1,2)$ نقطہ زین
(13.389) $f(0,0)$ نقطہ زین
(13.391) $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})=\frac{170}{27}$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ
(13.393) $f(0,0)=0$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ؛ $f(1,-1)$ نقطہ زین
(13.395) $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(\frac{4}{9},\frac{4}{3})=-\frac{64}{81}$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ
(13.397) $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(0,2)=-12$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ؛ $f(-2,0)=-4$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ؛ $f(-2,2)$ نقطہ زین
(13.399) $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(1,1)=2$ ، $f(-1,-1)=2$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ
(13.401) $f(0,0)=-1$ مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ
(13.403) $f(n\pi,0)$ نقطہ زین؛ ہر n پر $f(n\pi,0)=0$
(13.405) $(0,0)$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 1 جبکہ $(1,2)$ پر مطلق کم سے کم قیمت -5
(13.407) $(0,2)$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 جبکہ $(0,0)$ پر مطلق کم سے کم قیمت 0
(13.409) $(0,-3)$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 11 جبکہ $(4,-2)$ پر مطلق کم سے کم قیمت -10
(13.411) $(2,0)$ پر مطلق زیادہ سے زیادہ قیمت 4 جبکہ $(3,-\frac{\pi}{4})$ ، $(3,\frac{\pi}{4})$ ، $(1,-\frac{\pi}{4})$ اور $(1,\frac{\pi}{4})$ پر مطلق کم سے کم قیمت $(\frac{3\sqrt{2}}{2})$
(13.413) $a=-3,\ b=2$
(13.415) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ اور $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ پر گرم ترین $2.25\,°\mathrm{C}$ جبکہ $(\frac{1}{2},0)$ پر سرد ترین $-0.25\,°\mathrm{C}$
(13.417) (ا) $f(0,0)$ نقطہ زین، (ب) $f(1,2)$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ، (ج) $f(1,-2)$ مقامی کم سے کم قیمت نقطہ، (د) $f(-1,-2)$ نقطہ زین
(13.423) $(\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{355}{36})$
(13.427) (ا) نصف دائرہ: $t=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $f=2\sqrt{2}$ جبکہ $t=\pi$ پر مقامی کم سے کم قیمت $f=-2$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $f=2\sqrt{2}$ جبکہ $t=0$ اور $t=\frac{\pi}{2}$ پر مقامی کم سے کم قیمت 2 (ب) نصف دائرہ: $t=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $g=2$ جبکہ $t=\frac{3\pi}{4}$ پر

مقامی کم سے کم قیمت $g=-2$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $g=2$ جبکہ $t=0$ اور $t=\frac{\pi}{2}$ پر مقامی کم سے کم قیمت $g=0$ ؛ (ج) نصف دائرہ: $t=0$ اور $t=\pi$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $h=8$ جبکہ $t=\frac{\pi}{2}$ پر کم سے کم قیمت $h=4$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t=0$ پر مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت $h=8$ جبکہ $t=\frac{\pi}{2}$ پر مقامی کم سے کم قیمت $h=4$

13.429) (ا) $t=-\frac{1}{2}$ پر کم سے کم قیمت $f=-\frac{1}{2}$ جبکہ کوئی زیادہ سے زیادہ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ (ب) $t=-1$ اور $t=0$ پر زیادہ سے زیادہ $f=0$ جبکہ $t=-\frac{1}{2}$ پر کم سے کم $f=-\frac{1}{2}$ پائی جاتی ہے۔ (ج) $t=1$ پر زیادہ سے زیادہ $f=4$ جبکہ $t=0$ پر کم سے کم قیمت $f=0$ پائی جاتی ہے۔

13.431) $y=-\frac{20}{13}x+\frac{9}{13},\quad y\big|_{x=4}=-\frac{71}{13}$

13.433) $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{6},\quad y\big|_{x=4}=\frac{37}{6}$

13.435) $y=51.3x+3467$

حصہ 13.9 صفحہ 1652

13.443) $(\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}),(\mp\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$

13.445) 39

13.447) $(3,\mp3\sqrt{2})$

13.449) (ا) 8، (ب) 64

13.451) $r=2\,\text{cm},\ h=4\,\text{cm}$

13.453) $l=4\sqrt{2},\ w=3\sqrt{2}$

13.455) کم سے کم $f(0,0)=0$ ، زیادہ سے زیادہ $f(2,4)=20$

13.457) کم سے کم 0° ، زیادہ سے زیادہ 125°

13.459) $(\frac{3}{2},2,\frac{5}{2})$

13.461) 1

13.463) $(0,0,2),\ (0,0,-2)$

13.465) کم سے کم $f(-1,2,-5)=-30$ ، زیادہ سے زیادہ $f(1,-2,5)=30$

13.467) $3,3,3$

13.469) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ضرب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ضرب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ اکائیاں

13.471) $(\mp\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$

13.473) $U(8,14)=128$

13.475) $f(\frac{2}{3},\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}$

13.477) $(2,4,4)$

13.479) $(\mp\sqrt{6},-\sqrt{3},1)$ پر کم سے کم $1-6\sqrt{3}$ اور $(\mp\sqrt{6},\sqrt{3},1)$ پر زیادہ سے زیادہ $1+6\sqrt{3}$

13.481) $(\mp\sqrt{2},\mp\sqrt{2},0)$ پر کم سے کم 2 اور $(0,0,\mp2)$ پر زیادہ سے زیادہ 4

حصہ 13.10 صفحہ 1663

13.493) مربعی $x+xy$ ، کعبی $x+xy+\frac{1}{2}xy^2$

13.495) مربعی xy ، کعبی xy

13.497) مربعی $y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)$ ، کعبی $y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$

13.499) مربعی x^2+y^2 ، کعبی x^2+y^2

13.501) مربعی $1+(x+y)+(x+y)^2$ ، کعبی $1+(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$

13.503) مربعی $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ ؛ خلل $E(x,y)\leq 0.00134$

حصہ 14.1 صفحہ 1679

14.1) 16

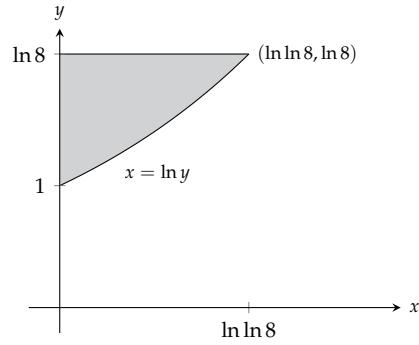
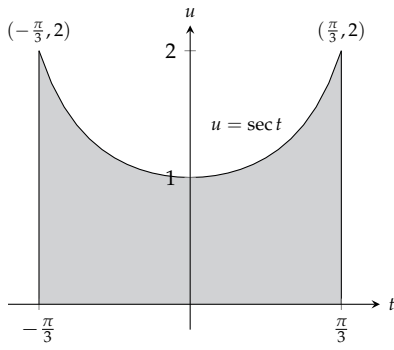
14.3) 1

14.5) $\frac{\pi^2}{2}+2$

14.7) $8\ln 8-16+e$

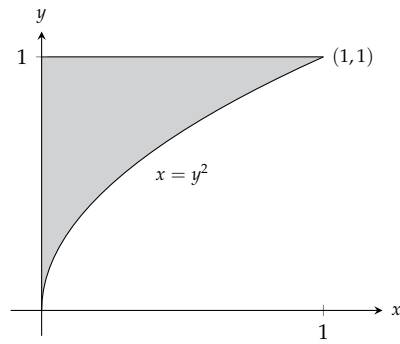
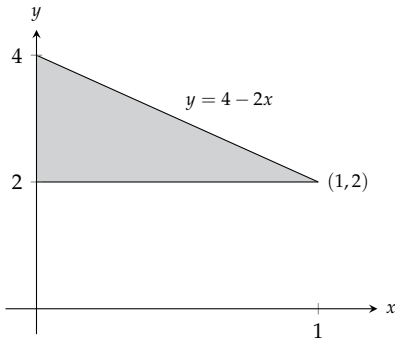
$e-2$ (14.9

$\frac{3}{2}\ln 2$ (14.11

$\frac{1}{6}$ (14.13

$-\frac{1}{10}$ (14.15

8 (14.17

2π (14.19

$\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (14.21

$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ (14.23

$\int_1^e \int_{\ln y}^{1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (14.25

(14.27 $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x \, dx \, dy$

(14.29 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y \, dy \, dx$

(14.31 2

(14.33 $\frac{e-2}{2}$

(14.35 2

(14.37 $\frac{1}{80\pi}$

(14.39 $-\frac{2}{3}$

(14.41 $\frac{4}{3}$

(14.43 $\frac{625}{12}$

(14.45 16

(14.47 20

(14.49 $2(1+\ln 2)$

(14.51 1

(14.53 π^2

(14.55 $-\frac{1}{4}$

(14.57 $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

(14.59 $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

(14.67 0.603

(14.69 0.233

حصہ 14.2 صفحہ 1695

(14.71 $\int_0^2 \int_0^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2, \; \int_0^2 \int_0^{2-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2$

(14.73 $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$

(14.75 $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$

(14.77 $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$

14.79) 12

14.81) $\sqrt{2} - 1$

14.83) $\frac{3}{2}$

14.85) (ا) 0 ، (ب) $\frac{4}{\pi^2}$

14.87) $\frac{8}{3}$

14.89) $\bar{x} = \frac{5}{14}, \bar{y} = \frac{38}{35}$

14.91) $\bar{x} = \frac{64}{35}, \bar{y} = \frac{5}{7}$

14.93) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

14.95) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

14.97) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

14.99) $\bar{x} = -1, \bar{y} = \frac{1}{4}$

14.101) $I_x = \frac{64}{105}, R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

14.103) $\bar{x} = \frac{3}{8}, \bar{y} = \frac{17}{16}$

14.105) $\bar{x} = \frac{11}{3}, \bar{y} = \frac{14}{27}, I_y = 432, R_y = 4$

14.107) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{13}{31}, I_y = \frac{7}{5}, R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$

14.109) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}, I_x = \frac{9}{10}, I_y = \frac{3}{10}$
$I_0 = \frac{6}{5}, R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0 = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

14.111) $40\,000(1 - e^{-2})\ln(\frac{7}{2}) \approx 43\,329$

14.113) $0 < a \leq \frac{5}{2}$

14.115) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

14.117) (ا) $\frac{3}{2}$ ، (ب) ایک جیسے ہیں۔

14.123) (ا) $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$ ، (ب) $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$ ، (ج) $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$ ، (د) $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$

14.125) مشترک سرحد پر ہونے کے لئے $h = a\sqrt{2}$ ، مثلث کے اندر ہونے کے لئے $h > a\sqrt{2}$

حصہ 14.3 صفحہ 1707

14.127) $\frac{\pi}{2}$

(14.129 $\frac{\pi}{8}$

(14.131 πa^2

(14.133 36

(14.135 $(1-\ln 2)\pi$

(14.137 $(2\ln 2-1)(\pi/2)$

(14.139 $\frac{\pi}{2}+1$

(14.141 $\pi(\ln(4)-1)$

(14.143 $2(\pi-1)$

(14.145 12π

(14.147 $\frac{3\pi}{8}+1$

(14.149 4

(14.151 $6\sqrt{3}-2\pi$

(14.153 $\bar{x}=\frac{5}{6},\ \bar{y}=0$

(14.155 $\frac{2a}{3}$

(14.157 $\frac{2a}{3}$

(14.159 2π

(14.161 $\frac{4}{3}+\frac{5\pi}{8}$

(14.163 (ا) $\sqrt{\pi/2}$، (ب) 1

(14.165 $\pi\ln 4$ نہیں

(14.167 $\frac{1}{2}(a^2+2h^2)$

حصہ 14.4 صفحہ 1720

(14.173 1

(14.175 $\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$

$\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$

$\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$

$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$

تمام $\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

تکملات کا جواب 1 ہے۔

(14.177 $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$

$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2}1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

$\int_{-2}^2\int_4^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\quad +$

$\int_{-2}^2\int_{y^2}^4\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$

$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\quad +$

$\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

$\int_{-2}^2\int_4^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\quad +$

$\int_{-2}^2\int_{x^2}^4\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$

$\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\quad +$

تمام $\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}}1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}zS$

تکملات کا جواب 16π ہے۔

(14.179 1

(14.181 1

(14.183 $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$

(14.185 18

(14.187 $\frac{7}{6}$

(14.189 0

(14.191 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

(14.193 ا. $\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

ج. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

د. $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

ھ. $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(14.195 $\frac{2}{3}$

(14.197 $\frac{20}{3}$

(14.199 1

(14.201 $\frac{16}{3}$

(14.203 $8\pi-\frac{32}{3}$

(14.205 2

(14.207 4π

(14.209 $\frac{31}{3}$

(14.211 1

(14.213 $2\sin 4$

(14.215 4

(14.217 $a=3$ یا $a=\frac{13}{3}$

حصہ 14.6 صفحہ 1745

(14.253 $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

(14.255 $\frac{17\pi}{5}$

(14.257 $\pi(6\sqrt{2}-8)$

(14.259 $\frac{3\pi}{10}$

(14.261 $\frac{\pi}{3}$

(14.263 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

(ج) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

(14.265 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\phi}\int_0^{3\rho^2} F(\rho,\phi,z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(14.267 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{4-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(14.269 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\phi}\int_0^{4} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(14.271 $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\int_0^{2-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(14.273 π^2

(14.275 $\pi/3$

(14.277 5π

(14.279 2π

(14.281 $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$

(14.283 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

(ب) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/r)} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/6} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$

(14.285 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{31\pi}{6}$

(14.287 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{8\pi}{3}$

(14.289 $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{3}$

(14.291 (ا) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

(ب) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(ج) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(14.293 (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

(ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

(ج) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(د) $\frac{5\pi}{3}$

(14.295 $8\pi/3$

(14.297 $9/4$

(14.299 $(3\pi-4)/18$

(14.301 $\frac{2\pi a^3}{3}$

(14.303 $\frac{5\pi}{3}$

(14.305 $\pi/2$

(14.307 $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

(14.309 16π

(14.311 $5\pi/2$

(14.313 $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$

(14.315 $2/3$

(14.317 $3/4$

(14.319 $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=3/8$

(14.321 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

(14.323 $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=5/6$

(14.325 $I_z=30\pi,\ R_z=\sqrt{\frac{5}{2}}$

(14.327 $I_x=\pi/4$

(14.329 $\frac{a^4h\pi}{10}$

(14.331 (ا) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/5),\ I_z=\pi/12,\ R_z=\sqrt{1/3}$

(ب) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,5/6),\ I_z=\pi/14,\ R_z=\sqrt{5/14}$

(14.335 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6}),\ I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4},\ R_z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

(14.337 $\frac{3M}{\pi R^3}$

حصہ 14.7 صفحہ 1766

(14.338 (ا) $x=\frac{u+v}{3},\ y=\frac{v-2u}{3};\ \frac{1}{3}$

(ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $u=0$، $v=0$ اور $u+v=3$ ہیں۔

(14.340 (ا) $x=\frac{1}{5}(2u-v),\ y=\frac{1}{10}(3v-u);\ \frac{1}{10}$

(ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $3v=u$، $v=2u$ اور $3u+v=10$ ہیں۔

(14.342 (ا) $\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u$

(ب) $\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-u$

(14.346 $\frac{64}{5}$

(14.348 $\int_1^2\int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8+\frac{52}{3}\ln 2$

(14.350 $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$

(14.352 $\frac{1}{3}(1+\frac{3}{e^2})\approx 0.4687$

(14.356 $\frac{4\pi abc}{3}$

(14.358 $\int_0^3\int_0^2\int_1^2 (\frac{v}{3}+\frac{vw}{3u})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 2+\ln 8$

ضمیمہ ا

ضمیمہ اول

ضمیمہ ب

ضمیمہ دوم

ضمیمہ ج

ضمیمہ تین

ضمیمہ د

ضمیمہ چار

ضمیمہ ھ

ضمیمہ پانچ

ضمیمہ و

ضمیمہ چھ

ضمیمہ ز

ضمیمہ سات

ضمیمہ ح

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ط

ضمیمہ آٹھ

ضمیمہ ی

تکملات کا مختصر جدول

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

$$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0 \tag{2}$$

$$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C \tag{3}$$

$$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C \tag{4}$$

$$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1 \tag{5}$$

$$\int (ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \tag{6}$$

$$\int x(ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\Big[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\Big] + C, \quad n \neq -1, -2 \tag{7}$$

$$\int x(ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C \tag{8}$$

$$\int x(ax+b)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\Big[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\Big] + C \tag{9}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \tag{10}$$

$$\int (\sqrt{ax+b})^n \, dx = \frac{2}{a}\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2 \tag{11}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} \, dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} &= \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \end{aligned} \tag{13}$$

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} \, dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \tag{16}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \tag{17}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \tag{18}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \tag{19}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C \tag{20}$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} \, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C \tag{21}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2} \, dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C \tag{22}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} \, dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C \tag{23}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2} \, dx = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C \tag{24}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C \tag{25}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C \tag{26}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C \tag{27}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \tag{28}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C \tag{29}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) + C \tag{30}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C \tag{31}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C \tag{32}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C \tag{33}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}| + C \tag{34}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C \tag{35}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C \tag{36}$$

(37) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

(38)
$$\int (\sqrt{x^2-a^2})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -1$$

(39) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x^2-a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}}, n \neq 2$$

(40)
$$\int x(\sqrt{x^2-a^2})^n\,\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$$

(41)
$$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

(42) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}|\frac{x}{a}| + C$$

(43) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$$

(44) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$$

(45) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{x}{a}| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}|\frac{a}{x}| + C$$

(46) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$

(47) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(48)
$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(49)
$$\int (\sqrt{2ax-x^2})^n\,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

(50)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{2ax-x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}}$$

$$(51)\quad \int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(52)\quad \int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(53)\quad \int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

$$(54)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} + C$$

$$(55)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$$

$$(56)\quad \int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$(57)\quad \int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$(58)\quad \int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$(59)\quad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

$$(60)\quad \int \sin^n ax\,dx = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,dx$$

$$(61)\quad \int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx$$

$$(62)\quad \begin{aligned} \int \sin ax\cos bx\,dx &= -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2 \\ \int \sin ax\sin bx\,dx &= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2 \\ \int \cos ax\cos bx\,dx &= \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2 \end{aligned}$$

$$(63)\quad \int \sin ax\cos ax\,dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

$$(64)\quad \int \sin^n ax\cos ax\,dx = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C \tag{65}$$

$$\int \cos^n ax \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1 \tag{66}$$

$$\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C \tag{67}$$

(68)
$$\int \sin^n ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -m$$
($\sin^n ax$ تخفیف)

(69)
$$\int \sin^n ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad m \neq -n$$
($\cos^m ax$ تخفیف)

(70)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$$

(71)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}}\ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$$

(72)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$$

(73)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

(74)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}}\tan^{1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$$

(75)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2$$

(76)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C$$

(77)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C$$

(78)

$$\int x \sin ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$

(79)

$$\int x \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$$

(80)

$$\int x^n \sin ax \,\mathrm{d}x = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \,\mathrm{d}x$$

(81) $$\int x^n \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \,\mathrm{d}x$$

(82) $$\int \tan ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sec ax| + C$$

(83) $$\int \cot ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C$$

(84) $$\int \tan^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \tan ax - x + C$$

(85) $$\int \cot^2 ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C$$

(86) $$\int \tan^n ax \,\mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \,\mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(87) $$\int \cot^n ax \,\mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax \,\mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(88) $$\int \sec ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C$$

(89) $$\int \csc ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \ln |\csc ax + \cot ax| + C$$

(90) $$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax + C$$

(91) $$\int \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax + C$$

(92) $$\int \sec^n ax \, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

(93) $$\int \csc^n ax \, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} ax \, dx, \quad n \neq 1$$

(94) $$\int \sec^n ax \tan ax \, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(95) $$\int \csc^n ax \cot ax \, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(96) $$\int \sin^{-1} ax \, dx = x \sin^{-1} ax + \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2x^2} + C$$

(97) $$\int \cos^{-1} ax \, dx = x \cos^{-1} ax - \frac{1}{a} \sqrt{1 - a^2x^2} + C$$

(98) $$\int \tan^{-1} ax \, dx = x \tan^{-1} ax - \frac{1}{2a} \ln(1 + a^2x^2) + C$$

(99) $$\int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

(100) $$\int x^n \cos^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

(101) $$\int x^n \tan^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$$

(102) $$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

(103) $$\int b^{ax} \, dx = \frac{1}{a} \frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

(104) $$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$$

(105) $$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

$$\int x^n b^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{x^n b^{ax}}{a\ln b} - \frac{n}{a\ln b}\int n^{n-1} b^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad b > 0,\, b \neq 1 \tag{106}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \tag{107}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \tag{108}$$

$$\int \ln ax\,\mathrm{d}x = x\ln ax - x + C \tag{109}$$

$$\int x^n(\ln ax)^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -1 \tag{110}$$

$$\int x^{-1}(\ln ax)^m\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln ax)^{m+a}}{m+1} + C, \quad m \neq -1 \tag{111}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln ax} = \ln|\ln ax| + C \tag{112}$$

$$\int \sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cosh ax + C \tag{113}$$

$$\int \cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sinh ax + C \tag{114}$$

$$\int \sinh^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C \tag{115}$$

$$\int \cosh^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C \tag{116}$$

$$\int \sinh^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh^{n-1} ax\cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad n \neq 0 \tag{117}$$

$$\int \cosh^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh^{n-1} ax\sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad n \neq 0 \tag{118}$$

$$\int x\sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C \tag{119}$$

$$\int x\cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C \tag{120}$$

$$\int x^n\sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,\mathrm{d}x \tag{121}$$

$$\int x^n\cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,\mathrm{d}x \tag{122}$$

(123) $$\int \tanh ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax) + C$$

(124) $$\int \coth ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln|\sinh ax| + C$$

(125) $$\int \tanh^2 ax \, \mathrm{d}x = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

(126) $$\int \coth^2 ax \, \mathrm{d}x = x - \frac{1}{a} \coth ax + C$$

(127) $$\int \tanh^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(128) $$\int \coth^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(129) $$\int \operatorname{sech} ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh ax) + C$$

(130) $$\int \operatorname{csch} ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln\left|\tanh \frac{ax}{2}\right| + C$$

(131) $$\operatorname{sech}^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \tanh ax + C$$

(132) $$\int \operatorname{csch}^2 ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \coth ax + C$$

(133) $$\int \operatorname{sech}^n ax \, \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(134) $$\int \operatorname{csch}^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(135) $$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(136) $$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(137) $$\int e^{ax} \sinh bx \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$$

(138) $$\int e^{ax} \cosh bx \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$$

(139) $$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$$

(140) $$\int_0^\infty e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n \geq 2 \text{ عدد صحیح ہو} \\ \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots n}, & \text{اگر } n \geq 3 \text{ طاق عدد صحیح ہو} \end{cases} \tag{141}$$

فرہنگ

absolute value, 6
acceleration, 239, 1442
adiabatic process, 714
aerofoil, 611
alaska, 288
algebraic, 743
algorithm, 840
angioplasty, 448
angle of inclination, 20
aphelion, 1306
aspect ratio, 15
astroid, 1257
asymptote, 394
asymptotes, 1204
autocatalyst, 435
average, 518, 562
axis, 57, 1196
    focal, 1204
    major, 1200
    minor, 1200
    negative-x, 14
    of revolution, 639
    positive-x, 14

basic, 1332
bifurcation value, 1047
binomial
    series, 1176
bound
    least upper, 1038
    lower, 1044
    upper, 1038
boundary, 4, 1518, 1520
    point, 1520
    points, 4
bounded, 1519
    from above, 1038
    from below, 1044

cam, 1288
cardioid, 1288
catalyst, 435
catenary, 898
center, 54, 441, 1195
    of curvature, 1482
centroid, 701, 1694, 1730
chain rule, 274
chaos theory, 207
charge
    electron, 719
circle, 54, 1195
    of curvature, 1482
closed, 4, 1518, 1520
    ball, 1519
commutative, 1366
    non, 1380
concave
    down, 366
    up, 366
conjugate expression, 114
constant
    arbitrary, 472
    gravitational, 1500
    rate, 806

derivative, 186, 195
directional, 1601
first, 229
first order, 229
partial, 1545, 1546
second, 229
second order, 229
descriminant, 1628
difference
centered quotient, 271
difference quotient, 186
Fermat's, 271
differentiable, 196, 1563
differential, 1568
equation, 484
total, 1568
differential equation
first order, 900
linear, 902
separable, 901
solution, 900
standard form, 902
differentiation
logarithmic, 768
direction
cosines, 1373
directrix, 1196
discontinuity
infinite, 165
jump, 163
oscillating, 165
discriminant, 1235
displacement, 237, 731
divergent, 1006, 1033
domain, 30, 1516
natural, 33
dominant, 243, 400
dominates, 400

eccentricity, 1220
electron, 719

continuity
at a point, 1440
uniform, 535
continuous, 1440, 1533
at a point, 1533
left, 165
on interval, 171
right, 165
continuous extension, 170
contour
line, 1521
convergence
interval, 1134
radius, 1134
convergent, 1006, 1033
absolute, 1118
conditional, 1118
converges, 533
coordinate
axis, 14
pair, 14
x, 14
y, 14
coordinates
rectangular, 1347
cosines
law, 83
critical point, 330
cross section, 1408
curvature, 1478
curve
integral, 488
level, 1520
cycloid, 1248
cylinder, 1408
cylindrical coordinates, 1426

dashpot, 956
decreasing, 344
deltoid, 1259
dependent variable, 31

least integer, 40
real valued, 1516
sine integral, 1024

Gamma function, 1025
gene, 243
generating
curve, 1408
region, 639
genetics, 243
global, 326
graph, 1520
dot, 242
gyration, 1685
radius, 1689

half angle formulae, 83
half life, 810
half-open, 4
helium, 317
hyperbola, 1202
center, 1204
hypocycloid, 1257

Ibn Sahl's law, 422
identity function, 746
image, 1757
pre, 1757
implicit
differentiation, 291
increasing, 344
increments, 15
independent variable, 31
index
summation, 528
inflation, 809
initial point, 1244
initial value
problem, 484
instantaneous
rate of change, 96
integrable, 533

ellipse, 1198
ellipsoid, 1207
elliptic
integral, 1270
energy
kinetic, 719
equation
general linear, 24
point-slope, 22
slope-intercept, 23
error, 1572
escape velocity, 915
Euler's
constant, 1093
formula, 1164
Euler's method, 918
even, 38
extended function, 170
exterior, 56
extrema, 326

factorials, 1035
Fermat's principle, 421
Fibonacci numbers, 1036
finite sum, 511
fixed point, 180, 1054
focal
length, 1196
focus, 1196
fossil bone, 819
fractals, 672
free fall, 239
frustum, 677
function
composite, 37
error, 1024
greatest integer, 40
hyperbolic, 897
identity, 746
integer ceiling, 40
integer floor, 40

law
Hooke's, 709
parallelogram, 1331
Leibniz's
formula, 1183
lemniscate, 1290
limit, 1033, 1439, 1530
left-handed, 143
right-handed, 143
two-sided, 144
limits, 96
line
regression, 1638
linear
equations, 24
standard approximation, 441
linear approximation
standard, 1564
linearization, 441, 1564
Lissajous figures, 1272
logarithm
common, 796

marginal
cost of production, 244
marginals, 243
mass
center, 694
center of, 690
maxima, 1002
maximum
local, 1627
mean, 562
arithmetic, 350
geometric, 350
mean life
nucleus, 817
method
partial fractions, 959
Picard's, 1053
minimax, 1417

integral
definite, 533
double, 1666
indefinite, 472, 1447
iterated, 1669
line, 1771
repeated, 1669
triple, 1713
integrand, 472
integration
by parts, 945
constant of, 472
factor, 903
tabular, 952
variable, 472
intercept
x, 23
y, 23
interest
continuous compound, 809
interior, 4, 56, 1518, 1520
point, 1520
points, 4
intermediate form, 819
intersection, 9
interval, 3
finite, 3
infinite, 4
inverse, 746
involute, 1256
irreducible, 962
iteration
path, 1054

Jacobian, 1758
determinant, 1763
jerk, 261
joule, 706, 1370

Lagrange
multiplier, 1645
multipliers' method, 1645

interval, 1244
parametric
curve, 237
equations, 1244
representation, 238
parametrization, 1244
partial fractions, 959
partition, 531
path, 1438
perihelion, 1306, 1502
period, 81
periodic, 81
pH, 797
piston, 288
plane
xy, 1346
planes
coordinate, 1347
point
boundary, 1517
critical, 1625
inflection, 367
interior, 163, 1517
left end, 163
right end, 163
saddle, 1625, 1627
pole, 1274
pressure, 720
product
cross, 1379
property
intermediate value, 171

quadrants, 15
quadratic
approximation, 1156
curves, 1230

radioactive, 810
radioactive decay, 810
radius, 54, 1195
of curvature, 1482

minimum
local, 1627
molecule, 973
moment
first, 1689
polar, 1690
second, 1689

newton
law of cooling, 813
nonelementary, 991
norm, 532
normal, 294, 1338
numbers
irrational, 3
natural, 3
rational, 3
real, 1
numerical
method, 918
solution, 918

octant, 1347
first, 1347
odd, 39
one to one, 744
open, 4, 1518, 1520
ball, 1519
operators, 1660
orbit
geostationary, 1510
geosynchronous, 1510
orbital period, 1507
origin, 14, 1274
orthogonal, 1366

Pappus
formula, 1700
Pappus's formula, 1735
Pappus's theorem, 735
parabola, 18, 57, 1196
parameter, 1244

nondecreasing, 1037
nonincreasing, 1043
sub, 1036
tail, 1037
series
alternating, 1115
alternating harmonic, 1115
center, 1129
coefficients, 1129
convergence, 1066
divergence, 1066
geometric, 1066
harmonic, 1084
infinite, 1065
Maclaurin, 1147
nth term, 1066
power, 1129
Taylor, 1147
sets, 3
Simpson
rule, 604
simulation, 491
slope, 19
smooth, 1260, 1442
curve, 668
piecewise, 1442
snow flake, 296
solid of revolution, 639
solution
general, 485
particular, 485
speed, 239
spherical
wedge, 1741
spherical coordinates, 1430
spring constant, 709
stainless steel, 717
standard
position, 73
step
size, 598
range, 30, 1516
range finder, 309
real
line, 1
valued function, 32
variables, 32
recessive, 243
recursion
formula, 1035
reduction formulae, 989
reference frame, 1473
removabel, 163
revolution
surface, 677
Richter scale, 796
Riemann
sum, 532
root, 173
rule
constant multiple, 219
Delesse's, 734
differential of constant, 217
power, 218
product, 223
quotient, 226
reciprocal, 235
sum, 220

saddle point, 1417
scalar, 1330
functions, 1439
product, 1363
scalar multiple, 1330
search
binary, 840
sequential, 840
secant, 95
sensitive, 242, 1047
sensitivity, 234, 242
sequence, 1030
infinite, 1030

dependent, 1516
dummy, 537
independent, 1516
input, 1516
output, 1516
vector, 1329
binormal, 1484
function, 1438
length, 1335
magnitude, 1335
position, 1348, 1438
product, 1378
unit, 1336
vector-valued
function, 1438
velocity, 1442
average, 237
vertex, 57, 1196
vertices, 1204
voltage
peak, 579
volume, 1714

zero, 173

steps, 598
subintervals, 531
sum
lower, 534
summation
lower limit, 528
upper limit, 528
surface, 1520
level, 1522

tangent, 96, 1338
Taylor's
formula, 1157
terminal point, 1244
terms, 528
test
comparison, 1094
direct comparison, 1012
extrinsic, 1103
intrinsic, 1103
limit comparison, 1013
theorem
mean value, 339
perpendicular axis, 1690
Rolle's, 337
sandwich, 116
time constant, 916
TNT, trinitrotoluene, 452
torque, 689
system, 689
torsion, 1478, 1485
torus, 654, 737
transcendental, 743
tree diagram, 1581

unbounded, 1519
union, 9
unit
circle, 72
unit circle, 17

variable

آزادانہ گرنا، 239

ابتدائی قیمت
مسئلہ، 484
ابتدائی نقطہ، 1244
اختتامی نقطہ، 1244
ارتکاز
رداس، 1134
وقفہ، 1134
اساسی، 1332
استمرار
نقطہ پر، 1440
یکساں، 535
استمراری، 1440، 1533
بائیں، 165
دائیں، 165
نقطہ پر، 1533
وقفہ پر، 171
استمراری توسیع، 170
اسراع، 239، 1442
اشتراک، 9
اصول
فغما، 421

اعداد
حقیقی، 3
غیر ناطق، 3
ناطق، 3

اعدادی
ترکیب، 918
حل، 918
اعداد ضربیہ، 1035
افراط زر، 809
اکائی
دائرہ، 72
اکائی دائرہ، 17
الٹ، 746
الجبرائی، 743
الخوارزم
کمپیوٹر، 840
انتہا، 326
انجیوپلاسٹی، 448

انحنا، 1478
اندرسہ، 654، 737
اندرون، 4، 56، 1518، 1520
اندرونی
نقطہ، 1520
اندرونی نقطے، 4
اوج شمسی، 1306
اوسط، 518
حسابی، 350
ہندسی، 350
اوسط زندگی
مرکزہ، 817
اوسط قیمت، 562
ایک ایک تفاعل، 744
ایلاسکا، 288

بار، 719
بارودی مواد، 452
برف
روئی، 296
برقیہ
منفی، 719
بڑھتا، 344
بڑھوتری، 15
بند، 4، 1518، 1520
گیند، 1519
بیرون، 56

پرکھ
اندرونی، 1103
بلا واسطہ تقابلی، 1012
تقابل حد، 1013
تقابلی، 1094
پسٹن، 288
پیداکار
منحنی، 1408
پیداکار خطہ، 639
پیما
رکٹر، 796
فاصلہ، 309

تابع متغیر، 31

تابکار، 810
تابکاری تحلیل، 810
تخفیف
کلیات، 989
ناقابل، 962
تدویر، 1248
فلک، 1257
ترتیب، 1030
ذیلی، 1036
غیر بڑھتا، 1043
لامتناہی، 1030
نیچے سے محدود، 1044
ترخیمی
تکمل، 1270
ترخیم، 1198
ترخیمی سطح، 1207
ترسیم، 1520
نقطہ، 242
ترکیب
پکاغ، 1053
جزوی کسری، 959
ترکیب یولر، 918
تسلسل
ارتکاز، 1066
انفراج، 1066
بدلتا، 1115
بدلتا ہارمونی، 1115
ٹیلر، 1147
ثنائی، 1176
جزو، 1066
دم، 1037
طاقتی، 1129
غیر گھٹتا، 1037
لامتناہی، 1065
مکلارن، 1147
ہارمونی، 1084
ہندسی، 1066
تعین گر
سمتیہ، 1438
تفاعل
بڑا ترین عدد صحیح، 40
حقیقی قیمت، 1516
خلل، 1024
سائن تکمل، 1024
شناختی، 746
عددی صحیح چھت، 40
عددی صحیح زمین، 40
کم ترین عدد، 40
مرکب، 37
ہذلولی، 897
تفرق، 186، 195
این رتبی، 229
پہلا، 229
تین رتبی، 229
جزوی، 1545، 1546
دو رتبی، 229
دوسرا، 229
رتبہ اول، 229
رتبہ دوم، 229
رخی، 1601
قابل، 196، 1260
یک رتبی، 229
تفرقی
مساوات، 484
تفرقی مساوات
حل، 900
خطی، 902
قابل علیحدگی، 901
معیاری روپ، 902
یک رتبی، 900
تفریق، 1568
کل، 1568
تفریقی
وسطی حاصل تقسیم، 271
تقاطع، 9
تکمل
اعادہ، 1669
بارہا، 1669
بالحصص، 945

ترخیمی، 1270
تہرا، 1713
جدولی، 952
جزو، 903
خطی، 1771
دوہرا، 1666
غیر بنیادی، 991
غیر قطعی، 472، 1447
قابل، 533
قطعی، 533
کا مستقل، 472
متغیر، 472
تکونی عدم مساوات، 7
تلاش
ترتیبی، 840
تناسب پہلو، 15
توالی
راہ، 1054
کلیہ، 1035
توانائی
حرکی، 719
تیزابیت، 797

ٹیلر
کلیہ، 1157

ثمن، 1347
پہلا، 1347
ثنائی
تسلسل، 1176
ثنائی تلاش، 840

جاذب، 956
جاول، 706، 1370
جذر، 173
جزوی کسر، 959
جسم طواف، 639
جفت، 38
جنیات، 243
جوڑی دار تعلق، 114
جھٹکا، 261

جین، 243

حد، 96، 1033، 1439، 1530
بائیں ہاتھ، 143
دائیں ہاتھ، 143
دو طرفہ، 144
حل
عمومی، 485
مخصوص، 485
حاشیہ، 243
حاشیہ لاگت، 244
حاشیہ لاگت پیداوار، 244
حاصل تقسیم
تفریقی، 186
حجریہ ہڈی، 819
حجم، 1714
حد بندی
بالائی، 1038
زیریں، 1044
کم سے کم بالائی، 1038
حرارت نا گزر عمل، 714
حرکت
دواری، 1685
حساس، 242، 1047
حساسیت، 234، 242
حضیض شمس، 1502
حضیض شمسی، 1306
حقیقی
اعداد، 1
خط، 1
قیمت تفاعل، 32
متغیرات، 32
حوالہ چھوکٹ، 1473

خط
ارتفاع، 1521
خاصیت
متوسط قیمت، 171
خانہ بندی، 531
خطی
مساوات، 24

معیاری تخمین، 441
خط بند
تفاعل، 1564
خط بندی، 441
خط رجعت، 1638
خطی تخمین
معیاری، 1564
خفی
تفرق، 291
خلل، 1572

دائرہ، 54، 1195
انحنا، 1482
دائرہ کار، 30، 1516
قدرتی، 33
دباو، 720
چوٹی، 579
در پیچیدہ، 1256
دوار، 1685
رداس، 1689
دو چشمہ، 1290
دو درجی
تخمین، 1156
منحنیات، 1230
دوری، 81
دوری عرصہ، 81، 1507
دو لختی نقطہ، 1047

ڈھلوان، 19، 184

راس، 57، 1196، 1204
راہ، 1438
ربعات، 15
رجعت
خط، 1638
رداس، 54، 1195
انحنا، 1482
دوار، 1689
رداس ارتکاز
صفر، 1134
لامتناہی، 1134
رفتار، 239

رکٹر پیمائش، 796
روک، 956
ریمان
مجموعہ، 532

زاویہ میلان، 20
زنجیری قاعدہ، 274
زیادہ سے زیادہ
مقامی، 1627

سالمہ، 973
ستارہ نما، 1257
سرحدی
نقطہ، 1520
نقطے، 4
سرحد، 4، 1518، 1520
سطح، 1520
طواف، 677
سعت، 30، 1516
سگما علامتی اظہار، 528
سلسلہ، 3
سمتی
تفاعل، 1438
ضرب، 1378
سمتیہ، 1329
اساس، 1348
اکائی، 1336
تعین گر، 1348
دوہری عمودی، 1484
صفر، 1351
لمبائی، 1335
مقدار، 1335
سمتی رفتار، 1442
اوسط، 237
سمتی قیمت تفاعل، 1438
سمسن
قاعدہ، 604
سنک، 1220
سود در سود
مسلسل، 809
سیکنٹ، 95

شکل شجرہ، 1581
شناختی تفاعل، 746

صفر، 173
صلیبی
ضرب، 1379

ضرب
سمتی، 1378
صلیبی، 1379
غیر سمتی، 1363

طاقت
ہائیڈروجن، 797
طاق، 39
طاقتی تسلسل، 1129
مرکز، 1129
طواف
سطح، 677

عالمگیر، 326
عاملین، 1660
عددی سر، 1129
عدم استمرار
ارتعاشی، 165
چھلانگ، 163
لا متناہی، 165
عکس، 1757
قبل، 1757
عمل انگیز، 435
خود، 435
عمودی، 294، 1338، 1366
تراش، 1408

غالب، 243، 400
غلبہ، 400
غیر بنیادی تکمل، 991
غیر تابع متغیر، 31
غیر سمتی، 1330
تفاعل، 1439
ضرب، 1363
مضرب، 1330
غیر محدود، 1519
غیر معین روپ، 819

فبونیکی اعداد، 1036
فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم، 271
فشار، 720
فلک تدویر، 1257
فولاد
بے زنگ، 717

قابل تبادل، 1366
نا، 1380
قابل تفرق، 1563
قابل ہٹاو، 163
قاعدہ
بالعکس متناسب، 235
تفرق مستقل، 217
حاصل تقسیم، 226
حاصل ضرب، 223
دولس، 734
طاقت، 218
متوازی الاضلاع، 1331
مجموعہ، 220
مستقل مضرب، 219
قانون
ہک، 709
قانون انعطاف
ابن سھل، 422
قانون ٹھنڈک
نیوٹن، 813
قدم، 598
لمبائی، 598
قطع
ایکس، 23
وائے، 23
قطب، 1274
قطب نما، 1288
قطعی
تکمل، 533
قطع زائد، 1202
مرکز، 1204

قطع مکافی، 18، 57، 1196
قوت مروڑ، 689
نظام، 689

کروی
پچر، 1741
کروی محدد، 1430
کلیہ
پاپس، 1700، 1735
توالی، 1035
کلیات
تخفیف، 989
کم زیادہ، 1417
کم سے کم
مقامی، 1627
کمیت، 1689
مرکز، 690
کوسائن
رخ، 1373
قاعدہ، 83
کھلا، 4، 1518، 1520
گیند، 1519
کیم، 1288

گریزی رفتار، 915
گنج غیر ہموار منحنیات، 672
گھٹنا، 344
گیما تفاعل، 1025

لساجس اشکال، 1272
لمحاتی
شرح تبدیلی، 96
لوگارتھم
عام، 796
لوگارتھمی تفرق، 768
لیبنٹز
کلیہ، 1183
لیزم، 898
لیگرینج
ضارب، 1645
ضاربین کی ترکیب، 1645

ماسکہ، 1196، 1202
طول، 1196
ماورائی، 743
مبدا، 14، 1274
متغیر
تابع، 1516
خارجی، 1516
داخلی، 1516
غیر تابع، 1516
نقلی، 537
متقارب، 394، 1204
متکمل، 472
متناہی مجموعہ، 511
مثلثی، 1259
مجموعہ
ارکان، 528
زیریں، 534
مجموعی سلسلہ
اشاری، 528
بالائی حد، 528
زیریں حد، 528
محدد
ایکس، 14
مستطیل، 1347
وائے، 14
محددی جوڑی، 14
محددی محور، 14
محدود، 1519
اوپر سے، 1038
محور، 57، 1196
اصغر، 1200
اکبر، 1200
طواف، 639
ماسکہ، 1204
مثبت ایکس، 14
منفی ایکس، 14
مخروط مقطوع، 677
مدار
ہم عصر، 1510

مرتکز، 1006، 1033
مشروط، 1118
مطلق، 1118
مرکز، 54، 1195
انحنا، 1482
کمیت، 694
وسطانی، 1694، 1730
مرکوز، 533
مروڑ، 1478، 1485
مساوات
ڈھلوان-قطع، 23
عمومی خطی، 24
نقطہ-ڈھلوان، 22
مستقل
اختیاری، 472
تجاذبی، 1500
شرحی، 806
مستقلہ اسپرنگ، 709
مستوی
ایکس وائے، 1346
محددی، 1347
مسئلہ
اوسط قیمت، 339
پیچ، 116
پاپس، 735
رول، 337
عمودی محور، 1690
مطلق قیمت، 6
معیاری
مقام، 73
معیار، 532
معیار اثر
اول، 1689
دوم، 1689
قطبی، 1690
مغلوب، 243
مقدار معلوم، 1244
ترسیم، 237
روپ، 238، 1438
روپ دینا، 1244
مساوات، 1244
وقفہ، 1244
مقررہ نقطہ، 180، 1054
مقعر
اوپر، 366
نیچے، 366
مقیاس لچک، 709
مماس، 96، 184، 1338
ممیز، 1235، 1628
منحنی
تکمل، 488
حل، 488
کمتر وقتی، 1250
یکساں وقتی، 1250
منفرج، 1006، 1033
میکسما، 1002

ناظمہ، 1196
نصف زاویہ
کلیات، 83
نصف زندگی، 810
نصف کھلا، 4
نظریہ
ابتری، 207
نقطہ
اندرونی، 163، 1517
بائیں سر، 163
تصریف، 367
دائیں سر، 163
زین، 1625، 1627
سرحدی، 1517
فاصل، 1625
نقطہ زین، 1417
نقطہ فاصل، 330
نقل اتارنا، 491
نلکی، 1408
نلکی محدد، 1426

وسط، 441
وسطانی مرکز، 701
وسیع تفاعل، 170
وقتی مستقل، 916

وقفہ، 3
ذیلی، 531
لا متناہی، 4
متناہی، 3
ہٹاو، 237، 731
ہم قد
سطح، 1522
منحنی، 1520
ہموار، 1260، 1442
ٹکڑوں میں، 1442
منحنی، 668
ہوائی پتر، 611
ہیلیم، 317
یعقوبی، 1758
مقطع، 1763
یولر
کلیہ، 1164
مستقل، 1093